文章编号:1674-7070(2013)05-0472-06

基于非线性压缩的 Menger 空间上不动点与不动度定理

靳鑫[1]　肖建中[1]

摘要

首先,研究了 Menger 概率度量空间上的非线性算子,证明了非线性压缩与非线性扩张的不动点的存在唯一性;进一步将单个算子的不动点结果推广为一族可交换算子的公共不动点;最后,通过弱化条件,建立了模糊映射新的不动度定理.

关键词

Menger PM-空间;模糊映射;概率非线性压缩;不动点;不动度

中图分类号 O175.8
文献标志码 A

收稿日期 2012-10-23

作者简介

靳鑫,男,硕士生,研究方向为泛函分析理论与应用. jinxin870210@126.com

肖建中(通信作者),男,教授,主要研究方向为泛函分析空间理论与泛函分析非经典类. xiaojz@nuist.edu.cn

1 南京信息工程大学 数学与统计学院,南京,210044

0 引言

不动点理论起源于 Banach 压缩映射原理. 该原理有诸多推广形式(参见文献[1-3]),其中最著名的推广是将压缩映射推广到由非线性函数 φ 所决定的压缩映射. 1972 年,Sehgal 等[4]引进了概率压缩的概念,证明了不动点的存在性. 文献[1,5-7]研究了概率 φ-压缩的不动点,获得了许多有意义的不动点结果. 基于经典不动点理论的模糊化,文献[8]引入模糊映射的不动度概念,在此基础上,文献[9-11]将某些经典不动点定理推广为模糊映射的不动度定理.

受上述文献的启发,本文在 Menger 概率度量空间框架下继续研究了非线性算子的不动点的存在唯一性及模糊映射的不动度问题. 由于本文中关于非线性函数 φ 的限制较弱,因而本文得出的不动点与不动度结果是新的.

1 预备知识

本文中记 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,$\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$,$\mathbf{N}$ 表示正整数集. 若 $\varphi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 为一函数,$t\in\mathbf{R}^+$,则 $\varphi^{-1}(\{0\})=\{t\in\mathbf{R}^+:\varphi(t)=0\}$,$\varphi^n(t)$ 表示 $\varphi(t)$ 的第 n 次迭代.

定义 1[5-7,12-13]　若映射 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ 是递增,左连续,并且 $\inf_{t\in\mathbf{R}}F(t)=0$,$\sup_{t\in\mathbf{R}}F(t)=1$,则称 F 是分布函数. 用 D 表示一切分布函数的集合.

定义 2[5-7,13-14]　设 $\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 是一映射,如果对任意 $a,b,c,d\in[0,1]$,满足如下条件:

(Δ-1) $\Delta(a,1)=a$;

(Δ-2) $\Delta(a,b)=\Delta(b,a)$;

(Δ-3) $\Delta(a,b)\geqslant\Delta(c,d)$, $\forall a\geqslant c,b\geqslant d$;

(Δ-4) $\Delta(a,\Delta(b,c))=\Delta(\Delta(a,b),c)$,

则称 Δ 是三角范数(简称 t-范数).

记 $\Delta^1(t)=\Delta(t,t)=t$,$\Delta^m(t)=\Delta(t,\Delta^{m-1}(t))$,其中 $m=2,3,\cdots$,$t\in[0,1]$. 如果满足序列 $\{\Delta^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $t=1$ 上等度连续,即 $\forall\varepsilon\in(0,1)$,$\exists\delta\in(0,1)$,当 $t>1-\delta$ 时,使得 $\Delta^n(t)>1-\varepsilon(n\geqslant 1)$,则称 t-范数 Δ 是 H 型的.

定义 3[5-7,13-14] 概率度量空间是一抽象有序对 (X,F),其中 X 是抽象集合,$F:X\times X\to D$ 是一个映射($x,y\in X$,记为 $F_{x,y}$),且满足下面的条件:对任意的 $x,y,z\in X$,

(PM-1) $\forall t>0$ 有 $F_{x,y}(t)=1$ 当且仅当 $x=y$;

(PM-2) $F_{x,y}(0)=0$;

(PM-3) $F_{x,y}=F_{y,x}$;

(PM-4) 若对任意 $t_1,t_2>0$ 有 $F_{x,y}(t_1)=1$,$F_{y,z}(t_2)=1$,则 $F_{x,z}(t_1+t_2)=1$, Menger 概率度量空间是一抽象三元组 (X,F,Δ),其中 (X,F) 是概率度量空间,Δ 是 t- 范数,且满足

(PM-4m) $F_{x,z}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,y}(t_1),F_{y,z}(t_2))$,$\forall x,y,z\in X,t_1,t_2\geqslant 0$.

Schweizer 等[15-16]指出,若 Menger 概率度量空间满足 $\sup\limits_{0<a<1}\Delta(a,a)=1$,则 (X,F,Δ) 是第一可数的 Hausdorff 拓扑空间. 因此,本文中提到的 Menger 概率度量空间均指其条件 $\sup\limits_{0<a<1}\Delta(a,a)=1$ 是满足的.

定义 4 设 (X,F,Δ) 是 Menger 概率度量空间,序列 $\{x_n\}\subset X$,对于某点 $x\in X$,若 $\forall\varepsilon>0$, $\forall\lambda\in(0,1]$, $\exists N(\varepsilon,\lambda)\in\mathbf{N}$, 当 $n>N(\varepsilon,\lambda)$ 时, 使得 $F_{x_n,x}(\varepsilon)>1-\lambda$,则称序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x,记为 $x_n\to x$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 设序列 $\{x_n\}\subset X$,如果对 $\forall\varepsilon>0$,$\lambda\in(0,1]$,$\exists N(\varepsilon,\lambda)\in\mathbf{N}$,当 $m,n>N(\varepsilon,\lambda)$ 时,使得 $F_{x_n,x_m}(\varepsilon)>1-\lambda$,则序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 若 Menger 概率度量空间 (X,F,Δ) 中每一个 Cauchy 列都收敛,则称它是完备的.

定义 5[12] 设 (X,F,Δ) 是 Menger 概率度量空间. 记 $CB(X)$ 为 X 中的所有非空闭集族,I^X 表示 X 的所有模糊子集族(其中 $I=[0,1]$),称映射 $T:X\to I^X$ 为 X 上的模糊映射. 设 $A\subset CB(X)$,$x\in X$, 定义 $F_{x,A}(t)=\sup\limits_{y\in A}F_{x,y}(t)$,$t\geqslant 0$.

2 压缩与扩张映射的不动点

定理 1 设 (X,F,Δ) 是一完备的 Menger 概率度量空间,Δ 是 H 型 t- 范数并且 $\Delta(t,s)$ 在 $t=1$ 处连续,函数 $\varphi_i(t):\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 满足 $\varphi_i(0)=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_i^n(t)=+\infty$ 且 $\varphi_i(t)>t$,$i=1,2,3$. 若映射 $T:X\to X$ 满足下述压缩条件:$\forall x,y\in X$,$\forall t>0$,有

$$F_{Tx,Ty}(t)\geqslant\min\{F_{x,Tx}(\varphi_1(t)),\ F_{y,Ty}(\varphi_2(t)),F_{x,y}(\varphi_3(t))\},\qquad(1)$$

则 T 存在唯一不动点.

证明 令 $\varphi(t)=\min\{\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t)\}$,则对 $\forall t>0$ 有 $\varphi(t)>t$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=+\infty$. 设 $x_0\in X$,$x_n=Tx_{n-1}=\cdots=T^nx_0(n\in\mathbf{N})$,则 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列,根据式(1) 有

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)=F_{Tx_{n-1},Tx_n}(t)\geqslant\min\{F_{x_{n-1},x_n}(\varphi_1(t)),F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi_2(t)),F_{x_{n-1},x_n}(\varphi_3(t))\}\geqslant\min\{F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t)),F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)),F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))\}=\min\{F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t)),F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t))\}.\qquad(2)$$

以下证明, 对 $\forall t>0$ 必有

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t)).\qquad(3)$$

假设式(3)不成立, 即 $F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))>F_{x_n,x_{n+1}}(t)$,则由式(2) 得 $F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t))$. 因为 $t<\varphi(t)$,则 $F_{x_n,x_{n+1}}(t)\leqslant F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t))$,故有 $F_{x_n,x_{n+1}}(t)=F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t))$. 于是

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)=F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t))=\cdots=F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^m(t))F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^m(t))\to 1(m\to\infty),$$

因此有 $F_{x_n,x_{n+1}}(t)\equiv 1$ ($\forall t>0$),从而 $F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))>F_{x_n,x_{n+1}}(t)=1$, 与 $F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))\leqslant 1$ 矛盾. 因此有 $F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))\leqslant F_{x_n,x_{n+1}}(t)$, 即式(3) 成立. 根据式(3) 可得

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))\geqslant F_{x_{n-2},x_{n-1}}(\varphi^2(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{x_0,x_1}(\varphi^n(t))\to 1(n\to\infty).$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(t)=1.\qquad(4)$$

下面用数学归纳法证明

$$F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(t))\geqslant\Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t)).\qquad(5)$$

$k=1$ 时式(5) 显然成立. 设式(5) 对某 k 成立,则当 $k+1$ 时,利用(PM-4) 有

$$F_{x_n,x_{n+k+1}}(\varphi(t))\geqslant\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(t)).\qquad(6)$$

由式(3)可得 $F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(t)\geqslant F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(t))$, 由式(6)与归纳假设有

$$F_{x_n,x_{n+k+1}}(\varphi(t))\geqslant\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(t))\geqslant\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(t)))\geqslant\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),\Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t)))=\Delta^{k+1}(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t)),$$

因此式(5)成立.

以下证 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 根据式(4) 与 $\varphi(t)>t$ 有

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t)=1(\forall t>0).\qquad(7)$$

设 $\forall\varepsilon>0$,$\lambda\in(0,1]$. 因为 Δ 是 H 型的,根据定义 $\exists\delta\in(0,1]$,使 $t>1-\delta$ 时对 $\forall k$ 有 $\Delta^k(t)>$

$1-\lambda$. 由式(7)可知, $\exists N\in\mathbf{N}$, 使 $n>N$ 时有 $F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(\varepsilon)-\varepsilon)\in(1-\delta,1]$, 于是 $\forall k$ 按(5)有 $F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(\varepsilon))\geqslant\Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(\varepsilon)-t))>1-\lambda$. 根据式(3)可得 $F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(\varepsilon)\geqslant F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(\varepsilon))>1-\lambda$. 证得 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 由于 (X,F,Δ) 是完备的, 故存在 $x_*\in X$ 使 $x_n\to x_*$, 即

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_*}(t)=1(\forall t>0),$$

从而也有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n,x_*}(\varphi_3(t))=1$. 由式(4)得 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi_1(t))=1$. 故当 n 充分大时, 有

$$\min\left\{F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi_1(t)),F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2(t)),F_{x_n,x_*}(\varphi_3(t))\right\}=F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2(t)),$$

于是由式(1)得

$$F_{x_{n+1},Tx_*}(t)\geqslant F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2(t)).\qquad(8)$$

根据(PM-4)和式(8)有

$$F_{x_*,Tx_*}(t)\geqslant\Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(\varphi_2(t)-t),F_{x_{n+1},Tx_*}(t))\geqslant\Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(\varphi_2(t)-t),F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2(t))).\qquad(9)$$

因为 $F_{x_*,x_{n+1}}(\varphi_2(t)-t)\to1(n\to\infty)$, 由 $\Delta(t,s)$ 在 $t=1$ 的连续性和式(9)可得 $F_{x_*,Tx_*}(t)\geqslant F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2(t))$, 又由于 $\varphi_2(t)>t$, 故 $F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2(t))\geqslant F_{x_*,Tx_*}(t)$, 从而有 $F_{x_*,Tx_*}(t)=F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2(t))$.

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_2{}^n(t)=+\infty$ 进一步得到当 $n\to\infty$ 时有

$$F_{x_*,Tx_*}(t)=F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2(t))=\cdots=F_{x_*,Tx_*}(\varphi_2{}^n(t))\to1.$$

因此 $F_{x_*,Tx_*}(t)=1$, 即 x_* 是 T 的不动点.

下证唯一性.

假设又有 $y_*\in X$ 使 $y_*=Ty_*$, 则由式(3)可知 $\forall t>0$ 有

$$F_{x_*,y_*}(t)=F_{Tx_*,Ty_*}(t)\geqslant F_{x_*,y_*}(\varphi(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{x_*,y_*}(\varphi^n(t))\to1\quad(n\to\infty),$$

由此得到 $F_{x_*,y_*}(t)=1$, 即 $x_*=y_*$, 唯一性得证.

命题得证.

定理 2 设 (X,F,Δ) 是一完备的 Menger 概率度量空间, Δ 是 H 型的 t- 范数, $\varphi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 满足 $\varphi(t)>t,\varphi(0)=0,\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=+\infty(\forall t>0)$, T 是 X 上连续的满射, 满足下述扩张条件

$$F_{Tx,Ty}(\varphi(t))\leqslant\min\{F_{x,Tx}(t),F_{y,Ty}(t),F_{x,y}(t)\},\qquad(10)$$

则 T 存在唯一不动点.

证明 已知 T 是满射, 下证 T 是单射, 即证 $x\neq y$ 时 $Tx\neq Ty$, 这等价于证 $Tx=Ty$ 时 $x=y$. 当 $Tx=Ty$ 时, 有 $F_{Tx,Ty}(t)=1$, 根据式(10)有

$$\min\{F_{x,Tx}(t),F_{y,Ty}(t),F_{x,y}(t)\}\geqslant1,$$

由此可得 $F_{x,y}(t)=1$, 所以有 $x=y$, 故 T 也是单射. 从而可知 T^{-1} 存在. 设 $x_0\in X$, $\exists x_1$ 使 $Tx_1=x_0$, 同理若 x_{n-1} 已找出, 则 $\exists x_n\in X$ 使 $Tx_n=x_{n-1}$, 于是 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 根据式(10)有

$$F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))=F_{Tx_n,Tx_{n+1}}(\varphi(t))\leqslant\min\left\{F_{x_n,x_{n-1}}(t),F_{x_{n+1},x_n}(t),F_{x_n,x_{n+1}}(t)\right\}=\min\left\{F_{x_n,x_{n-1}}(t),F_{x_{n+1},x_n}(t)\right\}.\qquad(11)$$

以下证明, 对 $\forall t>0$, 必有

$$F_{x_n,x_{n-1}}(\varphi(t))\leqslant F_{x_{n+1},x_n}(t).\qquad(12)$$

假设 $F_{x_n,x_{n-1}}(t)<F_{x_{n+1},x_n}(t)$, 则根据式(11)有 $F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))\leqslant F_{x_{n-1},x_n}(t)$, 又由于 $\varphi(t)>t$, 则 $F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))\geqslant F_{x_n,x_{n-1}}(t)$, 从而有 $F_{x_{n-1},x_n}(t)=F_{x_{n-1},x_n}(\varphi(t))=\cdots=F_{x_{n-1},x_n}(\varphi^m(t))\to1\quad(m\to\infty)$, 得出 $F_{x_{n-1},x_n}(t)\equiv1$. 于是根据假设得出 $F_{x_{n+1},x_n}(t)>F_{x_n,x_{n-1}}(t)=1$, 与 $F_{x_{n+1},x_n}(t)\leqslant1$ 矛盾. 因此 $F_{x_n,x_{n-1}}(t)\geqslant F_{x_{n+1},x_n}(t)$, 从而根据式(11)有 $F_{x_n,x_{n-1}}(\varphi(t))\leqslant F_{x_{n+1},x_n}(t)$, 即式(12)成立. 由此得 $F_{x_{n+1},x_n}(t)\geqslant F_{x_n,x_{n-1}}(\varphi(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{x_1,x_0}(\varphi^n(t))$.

由于 $\varphi^n(t)\to\infty$, 有 $F_{x_1,x_0}(\varphi^n(t))\to1\ (n\to\infty)$, 因此 $F_{x_{n+1},x_n}(t)\geqslant F_{x_1,x_0}(\varphi^n(t))\to1(n\to\infty)$, 这说明

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_{n+1},x_n}(t)=1.\qquad(13)$$

下面用数学归纳法证明

$$F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(t))\geqslant\Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t)).\qquad(14)$$

$k=1$ 时式(14)显然成立. 设式(14)对某 k 成立, 则当 $k+1$ 时, 利用(PM-4)有

$$F_{x_n,x_{n+k+1}}(\varphi(t))\geqslant\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(t)).\qquad(15)$$

由式(12)可得 $F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(t)\geqslant F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(t))$, 由式(15)与归纳假设有

$$\begin{aligned}F_{x_n,x_{n+k+1}}(\varphi(t))&\geqslant\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(t))\geqslant\\&\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(t))\geqslant\\&\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(t)))\geqslant\\&\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t),\Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t)))=\\&\Delta^{k+1}(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t)),\end{aligned}$$

因此式(15)成立.

以下证 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 根据式(14)与 $\varphi(t)>t$ 有

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)-t)=1(\forall t>0).\qquad(16)$$

设 $\forall\varepsilon>0,\lambda\in(0,1]$. 因为 Δ 是 H 型的, 根据

定义 $\exists \delta \in (0,1]$,使 $t > 1-\delta$ 时对 $\forall k$ 有 $\Delta^k(t) > 1-\lambda$. 由式(16)可知,$\exists N \in \mathbf{N}$,使 $n > N$ 时有如下关系成立:$F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(\varepsilon)-\varepsilon) \in (1-\delta,1]$,于是,$\forall k$ 按式(14)有 $F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(\varepsilon)) \geqslant \Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(\varepsilon)-t)) > 1-\lambda$. 根据式(12)可得 $F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(\varepsilon) \geqslant F_{x_n,x_{n+k}}(\varphi(\varepsilon)) > 1-\lambda$,证得$\{x_n\}$是Cauchy列. 由于$(X,F,\Delta)$是完备的,故存在 $x_* \in X$ 使 $x_n \to x_*$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} F_{x_n,x_*}(t) = 1\ (\forall t > 0)$. 由于 $x_n = Tx_{n+1}$,并且 T 在 X 上是连续的,于是得到 $x_* = Tx_*$,即 x_* 是 T 的不动点.

下面证明不动点的唯一性. 假设至少存在两个不动点. 令 $y_* = Ty_*$,$y_* \neq x_*$,则根据式(10)有

$$F_{x_*,y_*}(\varphi(t)) = F_{Tx_*,Ty_*}(\varphi(t)) \leqslant \min\{F_{x_*,Tx_*}(t),F_{y_*,Ty_*}(t),F_{x_*,y_*}(t)\},$$

由于 $F_{x_*,Tx_*}(t) = 1$,$F_{y_*,Ty_*}(t) = 1$,因此有

$$F_{x_*,y_*}(t) \geqslant F_{x_*,y_*}(\varphi(t)) \geqslant \cdots \geqslant F_{x_*,y_*}(\varphi^n(t)) \to 1 \quad (n \to \infty),$$

从而有 $y_* = x_*$,与假设矛盾. 唯一性成立. 命题得证.

3 映射族的公共不动点

定理3 设(X,F,Δ)是一完备的Menger概率度量空间,Δ 是 H 型的 t-范数. 设函数 φ 满足:$0 < \varphi(t) < t$,$\varphi^{-1}(\{0\}) = 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t) = 0$. 又设 $T_0,T_1,\cdots,T_k$ 是一族可交换的算子,其中算子 T_0 是压缩的,即

$$F_{T_0x,T_0y}(\varphi(t)) \geqslant F_{x,y}(t). \tag{17}$$

算子 T_i,$i = 1,2,\cdots,k$ 是非扩张的,即

$$F_{T_ix,T_iy}(t) \geqslant F_{x,y}(t), \tag{18}$$

则 $T_0,T_1,\cdots,T_k$ 具有公共不动点 x_*.

证明 定义序列$\{x_n\}$如下:$x_1 = T_1x_0$,$x_2 = T_2x_1$,$\cdots$,$x_k = T_kx_{k-1}$,$x_{k+1} = T_0x_k$. 为了叙述方便,本文将序列$\{x_n\}$记为 $x_n = T_{n(\mathrm{mod}k+1)}x_{n-1}$. 根据式(17)有 $F_{T_0(T_1T_2\cdots T_kx),T_0(T_1T_2\cdots T_ky)}(\varphi(t)) \geqslant F_{T_1T_2\cdots T_kx,T_1T_2\cdots T_ky}(t)$,再反复利用式(18)有

$$F_{T_1(T_2T_3\cdots T_kx),T_1(T_2T_3\cdots T_ky)}(t) \geqslant F_{T_2T_3\cdots T_kx,T_2T_3\cdots T_ky}(t),$$
$$F_{T_2(T_3T_4\cdots T_kx),T_2(T_3T_4\cdots T_ky)}(t) \geqslant F_{T_3T_4\cdots T_kx,T_3T_4\cdots T_ky}(t),$$
$$\cdots$$
$$F_{T_kx,T_ky}(t) \geqslant F_{x,y}(t).$$

由上述叙述可得

$$F_{T_0T_1T_2\cdots T_kx,T_0T_1T_2\cdots T_ky}(\varphi(t)) \geqslant F_{x,y}(t).$$

令 $T_0T_1\cdots T_k = T$ 得

$$F_{Tx,Ty}(\varphi(t)) \geqslant F_{x,y}(t). \tag{19}$$

由式(19)得

$$F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^n(t)) \geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\varphi^{n-1}(t)) \geqslant \cdots \geqslant F_{x_0,x_1}(t). \tag{20}$$

设 $t_0 > 0$,$\lambda \in (0,1]$ 是任意的. 因为$\lim\limits_{t\to\infty}F_{x_0,x_1}(t) = 1$,故 $\exists M > 0$,$\forall t \geqslant M$,$F_{x_0,x_1}(t) > 1-\lambda$. 因为对 $\forall t > 0$ 有$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t) = 0$,故 $\exists N \in \mathbf{N}$,$\forall n > N$ 有 $\varphi^n(M) < t_0$,从而按式(20)有 $F_{x_n,x_{n+1}}(t_0) \geqslant F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^n(M)) \geqslant \cdots \geqslant F_{x_0,x_1}(M) > 1-\lambda$. 由此得

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(t) = 1(\forall t > 0). \tag{21}$$

下面用数学归纳法证明

$$F_{x_n,x_{n+k}}(t) \geqslant \Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t))). \tag{22}$$

当 $k = 1$ 时,式(22)显然成立. 设式(22)对某 k 成立,则当 $k+1$ 时,

$$\begin{aligned}F_{x_n,x_{n+k+1}}(t) &= F_{x_n,x_{n+k+1}}((t-\varphi(t))+\varphi(t)) \geqslant \\ &\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t)),F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(\varphi(t))) \geqslant \\ &\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t)),F_{x_n,x_{n+k}}(t)) \geqslant \\ &\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t)),\Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t)))) = \\ &\Delta^{k+1}(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t))),\end{aligned}$$

由此可知式(22)成立. 对任意 $\varepsilon > 0$,$\lambda \in (0,1]$,由 Δ 是 H 型的可知,$\exists \delta \in (0,1]$ 使 $t > 1-\delta$ 时,对 $\forall k$ 有 $\Delta^k(t) > 1-\lambda$,由式(21)以及 $\varphi(\varepsilon) < \varepsilon$ 可知,$\exists N \in \mathbf{N}$,$\forall n > N$,$F_{x_n,x_{n+1}}(\varepsilon-\varphi(\varepsilon)) > 1-\delta$. 从而按照式(22)有

$$F_{x_n,x_{n+k}}(\varepsilon) \geqslant \Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(\varepsilon-\varphi(\varepsilon))) > 1-\lambda,$$

证得$\{x_n\}$是Cauchy列. 由于(X,F,Δ)是完备的,故存在 $x_* \in X$ 使 $x_n \to x_*$,即

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_*}(t) = 1(\forall t > 0),$$

$$\begin{aligned}F_{x_*,Tx_*}(t) &\geqslant \Delta\{F_{x_*,x_{n+1}}(t-\varphi(t)),F_{x_{n+1},Tx_*}(\varphi(t))\} \geqslant \\ &\Delta\{F_{x_*,x_{n+1}}(t-\varphi(t)),F_{x_n,x_*}(t)\} \to \\ &\Delta(1,1) = 1(n \to \infty).\end{aligned}$$

因此 $F_{x_*,Tx_*}(t) = 1$,即 x_* 是 T 的不动点.

下证唯一性.

假设又有 $y_* \in X$ 使 $y_* = Ty_*$,则根据式(19)有 $F_{x_*,y_*}(\varphi^n(t)) = F_{Tx_*,Ty_*}(\varphi(\varphi^{n-1}(t))) \geqslant F_{x_*,y_*}(\varphi^{n-1}(t))$,则 $F_{x_*,y_*}(\varphi^n(t)) \geqslant F_{x_*,y_*}(t)$. 由此可得 $F_{x_*,y_*}(t) = 1$,即 $x_* = y_*$. 综上所述,T 算子存在唯一. 即

$$Tx_* = x_*. \tag{23}$$

对式(23)两边同时作用算子 T_i 得 $T_iTx_* = T_ix_*$,即 $T_i(T_0T_1\cdots T_k)x_* = T_ix_*$. 因为算子是可交换

的,所以有$(T_0T_1\cdots T_k)T_ix_* = T_ix_*$,即$T(T_ix_*) = T_ix_*$,又因为 T 算子的不动点是唯一的,所以$T(T_ix_*) = x_*$,由此得到$T_ix_* = x_*, i = 0,1,\cdots,k$.

4 模糊映射不动度

定理 4 设(X,F,Δ)是一完备的 Menger 概率度量空间,函数φ满足:$0 < \varphi(t) < t, \varphi^{-1}(\{0\}) = 0$且$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t) = 0$. 又设$\alpha$是一个 X 到$(0,1]$的函数,T是 X 上的模糊映射,满足以下条件:

(ⅰ)对每个$x \in X, (Tx)_{\alpha(x)} \in CB(X)$;

(ⅱ)对任何$x,y \in X$和$u \in (Tx)_{\alpha(x)}$,总存在$v \in (Ty)_{\alpha(y)}$使得对所有的$t > 0$,有$F_{u,v}(\varphi(t)) \geqslant F_{x,y}(t)$,则存在$z \in X$使得$(Tz)_{\alpha(z)} \geqslant \alpha(z)$.

证明 设$x_0 \in X$和$x_1 \in (Tx_0)_{\alpha(x_0)}$是任意的. 由条件(ⅱ)存在$x_2 \in (Tx_1)_{\alpha(x_1)}$,使得对所有的$t > 0$,有$F_{x_1,x_2}(\varphi(t)) \geqslant F_{x_0,x_1}(t)$. 若$x_n \in (Tx_{n-1})_{\alpha(x_{n-1})}$已找出,则由条件(ⅱ)存在$x_{n+1} \in (Tx_n)_{\alpha(x_n)}$,使得

$$F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi(t)) \geqslant F_{x_{n-1},x_n}(t). \tag{24}$$

按归纳法由此得到序列$\{x_n\} \subset X$满足式(24).

下面利用数学归纳法证明

$$F_{x_n,x_{n+k}}(t) \geqslant \Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t))). \tag{25}$$

当$k = 1$时,式(25)显然成立. 设式(25)对某k成立,当$k+1$时,

$$\begin{aligned}F_{x_n,x_{n+k+1}}(t) &= F_{x_n,x_{n+k+1}}((t-\varphi(t))+\varphi(t)) \geqslant \\ &\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t)), F_{x_{n+1},x_{n+k+1}}(\varphi(t))) \geqslant \\ &\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t)), F_{x_n,x_{n+k}}(t)) \geqslant \\ &\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t)), \Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t)))) = \\ &\Delta^{k+1}(F_{x_n,x_{n+1}}(t-\varphi(t))).\end{aligned}$$

由此可知式(25)成立. 由式(24)得

$$F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^n(t)) \geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\varphi^{n-1}(t)) \geqslant \cdots \geqslant F_{x_0,x_1}(t). \tag{26}$$

设$t_0 > 0, \lambda \in (0,1]$是任意的. 因为$\lim\limits_{t\to\infty}F_{x_0,x_1}(t) = 1$,故$\exists M > 0, \forall t \geqslant M, F_{x_0,x_1}(t) > 1-\lambda$. 因为对$\forall t > 0$有$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t) = 0$,故$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N$有$\varphi^n(M) < t_0$,从而按式(26)有

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t_0) \geqslant F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^n(M)) \geqslant F_{x_0,x_1}(M) > 1-\lambda,$$

由此得

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(t) = 1 \quad (\forall t > 0). \tag{27}$$

对任意$\varepsilon > 0, \lambda \in (0,1]$,由$\Delta$是 H 型的可知$\exists \delta \in (0,1]$,使$t > 1-\delta$时对$\forall k$有$\Delta^k(t) > 1-\lambda$. 由式(27)及$\varphi(\varepsilon) < \varepsilon$可知$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N$, $F_{x_n,x_{n+1}}(\varepsilon-\varphi(\varepsilon)) > 1-\delta$. 从而按式(25)有

$$F_{x_n,x_{n+k}}(\varepsilon) \geqslant \Delta^k(F_{x_n,x_{n+1}}(\varepsilon-\varphi(\varepsilon))) > 1-\lambda.$$

由此可知$\{x_n\}$是 Cauchy 列. 设$x_n \to z$,现在,证明$(Tz)_{\alpha(z)} \geqslant \alpha(z)$. 由条件(ⅱ),存在$y \in (Tz)_{\alpha(z)}$使得对所有的$t > 0$,

$$F_{x_{n+1},(Tz)_{\alpha(z)}}(t) \geqslant F_{x_{n+1},(Tz)_{\alpha(z)}}(\varphi(t)) \geqslant F_{x_{n+1},y}(\varphi(t)) \geqslant F_{x_n,z}(t),$$

因而有

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_{n+1},(Tz)_{\alpha(z)}}(t) = 1,$$

$$\begin{aligned}F_{z,(Tz)_{\alpha(z)}}(t) &\geqslant \Delta\left\{F_{z,x_{n+1}}(t-\varphi(t)), F_{x_{n+1},(Tz)_{\alpha(z)}}(\varphi(t))\right\} \geqslant \\ &\Delta\left\{F_{z,x_{n+1}}(t-\varphi(t)), F_{z,(Tz)_{\alpha(x)}}(t)\right\} \to \\ &\Delta(1,1) = 1 (n \to \infty).\end{aligned}$$

由此得到$z \in (Tz)_{\alpha(z)}$,即$(Tz)_{\alpha(z)} \geqslant \alpha(z)$.

注 本节定理 4 弱化了文献[12]对φ的限制,去掉了$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t) < +\infty$等条件,因而本文的结果是新的.

参考文献
References

[1] 张石生. 概率度量空间的基本理论及应用(I)[J]. 应用数学和力学,1988,9(2):117-126
ZHANG Shisheng. Basic theory and applications of probabilistic metric spaces (I)[J]. Applied Mathematics and Mechanics,1988,9(2):117-126

[2] Choudhury B S. A common unique fixed point result in metric spaces involving generalized altering distances [J]. Mathematical Communications, 2005, 10(2): 105-110

[3] Ćirić L. Solving the Banach fixed point principle for nonlinear contractions in probabilistic metric spaces[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010,72(3/4):2009-2018

[4] Sehgal V M, Bharucha-Reid A T. Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric space[J]. Mathematical Systems Theory,1972,6(1/2):97-102

[5] Fang J X. Common fixed point theorems of compatible and weakly compatible maps in Menger spaces[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(5/6):1833-1843

[6] Choudhury B S, Das K, Dutta P N. A fixed point result in Menger spaces using a real function[J]. Acta Mathematica Hungarica,2009,122(3):203-216

[7] Jachymski J. On probabilistic ϕ-contractions on Menger spaces[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,2010,73(7):2199-2203

[8] Fang J X. Fixed degree for fuzzy mappings[J]. Chinese Science Bulletin,1985,30(9):1267

[9] Chang S-S. Fixed degree for fuzzy mappings and a generalization of Ky Fan theorem[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987,24(1):103-112

[10] 张石生. 关于 Fuzzy 映象的不动度[J]. 数学年刊 A 辑,1987,8(4):492-495
ZHANG Shisheng. On the fixed degree for fuzzy mappings [J]. Chinese Annals of Mathematics (A),1987,8(4):492-495
[11] Chang S-S, Cho Y J, Lee B S, et al. Fixed degree and fixed point theorems for fuzzy mappings in probabilistic metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems,1997,87(3):325-334
[12] 蒋沈庆,方锦暄. Menger PM-空间中模糊映射的一个新的不动度定理[J]. 南京师大学报:自然科学版,2009,32(3):1-5
JIANG Shenqing, FANG Jinxuan. A new common fixed degree theorem for fuzzy mappings in Menger PM-spaces [J]. Journal of Nanjing Normal University: Natural Science Edition,2009,32(3):1-5
[13] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆:重庆出版社,1984
ZHANG Shisheng. Fixed point theory and applications [M]. Chongqing:Chongqing Publishing House,1984
[14] 张石生. 概率度量空间的基本理论及应用(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学,1988,9 (3):193-204
ZHANG Shisheng. Basic theory and applications of probabilistic metric spaces (Ⅱ)[J]. Applied Mathematics and Mechanics,1988,9(3):193-204
[15] Schweizer B,Sklar A. Statistical metric spaces[J]. Pacific Journal of Mathematics,1960,10(1):313-334
[16] Schweizer B,Sklar A,Thorp E. The metrization of statistical metric spaces[J]. Pacific Journal of Mathematics,1960,10(2):673-675

Fixed point and fixed degree theorems for nonlinear contraction in Menger spaces

JIN Xin[1] XIAO Jianzhong[1]

1 School of Mathematics & Statistics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract In this paper,we discuss the nonlinear operators in Menger probability metric spaces. We prove the existence and uniqueness of the fixed point for nonlinear contraction and expansion. Furthermore,we extend the result for single operator to common fixed point for a family of exchangeable operators. By weakening conditions,we establish a new fixed degree theorem for fuzzy mapping.

Key words Menger PM-space;fuzzy mapping;probabilistic nonlinear contraction;fixed point;fixed degree