文章编号:1674-7070(2014)01-0089-05

倪建[1]　朱君[1]

带 TVB 限制器的 RKDG 方法与浸入边界方法在 Euler 方程中的应用

摘要

在求解 Euler 方程时,带 TVB 限制器的 Runge-Kutta 间断有限元(RKDG)方法是一种高精度、高并行效率的方法,而浸入边界方法是一种较新颖且对网格要求较低的方法,适用于处理复杂几何外形的边界.尝试了将上述 2 种方法结合起来求解 Euler 方程在笛卡尔网格上具有复杂几何外形的物体绕流问题,数个经典算例的数值结果验证了该方法的有效性.

关键词

TVB 限制器;RKDG 方法;浸入边界法;Euler 方程

中图分类号 V211.3
文献标志码 A

收稿日期 2013-04-26
资助项目 国家自然科学基金(11002071,11372005)

作者简介

倪建,男,硕士生,研究方向为偏微分方程数值解.jianni645426@126.com

朱君(通信作者),男,博士,副教授,研究方向为偏微分方程数值解.zhujun@nuaa.edu.cn

1 南京航空航天大学 理学院,南京,210016

0 引言

间断有限元(RKDG)方法最早由 Reed 等[1]在 1973 年提出,并用于求解中子输运方程.随后,一些计算工作者将它推广到求解非线性双曲守恒律方程和方程组[2-4].另外,间断有限元方法被应用于求解椭圆方程[5]、Hamilton-Jacobi 方程[6]以及对流扩散方程[7]等.间断有限元方法具有灵活处理间断和易于处理复杂的区域边界和边值问题的能力.

计算流体力学中,复杂几何外形的网格生成问题是一个较困难的问题.现存的流场网格生成方法主要包括贴体网格、笛卡尔网格和非结构网格等方法.

相比于结构网格和非结构网格,笛卡尔网格具有较多优点.由于笛卡尔网格的生成不是从模型表面出发,而是采用先空间后物面的方式,对于多部件模型,可以一次性生成计算所需的计算网格,使网格生成过程简单、省时.相对于贴体结构网格,不需要从物理空间向计算空间的转换,流场计算简单,节约计算时间.笛卡尔网格不存在分区结构网格中不同外形有不同的网格拓扑结构的要求,网格生成过程容易统一,对模型表面处理的依赖程度较低.笛卡尔网格对流场空间的填充效率高,能够缩短流场计算时间,故本文所有算例均在笛卡尔网格上进行计算.但笛卡尔网格也有它的不足,就是一般不适合直接应用于计算具有复杂几何外形的物体绕流问题.

近些年,Dadone 等[8-10]系统研究了结构网格中的 Ghost Cell 方法,并将之命名为 ST(Symmetry Technique)方法以及 CCST(Curvature Corrected Symmetry Technique)方法,这些有效的边界处理方法被推广用于笛卡尔网格[11-12],并取名为 GBCM(Ghost Body-Cell Method)方法.在文献[11]中,此类方法也被用于二维非结构网格,能得到较好的结果.此外,Forrer 等[12-13]提出了一种新的虚拟单元浸入边界方法求解二维静止与运动物体绕流问题.

本文试图在文献[14]的基础上将 ST 方法、Forrer 虚拟单元方法(FGCM)与 RKDG 方法相结合,在笛卡尔网格上对多个复杂物体绕流问题进行数值模拟.几个算例的计算结果表明本文所使用的方法具有一定效果,且易于实现.

1 RKDG 方法

本文仅研究无粘可压流体,考虑二维 Euler 方程:

$$\boldsymbol{U}_t + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})_x + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})_y = 0, \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\mu \\ \rho\nu \\ E \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho\mu \\ \rho\mu^2 + p \\ \rho\mu\nu \\ \mu(E+p) \end{bmatrix}, \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \rho\nu \\ \rho\mu\nu \\ \rho\nu^2 + p \\ \nu(E+p) \end{bmatrix},$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(\mu^2 + \nu^2).$$

本文定义笛卡尔均匀网格的大小为 $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ 及 $\Delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$,网格的单元中心为 $(x_i, y_j) = \left(\frac{1}{2}(x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}}), \frac{1}{2}(y_{j+\frac{1}{2}} + y_{j-\frac{1}{2}})\right)$,计算时每个小单元的区域范围是 $I_{ij} = [x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}] \times [y_{j+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}]$.测试函数空间 $V_h^k = \{p : p|_{I_{ij}} \in P^k(I_{ij})\}$,$P^k(I_{ij})$ 是定义在 I_{ij} 上次数不大于 k 的多项式空间.为方便起见,本文选取的测试函数为

$$\left\{v_l^{(ij)}(x,y), l = 0,1,2,\cdots,K; K = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - 1\right\},$$

$$v_0^{(ij)}(x,y) = 1, \quad v_1^{(ij)}(x,y) = \frac{x - x_j}{\Delta x},$$

$$v_2^{(ij)}(x,y) = \frac{y - y_j}{\Delta y}, \quad v_3^{(ij)}(x,y) = \left(\frac{x - x_j}{\Delta x}\right)^2 - \frac{1}{12},$$

$$v_4^{(ij)}(x,y) = \frac{(x - x_j)(y - y_j)}{\Delta x \Delta y},$$

$$v_5^{(ij)}(x) = \left(\frac{y - y_j}{\Delta y}\right)^2 - \frac{1}{12}, \cdots, \tag{2}$$

选取的测试函数具有正交性质:

$$\int_{I_{ij}} v_l^{(ij)}(x,y) v_s^{(ij)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a_l \delta_{ls}, \quad a_l \neq 0. \tag{3}$$

另外,再定义自由度、数值解以及 a_l 的定义式:

$$u_{ij}^{(l)}(t) = \frac{1}{a_l}\int_{I_{ij}} u^h(x,y,t) v_l^{(ij)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$l = 0,1,\cdots,K. \tag{4}$$

$$u^h(x,y,t) = \sum_{l=0}^{K} u_{ij}^{(l)}(t) v_l^{(ij)}(x,y), \quad (x,y) \in I_{ij}. \tag{5}$$

$$a_l = \int_{I_{ij}} (v_l^{(ij)}(x,y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6}$$

在式(1)两边同乘测试函数并积分,再利用分布积分公式可以得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{ij}^{(l)} + \frac{1}{a_l}\Bigg(-\int_{I_{ij}} f(u^h(x,y,t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v_l^{(ij)}(x,y) + g(u^h(x,y,t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}v_l^{(ij)}(x,y)\Bigg)\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$
$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \Big(f(u^h(x_{i+\frac{1}{2}},y)) v_l^{(ij)}(x_{i+\frac{1}{2}},y) - f(u^h(x_{i-\frac{1}{2}},y)) v_l^{(ij)}(x_{i-\frac{1}{2}},y)\Big)\mathrm{d}y \cdot$$
$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Big(g(u^h(x,y_{j+\frac{1}{2}})) v_l^{(ij)}(x,y_{j+\frac{1}{2}}) - g(u^h(x,y_{j-\frac{1}{2}})) v_l^{(ij)}(x,y_{j-\frac{1}{2}})\Big)\mathrm{d}x = 0, \tag{7}$$

式(7)中的几个积分项,可以改写为如下的数值积分式:

$$\int_{I_{ij}} f(u^h(x,y,t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v_l^{(ij)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{1}{4}\Delta x\Delta y \sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} f(u^h(x_{in},y_{jm},t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v_l^{(ij)}(x_{in},y_{jm}),$$

$$\int_{I_{ij}} g(u^h(x,y,t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v_l^{(ij)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{1}{4}\Delta x\Delta y \sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} g(u^h(x_{in},y_{jm},t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v_l^{(ij)}(x_{in},y_{jm}),$$

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(u^h(x_{i+\frac{1}{2}},y)) v_l^{(ij)}(x_{i+\frac{1}{2}},y)\,\mathrm{d}y \approx \frac{1}{2}\Delta y \sum_{m=1}^{2} \hat{f}(u^-_{i+\frac{1}{2},jm}, u^+_{i+\frac{1}{2},jm}) v_l^{(ij)}(x_{i+\frac{1}{2}},y_{jm}),$$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} g(u^h(x,y_{j+\frac{1}{2}})) v_l^{(ij)}(x,y_{j+\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\Delta x \sum_{n=1}^{2} \hat{g}(u^-_{in,j+\frac{1}{2}}, u^+_{in,j+\frac{1}{2}}) v_l^{(ij)}(x_{in},y_{j+\frac{1}{2}}). \tag{8}$$

本文采用的是总变差有界(TVB)[15]型的限制器,其中 $u_{ij}^{(1)}$ 被 $\tilde{m}\left(\frac{1}{2}u_{ij}^{(1)}, u_{i+1,j}^{(0)} - u_{ij}^{(0)}, u_{ij}^{(0)} - u_{i-1,j}^{(0)}\right)$ 限制,$u_{ij}^{(2)}$ 被 $\tilde{m}\left(\frac{1}{2}u_{ij}^{(2)}, u_{i,j+1}^{(0)} - u_{ij}^{(0)}, u_{ij}^{(0)} - u_{i,j-1}^{(0)}\right)$ 限制.

$$\tilde{m}(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \begin{cases} a_1, & |a_1| \leqslant M\Delta x^2, \\ m(a_1,a_2,\cdots,a_n), & \text{其他}, \end{cases}$$

而

$$m(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \begin{cases} s \cdot \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|, & \mathrm{sign}(a_1) = \mathrm{sign}(a_2) = \cdots = \mathrm{sign}(a_n) = s, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

上述 RKDG 方法构造参见文献[15].这样就可得到半离散格式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) = L(U). \tag{9}$$

使用三阶 TVD Runge-Kutta 时间离散公式[4]进行时间上的离散,具体公式如下:

$$\begin{cases} U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n), \\ U^{(2)} = \dfrac{3}{4}U^n + \dfrac{1}{4}U^{(1)} + \dfrac{1}{4}\Delta t L(U^{(1)}), \\ U^{n+1} = \dfrac{1}{3}U^n + \dfrac{2}{3}U^{(2)} + \dfrac{2}{3}\Delta t L(U^{(2)}). \end{cases} \tag{10}$$

2 Ghost Cell 方法

利用笛卡尔网格,网格与物体相交,如图 1 所示.本文使用的 Ghost Cell 方法需要给出浸入边界(Immersed Boundary)内部网格点处的物理量,比如点 A 处的物理量的值.最简单的方法是使用一般的对称反射边界条件(ST):

$$\begin{cases} \rho_A = \rho_B, \\ p_A = p_B, \\ \vec{v}_A = \vec{v}_B - 2(\vec{v}_B \cdot \vec{n})\vec{n}. \end{cases} \tag{11}$$

这样给出的边界条件能够满足无穿透边界条件 $\vec{v}_w \cdot n = 0$.Forrer 等[12-13]对于浸入固体内部的 Ghost Cell 值,建议速度仍然使用一般的反射,而压强和密度使用如下公式:

$$\begin{cases} p_A = p(x_w) + |x_w - x_A| \dfrac{p(x_w) - p(x_w^h)}{h}, \\ \rho_A = \rho(x_w) + |x_w - x_A| \dfrac{\rho(x_w) - \rho(x_w^h)}{h}. \end{cases} \tag{12}$$

这里 $x_w^h = x_w + h\vec{n}$,而墙压强 $p(x_w)$ 以及 $p(x_w^h)$ 通过线性或双线性插值得到,本文称此方法为 FGCM(Forrer's Ghost Cell Method).

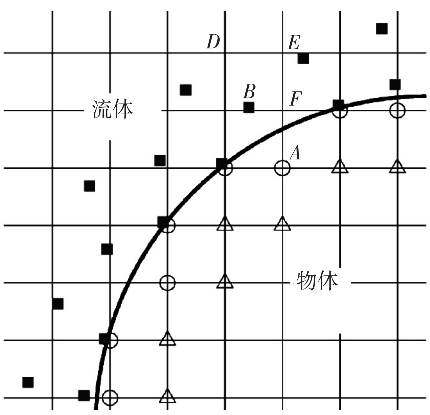


图 1 笛卡尔网格

Fig. 1 Cartesian mesh

3 数值结果

算例 1 台阶问题.此问题是 Emery 在 1968 年提出的一个用于检验非线性双曲型守恒律格式的经典算例.初始数据为管道内充满均匀流 $(\rho, u, v, p)^T = (1.4, 3, 0, 1)^T$,管道区域为 $[0,3] \times [0,1]$,在距左边界 0.6 处有一高度为 0.2 的台阶,且台阶沿伸到管道的尽头.上下边界为反射边界,左边界与初始一致,右边界为出流边界,如图 2 所示.图 3 给出了用 ST 方法和 FGCM 方法求出的前台阶密度等值线,取 30 条密度等值线,取值范围是 0.32~6.75,网格长度为 1/100.

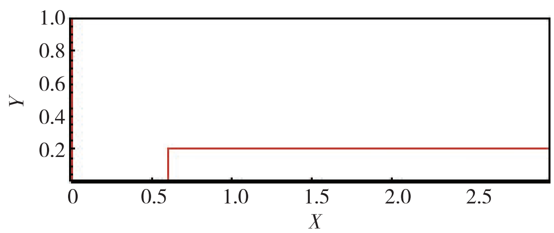
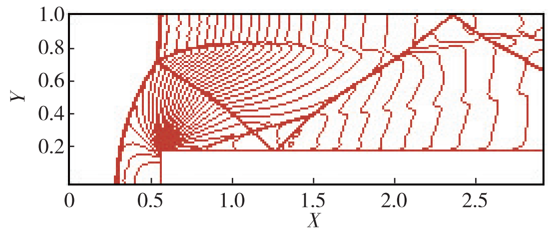
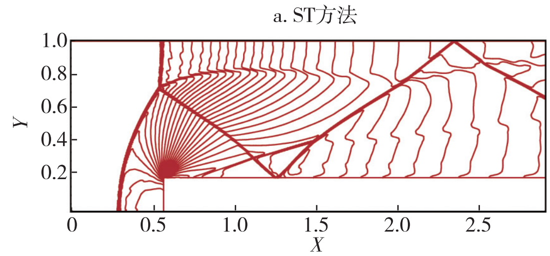


图 2 前台阶问题

Fig. 2 Forward step problem



a. ST方法



b. FGCM方法

图 3 密度等值线(0.32~6.75)

Fig. 3 Density contours(0.32-6.75)

算例 2 圆柱绕流问题.考虑超音速无粘流体流向单位圆柱.初始数据为水平来流 3 马赫,密度为 1.4,压强为 1.0,区域为$[-10,10] \times [-10,10]$,左边界为来流边界,右边界为超音速出流边界,如图 4 所示.图 5 是用 ST 方法与 FGCM 方法求出的压力等值线.取 30 条压力等值线,取值范围是 0.05~15,网格长度为 1/100.

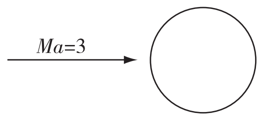
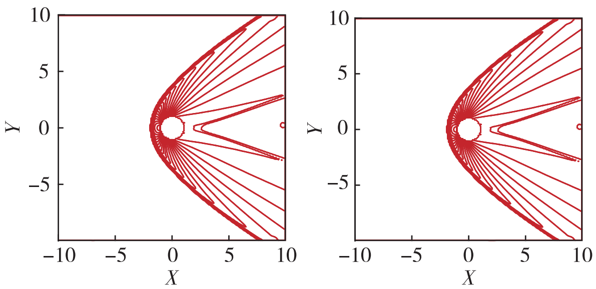


图 4　单位圆柱

Fig. 4　Unit cylinder



a. ST方法　　b. FGCM方法

图 5　压力等值线(0.05~15)

Fig. 5　Pressure contours(0.05-15)

算例 3　斜面双马赫反射问题.该问题描述的是一个来流为 10 马赫的强激波入射在与平面成 30°角的斜坡上后发生的变化,如图 6 所示.计算区域取为 $[0,3]\times[0,2]$,始于 $x=\sqrt{3}/12$,激波垂直 x 轴.初始数据的左右状态为 $\boldsymbol{u}_L=(8,66.009,0,563.544)^T$, $\boldsymbol{u}_R=(1.4,0,0,2.5)^T$.边界条件:左右边界分别取左右状态值;下边界,当 $x>\sqrt{3}/12$ 时为反射边界,$x\leqslant\sqrt{3}/12$ 时,设为左状态;上边界,当 $x>g(t)$ 时,取右状态,$x\leqslant g(t)$ 时,取左状态.其中 $g(t)=(\sqrt{3}/12)+10t$. 图 7 是用 ST 方法与 FGCM 方法求出的斜面双马赫密度等值线,取值范围为 1.5~21.5,网格长度为 1/160.

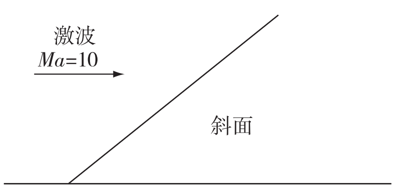
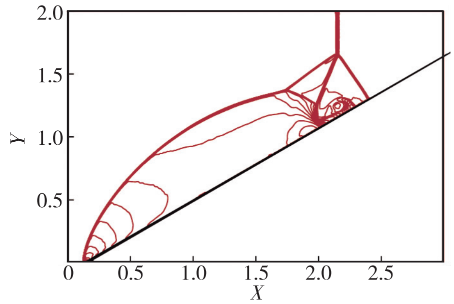


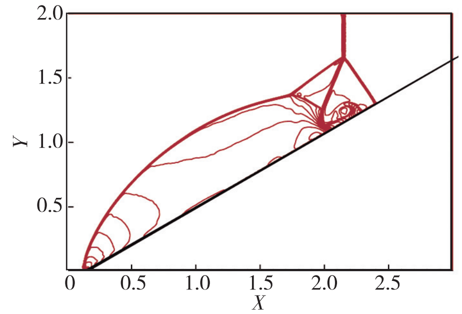
图 6　初始斜坡

Fig. 6　Initial figure of slope

算例 4　NACA0012 翼型跨声速绕流问题.自由来流 $Ma_\infty=2.0$,攻角 $\alpha=10.0°$.这是一个超音速的绕流,在翼型头部会形成一道很强的弓形强激波,同时在翼型的尾部会形成斜激波.图 8 给出了 ST 方法及 FGCM 方法计算的压力等值线.图 9 给出了 ST 方法计算的翼型表面压力系数分布与 FGCM 方法计算



a. ST方法

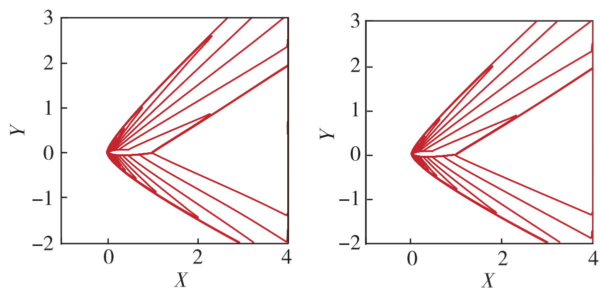


b. FGCM方法

图 7　密度等值线(1.5~21.5)

Fig. 7　Density contours(1.5-21.5)

的表面压力系数分布.其中,30 条压力等值线的取值范围是 0.5~6.5,网格长度为 1/70.



a. ST方法　　b. FGCM方法

图 8　$Ma_\infty=2.0$,攻角 $\alpha=10.0°$,压力等值线(0.5~6.5)

Fig. 8　Pressure contours(0.5-6.5) when $Ma_\infty=2.0$ and angle of attack $\alpha=10.0°$

4　结论

本文使用的带 TVB 限制器的 RKDG 方法与浸入边界方法相结合,在实际计算时具有灵活处理间断和易于处理复杂区域边界和边值问题的能力,在笛卡尔网格上求解 Euler 方程时,能对具有上述复杂几何外形物体的绕流问题进行高精度数值模拟.最后,通过对多个经典算例的数值计算验证了本方法的有效性.

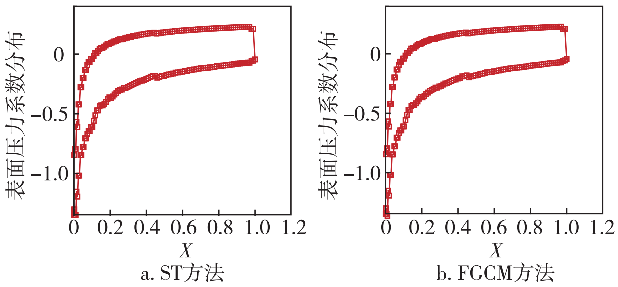


图9 $Ma_\infty=2.0$,攻角 $\alpha=10.0°$,表面压力系数分布

Fig. 9 Surface pressure coefficient when $Ma_\infty=2.0$ and angle of attack $\alpha=10.0°$

参考文献

References

[1] Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation [C] // National Topical Meeting on Mathematical Models and Computational Techniques for Analysis of Nuclear Systems, 1973

[2] Cockburn B, Shu C-W. TVB Runge-Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws II: General framework [J]. Math Comp, 1989, 52(186): 411-435

[3] Cockburn B, Shu C-W. TVB Runge-Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws V: Multidimensional systems [J]. J Comput Phys, 1998, 141(2): 199-224

[4] Chavent G, Salzano G. A finite-element method for the 1-D water flooding problem with gravity [J]. J Comput Phys, 1982, 45(3): 307-344

[5] Raviart P A, Thomas J M. A finite element method for second order elliptic problems in mathematical aspects of the finite element method [M] // Morel J M, Teissier B, Lugosi G, et al. Lecture Notes in Math, Berlin: Springer Verlag, 1977

[6] Hu C Q, Shu C-W. A discontinuous Galerkin finite element methods for Hamilton-Jacobi equations [J]. SIAM J Sci Comput, 1999, 21: 666-690

[7] Cockburn B, Shu C-W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems [J]. SIAM J Numer Anal, 1998, 35(6): 2440-2463

[8] Dadone A. Symmetry technique for the numerical solution of the 2D Euler equations at impermeable boundaries [J]. Int J Numer Meth Fluids, 1998, 28(7): 1093-1108

[9] Dadone A, Grossman B. Surface boundary conditions for the numerical solution of the Euler equations in three dimensions [J]. Lecture Notes in Physics, 1995, 453: 188-194

[10] Dadone A, Grossman B. Ghost-Cell method with far field coarsening and mesh adaptation for Cartesian grids [J]. Computers & Fluids, 2006, 35(7): 676-687

[11] Wang Z J, Sun Y Z. Curvature-based wall boundary condition for the Euler equations on unstructured grids [J]. AIAA Journal, 2003, 41(1): 27-33

[12] Forrer H, Jeltsch R. A higher-order boundary treatment for Cartesian-grid methods [J]. J Comput Phys, 1998, 140(2): 259-277

[13] Forrer H, Berger M. Flow simulations on Cartesian grids involving complex moving geometries [J]. International Series of Numerical Mathematics, 1999, 129: 315-324

[14] 李自启,朱君.WENO格式与虚拟单元浸入边界法在笛卡尔网格中的应用[J].南京信息工程大学学报:自然科学版,2013,5(1):86-90
LI Ziqi, ZHU Jun. Application of WENO scheme with ghost cell immersed boundary method on Cartesian mesh [J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology: Natural Science Edition, 2013, 5(1): 86-90

[15] Qiu J X, Shu C-W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method II: Two dimensional case [J]. Computers & Fluids, 2005, 34(6): 642-663

Application of RKDG method with TVB limiter and immersed boundary method for solving the Euler equations

NI Jian[1] ZHU Jun[1]

1 College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

Abstract The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin (RKDG) method with TVB limiter is a high-order accurate and highly parallelizable method for solving the Euler equations. Simultaneously, the immersed boundary method is a novel and general technique for handling a flow with complex geometry without any special needs of the computational mesh. We try to use the two methods for simulating the Euler equations with the above-mentioned problems on Cartesian mesh. Finally, the results of some classical test cases are provided to verify the efficiency of such methods.

Key words TVB limiter; RKDG method; immersed boundary method; Euler equations