文章编号:1674-7070(2014)01-0094-03

赵喜林[1]　赵煜[2]　余东[1]

基于不完全 β 分布的二项分布参数的 Bayesian 估计

摘要

将 β 分布推广到不完全 β 分布,给出了二项分布的可靠度的先验分布为不完全 β 分布时的一些结论,并讨论了在基于二项分布可靠性增长模型中的应用.

关键词

二项分布;不完全 β 分布;Bayesian 估计

中图分类号 O212.8

文献标志码 A

收稿日期 2013-09-30

资助项目 湖北省冶金与工业过程重点实验室项目(Y201319)

作者简介

赵喜林,男,硕士,副教授,研究方向为数理统计.zhaoxilin1214@163.com

1 武汉科技大学 理学院,武汉,430081

2 电子科技大学 微电子与固体电子学院,成都,610054

0 引言

如果只关心系统的试验结果是成功还是失败,则称该系统是成败型系统.随着系统的不断改进,其可靠性也越来越高.对系统的可靠性进行估计,归结于对二项分布参数 p 的估计.设某一阶段经过 n 次试验,成功的次数为 ξ,则 ξ 服从二项分布:

$$P\{\xi=x\}=f(x\mid p)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,2,\cdots,n,$$
$$0<p<1. \tag{1}$$

基于 ξ 的一次观察数据 (n,x) 对 p 进行估计,经典的最大似然估计

$$\hat{p}_L=\frac{x}{n}. \tag{2}$$

由于样本容量太少,估计结果不令人满意.一般可利用研发过程先一阶段的可靠度信息(先验信息)进行 Bayesian 估计.

假设 p 在上一阶段的先验分布为 $\beta(a,b)$,即:

$$\pi(p)=\frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a,b)},0<p<1,a>0,b>0. \tag{3}$$

根据 Bayesian 公式 p 的后验密度

$$h(p\mid x)=\frac{f(x\mid p)\pi(p)}{\int_0^1 f(x\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p}\propto p^{x}(1-p)^{n-x}p^{a-1}(1-p)^{b-1}=$$
$$p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1},$$

所以

$$h(p\mid x)=\frac{p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}}{B(a+x,b+n-x)}\sim\beta(a+x,b+n-x). \tag{4}$$

在平方损失下,p 的 Bayesian 解为

$$\hat{p}=E\{p\mid x\}=\int_0^1 ph(p\mid x)\mathrm{d}p=$$
$$\frac{\int_0^1 p^{a+x}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p}{B(a+x,b+n-x)}=\frac{B(a+x+1,b+n-x)}{B(a+x,b+n-x)}=$$
$$\frac{\Gamma(a+x+1)\Gamma(b+n-x)}{\Gamma(a+x+1+b+n-x)}\cdot\frac{\Gamma(a+x+b+n-x)}{\Gamma(a+x)\Gamma(b+n-x)}=$$
$$\frac{a+x}{a+b+n}. \tag{5}$$

$\hat{p}$ 的统计意义非常明显:若把(3) 中的 a,b 看成做了 $a+b$ 次试验,其中 a 次成功,将这个信息和当前信息"n 次试验中有 x 次成功"结合,$\hat{p}$ 即为试验成功的频率[1].

$\hat{p}$ 比 $\hat{p}_L$ 优良之处在于:通过先验信息确定 a,b,从而对 $\hat{p}$ 进行调整.随着系统的不断改进完善,系统的可靠度 p 越来越大(接近于1),p 的先验分布区间越来越靠近1,因此,可以假设 p 的先验分布取值范围为$(\lambda,1)$.本文提出了不完全 β 分布的概念,并利用该分布求 p 的 Bayesian 估计(Bayesian 解).

1 p 的 Bayesian 估计

如果对式(3)中 p 的取值范围左侧截尾,限定在$(\lambda,1)$,$0<\lambda<1$,得到:

定义1 若参数 p 的先验分布密度为

$$\pi(p)=\frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\int_\lambda^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1}\mathrm{d}p},$$
$$a>0,b>0,0<\lambda<p<1, \tag{6}$$

则称之为不完全 β 分布,记为 $\pi(p)\sim\beta(a,b,\lambda)$,$\lambda$ 称为不完全参数.显然,$\pi(p)$满足非负性和规范性.

当 $\lambda=0$时,不完全β分布$\beta(a,b,\lambda)$ 就是β分布(3),所以不完全 β 分布就是 β 分布的推广.

对于相同的 $0<\lambda<p<1$, 因为

$$\frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\int_\lambda^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1}\mathrm{d}p}\geqslant\frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\int_0^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1}\mathrm{d}p},$$

故有$\beta(a,b,\lambda)\geqslant\beta(a,b)$. (7)

对二项分布的参数 p 而言,不完全 β 分布还是共轭的.

定理1 不完全 β 分布(6)是二项分布(1)中可靠度 p 的共轭分布.

证明 当 p 的先验分布为(6)时,根据 Bayesian 公式,得 p 的后验密度

$$h(p\mid x)\propto f(x\mid p)\pi(p)=\frac{\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\int_\lambda^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1}\mathrm{d}p}\propto$$
$$p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1},\quad 0<\lambda<p<1,$$

所以

$$h(p\mid x)=\frac{p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}}{\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p},$$
$$0<\lambda<p<1, \tag{8}$$

即 $h(p\mid x)\sim\beta(a+x,b+n-x,\lambda)$ 为不完全β分布,所以(6) 是 p 的共轭分布.

共轭分布保证了可以用本阶段的后验分布作为下一阶段的先验分布.

定理2 设ξ服从二项分布(1),(n,x) 为ξ的一次观察数据.取 p 的先验分布密度为(6),在平方损失下 p 的 Bayesian 解

$$\hat{p}(\lambda)=\frac{\int_\lambda^1 p^{a+x}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p}{\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p}. \tag{9}$$

证明 由(8)知

$$h(p\mid x)=\frac{p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}}{\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p},0<\lambda<p<1,$$

在平方损失下,p 的 Bayesian 解

$$\hat{p}(\lambda)=E[p\mid x]=\int_\lambda^1 ph(p\mid x)\mathrm{d}p=$$
$$\frac{\int_\lambda^1 p^{a+x}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p}{\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p},$$

即(9)成立.

定理3 以(6)为先验分布的二项分布可靠度 p 的 Bayesian 解(9)是不完全参数 λ 的单调增加函数.

证明 因为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{p}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\Big[-\lambda^{a+x}(1-\lambda)^{b+n-x-1}\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p+\lambda^{a+x-1}(1-\lambda)^{b+n-x-1}\int_\lambda^1 p^{a+x}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p\Big]\times\Big\{\Big[\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p\Big]^2\Big\}^{-1}=$$
$$\Big\{\lambda^{a+x-1}(1-\lambda)^{b+n-x-1}\Big[\int_\lambda^1 p^{a+x}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p-\lambda\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p\Big]\Big\}\times\Big\{\Big[\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p\Big]^2\Big\}^{-1},$$

而

$$\int_\lambda^1 p^{a+x}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p-\lambda\int_\lambda^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p=\int_\lambda^1(p-\lambda)p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p\geqslant 0,$$

所以,$\dfrac{\mathrm{d}\hat{p}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\geqslant 0$,即 $\hat{p}(\lambda)$ 是 λ 的单调增函数.

定理3 表明:对先验分布(3)左侧截尾成(6),p 的 Bayesian 解 $\hat{p}(\lambda)$增大.截尾的幅度(不完全参数)

λ 越大,$\hat{p}(\lambda)$也越大.可以通过调整λ来调整$\hat{p}(\lambda)$.

2 p 的置信下限估计

引理 1 设$\beta \sim \beta(a,b)$,$2a$,$2b$均为自然数,则

$$F = \frac{b}{a} \cdot \frac{\beta}{1-\beta} \sim F(2a,2b).$$

证明见文献[2].

定理 4 设ξ服从分布(1),取p的先验分布为(6),a,b取正整数,(n,x)为ξ的一次观察值.记$\underline{p} = \frac{(a+x)F_\alpha}{(b+n-x)+(a+x)F_\alpha}$,其中$F_\alpha$是$F[2(a+x),2(b+n-x)]$的$\alpha$分位点,当$p \geqslant \lambda$时有:

$$P\{\underline{p} \leqslant p\} \geqslant 1-\alpha. \tag{10}$$

证明 引进随机变量$\eta \sim \beta(a+x,b+n-x)$,则$\eta$的密度函数

$$h^*(p \mid x) = \frac{p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}}{\int_0^1 p^{a+x-1}(1-p)^{b+n-x-1}\mathrm{d}p}.$$

由(7)可知:$h(p \mid x) \geqslant h^*(p \mid x)$.由引理可得:

$$F = \frac{b+n-x}{a+x} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} \sim F[2(a+x),2(b+n-x)],$$

则 $P\left\{\frac{b+n-x}{a+x} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} \geqslant F_\alpha\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\eta \geqslant \frac{(a+x)F_\alpha}{(b+n-x)+(a+x)F_\alpha}\right\} = 1-\alpha.$

由$h(p \mid x) \geqslant h^*(p \mid x)$知:

$$P\left\{p \geqslant \frac{(a+1)F_\alpha}{(b+n-x)+(a+x)F_\alpha}\right\} \geqslant 1-\alpha,$$

即为(10).

在p的先验分布为(6)时,定理3解决了求p的近似置信下限问题.

3 基于二项分布的可靠性增长模型的不完全参数 λ 的确定

设系统第i阶段成功的次数为ξ_i,观察样本为(n_i,x_i),则$\xi_i \sim B(n_i,p_i)$,根据(9),第i阶段系统的可靠度p_i的 Bayesian 估计为

$$\hat{p}_i(\lambda) = \frac{\int_\lambda^1 p^{a+x_i}(1-p)^{b+n_i-x_i-1}\mathrm{d}p}{\int_\lambda^1 p^{a+x_i-1}(1-p)^{b+n_i-x_i-1}\mathrm{d}p}.$$

根据(10),p_i的置信度为$1-\alpha$的近似置信下限为

$$\underline{p_i} = \frac{(a+x_i)F_\alpha}{(b+n_i-x_i)+(a+x_i)F_\alpha}.$$

可以用$k\underline{p_i}$,$0 \leqslant k \leqslant 1$作为第$i+1$阶段系统的可靠度$p_{i+1}$的不完全$\beta$分布中的不完全参数$\lambda_{i+1}$,$k$为由专家确定的整个模型的调整系数.$k=0$时,$\lambda_{i+1}=0$,又成为通常的 Bayesian 估计.

参考文献
References

[1] 赵喜林.几何分布可靠度的截尾 Bayesian 估计[J].武汉科技大学学报:自然科学版,2004,27(1):93-95
ZHAO Xilin. Bayesian estimation of reliability for geometric distribution[J].Journal of Wuhan University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2004, 27(1):93-95

[2] 张尧庭,陈汉锋.贝叶斯统计推断[M].北京:科学出版社,1991:149
ZHANG Yaoting, CHEN Hanfeng. Bayesian statistical inference[M].Beijing: Science Press, 1991:149

Bayesian estimation of parameters for binomial distribution based on the incomplete β-distribution

ZHAO Xilin[1] ZHAO Yu[2] YU Dong[1]

1 College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081

2 School of Microelectronics and Solid-State Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054

Abstract The paper extends β-distribution to incomplete β-distribution, and gives some conclusions about the parameters for binomial distribution when its prior distribution to be incomplete β-distribution, and discusses its application in reliability growth model based on binomial distribution.

Key words binomial distribution; incomplete β-distribution; Bayesian estimation