文章编号:1674-7070(2013)06-0573-04

奇异非线性二阶诺伊曼边值问题恰有5个正解的条件

胡令雄[1]　李德宜[1]　任帅[1]

摘要

主要研究奇异非线性二阶诺伊曼边值问题的正解个数.应用比较原理、最大值原理和上界方法得出了在一定条件下,该问题恰好有5个正解的结果.

关键词

正解;存在性;多重性;不动点定理

中图分类号 O175.8

文献标志码 A

收稿日期 2012-07-12

资助项目 武汉科技大学冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室开放基金(C201005)

作者简介

胡令雄,男,硕士生,主要研究方向为不动点理论.hulingx2008@163.com

李德宜(通信作者),男,教授,研究方向为凸系统理论及应用.lideyy@yahoo.com.cn

1 武汉科技大学 理学院,武汉,430065

0 引言

诺伊曼边值问题在数学物理方面有重要的应用(例如关于波束的均衡问题、流体问题和热传导问题等),因此,在过去的半个世纪它吸引了众多数学家的研究,并得出了在多种条件下该问题解的个数及其存在性的结果.

Canada 等[1]和 Wang 等[2]分别用李雅普诺夫型不等式和 Schauder 不动点定理证明了诺伊曼边值问题的存在性和唯一性;文献[3-4]用不动点定理得出了诺伊曼边值问题正解的存在性和多重性的结果;Sudhasree 等[5]研究了凹凸型非线性半正调问题正解的多重性;Shi[6]得出了关于全局分支图的局部描述;Ortega 等[7]讨论了超线性周期问题分支值的最佳边界;Chen 等[8]探讨了三阶非线性 Duffiing 方程周期解的确切个数.在这些研究中所采用的打靶法、上下解方法和临界点理论等重要方法与理论现在已被广泛运用,但上述研究均是关于唯一解或最少解个数的结论,而关于诺伊曼边值问题确切正解个数的结论很少.

本文研究下列诺伊曼边值正解的个数问题:

$$\begin{cases} x''(t)+f(x(t))=h(t), \quad 0\leqslant t\leqslant 1, & (1)\\ x'(0)=x'(1)=0, & (2)\end{cases}$$

其中 f 在 0 处奇异,得出了在一定条件下该问题恰有 5 个正解的结果.

1 预备知识

定义 1 $u\in C^2[0,1]$ 称为问题(1)—(2)正解,若 u 是问题(1)—(2)的解,并且 $u(t)>0$ 对 $\forall t\in[0,1]$ 均成立.

下述引理在诺伊曼问题的研究中起着重要作用.

引理1[9] 设 $p_1(t),p_2(t)\in C[0,1]$,$p_i(t)<\frac{\pi^2}{4}$,$i=1,2$,$p_1(t)\leqslant p_2(t)$,并且在一个正测集中不等式严格成立,则以下 2 个问题:

$$\begin{cases} x''(t)+p_1(t)x(t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\\ x'(0)=x'(1)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(t)+p_2(t)x(t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\\ x'(0)=x'(1)=0\end{cases}$$

至少有 1 个只有平凡解.

引理 2[3] 令 $h \in C[0,1]$, $L > 0$, 则下述诺伊曼边值问题:

$$\begin{cases} -x''(t) + Lx(t) = h(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

有唯一解 $x(t) = \int_0^1 G_1(t,s)h(s)\mathrm{d}s$,

其中

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\cosh(l(1-t))\cosh(ls)}{l\sinh l}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{\cosh(l(1-s))\cosh(lt)}{l\sinh l}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \end{cases} \quad l = \sqrt{L}.$$

引理 3[3] 令 $h \in C[0,1]$, $0 < K < \dfrac{\pi^2}{4}$, 则下述诺伊曼边值问题:

$$\begin{cases} x''(t) + Kx(t) = h(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

有唯一解 $x(t) = \int_0^1 G_2(t,s)h(s)\mathrm{d}s$,

其中

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\cosh(k(1-t))\cos(ks)}{k\sinh k}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{\cosh(k(1-s))\cos(kt)}{k\sin k}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \end{cases} \quad k = \sqrt{K}.$$

注 1 引理 2 和引理 3 中的 $G_i(t,s)$, $i = 1,2$ 是正的,则由 $h(t) \geqslant 0$ 可推出 $x(t) \geqslant 0$.

2 主要结论

本节将给出关于二阶诺伊曼边值问题正解个数的主要结论.

定理 1 假设 $f \in C^1(0, +\infty)$, 满足下列条件:

(ⅰ) 存在 $u_1^*, u_2^* \in (0, +\infty)$, $u_1^* < u_2^*$, 存在 $v_1 \in (u_1^*, u_2^*)$, 使得 f' 分别在 $(0, u_1^*)$, (v_1, u_2^*) 上严格递增, 在 (u_1^*, v_1), $(u_2^*, +\infty)$ 上严格递减;

(ⅱ) $0 < f'(u_i^*) < \dfrac{\pi^2}{4}$, $i = 1,2$, $f'(v_1) < 0$;

(ⅲ) $\lim\limits_{u \to 0^+} f(u) = +\infty$, $\lim\limits_{u \to +\infty} f(u) = -\infty$, f 在 $(0, +\infty)$ 上的极大值均大于其极小值;

则存在 2 个常数 M, m, $M > m$, 使得当 $m < h(t) < M$ 时, 问题(1)—(2) 在

$$K = \{x \in C^2[0,1] \mid x(t) > 0, \\ m < f(x(t)) < M, \forall t \in [0,1]\}$$

中恰好有 5 个正解.

证明

由(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)知, 存在 $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$, $a_1 < u_1^* < a_2 < v_1 < a_3 < u_2^* < a_4$ 使得

$$f'(a_1) = f'(a_2) = f'(a_3) = f'(a_4) = 0.$$

令 $m_1 = f(a_1)$, $M_1 = f(a_2)$, $m_2 = f(a_3)$, $M_2 = f(a_4)$, 易知 m_i, M_i, $i = 1,2$ 分别为 f 在 $(0, +\infty)$ 上的极小值和极大值, 取 $m = \max\{m_1, m_2\}$, $M = \min\{M_1, M_2\}$.

Step1 若 $m < h(t) < M$, 则问题(1)—(2) 在

$$K = \{x \in C^2[0,1] \mid x(t) > 0, \\ m < f(x(t)) < M, \forall t \in [0,1]\}$$

中至少有 5 个正解.

不失一般性, 不妨设 $m_1 < m_2$, $M_1 < M_2$, 则有 $m = m_2$, $M = M_1$, 其他几种情况均可类似证明. 由 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ 可知, 存在 $0 < b_1 < b_2 < a_1 < b_3 < a_2 < a_3 < b_4 < a_4 < b_5 < b_6$, 使得

$$m = f(b_2) = f(b_3) = f(a_3) = f(b_6) < h(t), \\ M = f(b_1) = f(a_2) = f(b_4) = f(b_5) > h(t), \\ t \in [0,1].$$

令

$$u_1(t) = b_1, u_2(t) = b_2, u_3(t) = b_3, u_4(t) = a_2, \\ u_5(t) = a_3, u_6(t) = b_4, u_7(t) = b_5, u_8(t) = b_6.$$

① 问题(1)—(2) 在 $[u_1, u_2]$ 中至少存在 1 个正解.

事实上, 由 $f \in C^1(0, +\infty)$ 知, 存在一正常数 L, 使得 $|f'(x)| < L$ 对 $\forall x \in [b_1, b_2]$ 均成立, 又注意到:

$$\begin{cases} -u''_1(t) < f(u_1(t)) - h(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u'_1(0) = u'_1(1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u''_2(t) \geqslant f(u_2(t)) - h(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u'_2(0) = u'_2(1) = 0 \end{cases}$$

或等价的有:

$$\begin{cases} -u''_1(t) + Lu_1(t) < f(u_1(t)) + Lu_1(t) - h(t), \\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u'_1(0) = u'_1(1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u''_2(t) + Lu_2(t) \geqslant f(u_2(t)) + Lu_2(t) - h(t), \\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u'_2(0) = u'_2(1) = 0. \end{cases}$$

定义算子 $S: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$Su(t) = \int_0^1 G_1(t,s)[f(u(s)) + Lu(s) - h(s)]\mathrm{d}s, \\ u \in C[0,1],$$

则有：

(ⅰ) S 是全连续的；

(ⅱ) $u_1(t) < Su_1(t), u_2(t) \geqslant Su_2(t)$；

(ⅲ) S 在 $[u_1, u_2]$ 上单调递增.

再结合 $u_1(t) < u_2(t)$ 知，S 在 $[u_1, u_2]$ 上至少有 1 个不动点[10]，即下述诺伊曼边值问题：

$$\begin{cases} -x''(t) + Lx(t) = f(x(t)) + Lx(t) - h(t), \\ \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

或等价的

$$\begin{cases} x''(t) + f(x(t)) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

至少有 1 个解 $x_1 \in C[0,1]$ 满足 $b_1 \leqslant x_1(t) \leqslant b_2$，对 $\forall t \in [0,1]$ 均成立.

② 问题(1)—(2) 在 $[u_3, u_4]$ 中至少存在 1 个正解.

由 $f'(x) < \dfrac{\pi^2}{4}$ 知，存在一正数 K，使得 $f'(x) < K < \dfrac{\pi^2}{4}$ 对 $\forall x \in [b_3, a_2]$ 均成立.

显然，有：

$$\begin{cases} u''_3(t) + Ku_3(t) \leqslant h(t) - f(u_3(t)) + Ku_3(t), \\ \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u'_3(0) = u'_3(1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u''_4(t) + Ku_4(t) > h(t) - f(u_4(t)) + Ku_4(t), \\ \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u'_4(0) = u'_4(1) = 0. \end{cases}$$

定义算子 $T: C[0,1] \to C[0,1]$，

$$Tu(t) = \int_0^1 G_2(t,s)[h(s) - f(u(s)) + Ku(s)]\mathrm{d}s, \quad u \in C[0,1],$$

则有：

(ⅰ) T 是全连续的；

(ⅱ) $u_3(t) \leqslant Tu_3(t), u_4(t) > Tu_4(t)$；

(ⅲ) T 在 $[u_3, u_4]$ 上单调递增.

再结合 $u_3(t) < u_4(t)$ 知，T 在 $[u_3, u_4]$ 上至少有 1 个不动点[10]，即下述诺伊曼边值问题：

$$\begin{cases} x''(t) + Kx(t) = h(t) - f(x(t)) + Kx(t), \\ \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

或等价的

$$\begin{cases} x''(t) + f(x(t)) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

至少有 1 个解 $x_2 \in C[0,1]$ 满足 $b_3 \leqslant x_2(t) \leqslant a_2$ 对 $\forall t \in [0,1]$ 均成立.

③问题 (1)—(2) 在 $[u_4, u_5]$ 中至少存在 1 个正解. 该命题可用类似于 ① 的方法来证明.

④ 问题(1)—(2) 在 $[u_5, u_6]$ 中至少存在 1 个正解. 该命题可用类似于 ② 的方法来证明.

⑤ 问题(1)—(2) 在 $[u_7, u_8]$ 中至少存在 1 个正解. 该命题可用类似于①的方法来证明.

由①—⑤可知问题(1)—(2)在

$$K = \{x \in C^2[0,1] \mid x(t) > 0, \quad m < f(x(t)) < M, \forall t \in [0,1]\}$$

中至少有 5 个正解.

Step2 问题(1)—(2)在

$$K = \{x \in C^2[0,1] \mid x(t) > 0, \quad m < f(x(t)) < M, \forall t \in [0,1]\}$$

中至多存在 5 个正解.

若不然，假设问题(1)—(2) 在 K 中存在 6 个不同的正解 $w_i, i = 1,2,\cdots,6$. 令

$$\Lambda_1 = (b_1, a_1), \Lambda_2 = (a_1, a_2), \Lambda_3 = (a_2, a_3), \quad \Lambda_4 = (a_3, a_4), \Lambda_5 = (a_4, b_6),$$

则 $w \in K$，意味着对 $\forall t \in [0,1]$ 均有 $w(t) \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5$.

又由于 $\Lambda_i, i = 1,2,\cdots,5$ 不相交，则必存在 w_i, w_j，$1 \leqslant i < j \leqslant 6$，和 $\Lambda_k, 1 \leqslant k \leqslant 5$，使得 $w_i(t), w_j(t) \in \Lambda_k$ 对 $\forall t \in [0,1]$ 均成立.

不失一般性，不妨设 $w_1(t), w_2(t) \in \Lambda_1$，对 $\forall t \in [0,1]$ 成立. 令 $w_0 = w_2 - w_1$，则 w_0 是下述线性问题的一个非平凡解：

$$\begin{cases} x''(t) + p(t)x(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

和 $p(t) = f'(\lambda(t)w_2(t) + (1 - \lambda(t))w_1(t))$，这里

$$f(w_2(t)) - f(w_1(t)) = f'(\lambda(t)w_2(t) + (1 - \lambda(t))w_1(t))(w_2(t) - w_1(t)),$$

$$\lambda \in C([0,1],[0,1]).$$

由于 $w_1(t), w_2(t) \in \Lambda_1$，在 Λ_1 中 $f' < 0$，则 $p(t) = f'(\lambda(t)w_2(t) + (1 - \lambda(t))w_1(t)) < 0$，又注意到

$$\begin{cases} x''(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

有非平凡解，则由引理 1[9] 知 w_0 在 $[0,1]$ 上恒为 0，即 $w_2(t) \equiv w_1(t), \forall t \in [0,1]$，这与 w_1, w_2 是问题(1)—(2) 在 K 中不同的解矛盾，故原假设不成立，问题(1)—(2) 在 K 中至多只有 5 个正解.

Step3 问题(1)—(2) 在 K 中恰好有 5 个

正解.

一方面,由Step1知问题(1)—(2)在 K 中至少有5个正解,另一方面,由Step2知问题(1)—(2)在 K 中至多只有5个正解,两者结合便知问题(1)—(2)在 K 中恰好有5个正解.

至此,定理1证明完毕.

参考文献
References

[1] Canada A, Montero J A, Villegas S. Lyapunov-type inequalities and Neumann boundary value problems at resonace[J]. Math Ineq Appl, 2005, 8:459-475

[2] Wang H, Li Y. Neumann boundary value problems for second-order ordinary differential equations across resonace[J]. SIAM J Control Optim, 1995, 33:1312-1325

[3] Sun J, Li W. Multiple positive solutions to a second-order Neumann boundary value problems[J]. Appl Math Comput, 2003, 146(1):187-194

[4] Chu J, Sun Y, Chen H. Positive solutions of Neumann problems with singularities[J]. J Math Anal Appl, 2007, 67:2815-2828

[5] Sudhasree G, Joseph A I. Exact multiplicity of positive solutions in semipositone problems with concave-convex type nonliearities [J]. Electronic J Qual Theory Diff Equat, 2001, 4:1-9

[6] Shi J. Semilinear Neumann boundary value problems on a rectangle[J]. Trans Amer Math Soc, 2002, 354(8): 3117-3154

[7] Ortega R, Zhang M. Optimal bounds for bifurcation values of a superlinear periodic problem[J]. Proc Royal Soc Edinburgh: Section of Edinburgh, 2005, 135(1):119-132

[8] Chen H, Li Y. Stability and exact multiplicity of periodic solutions of Duffing equations with cubic nonlinearities [J]. Proc Amer Math Soc, 2007, 135(12):3925-3932

[9] Feng Y Q, Li G J. Exact three positive solutions to a second-roder Neumann boundary value problem with singular nonlinearity[J]. The Arabian Journal for Science and Engineering, 2010, 35(2D):189-195

[10] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces[J]. SIAM Review, 1976, 18(4):620-709

Condition for exactly five positive solutions to a second-order Neumann boundary value problem with singular nonlinearity

HU Lingxiong[1] LI Deyi[1] REN Shuai[1]

1 College of Sciences, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065

Abstract In this paper, the number of solutions to a second-order Neumann boundary value problem with singular nonlinearity are concerned. Comparison theorem, maximum principle and upper solutions method are employed to come to a conclusion that, in some condition, the number of solutions for this problem is exactly five.

Key words positive solution; existence; multiplicity; fixed point theorem