文章编号:1674-7070(2013)05-0397-05

奇异摄动系统的有限频段正实引理和界实引理

梅平[1] 付景枝[1] 臧强[1]

摘要

利用GKYP引理研究了奇异摄动系统的有限频段正实引理和界实引理,证明了全阶系统的有限频段正实性可以由快、慢子系统的有限频段正实性得到,同样可以证明奇异摄动系统的有限频段界实引理具有类似性质.最后作为应用,给出了一个两频域尺度模型降阶实现方案,表明了该方法的有效性.

关键词

奇异摄动系统;正实性;界实性;有限频段;广义Kalman-Yakubovich-Popov(GKYP)引理

中图分类号 TP13

文献标志码 A

收稿日期 2012-08-29

资助项目 南京信息工程大学科研基金(S8110051001,S8111126001);江苏省自然科学基金(BK2011826);江苏省属高校自然科学基金(12KJB120004)

作者简介

梅平,女,讲师,博士生,从事奇异摄动系统、非线性系统研究.meiping1007@163.com

1 南京信息工程大学 信息与控制学院,南京,210044

0 引言

正实引理和界实引理在系统和控制理论中应用广泛.在控制理论中,正实系统的概念经常与某一类反馈系统的稳定性分析联系在一起[1-2].正实性和界实性也经常用于系统鲁棒控制和模型降阶[3-4].

本文的目的是研究奇异摄动系统的有限频段正实性和界实定理.具体来说,研究一个全阶的奇异摄动系统的有限频段正实(界实)能否从它的降阶子系统的有限频段正实(界实)得到.奇异摄动系统是在航空[5-6]和电力[7]领域经常出现的一类系统,其主要特点是系统动态变化速度差异很大,有快、慢动态之分.奇异摄动系统的正实性和界实性相关工作见文献[8].

本文工作与已有工作的区别在于,本文提出了奇异摄动系统有限频段正(界)实的概念.随着现代控制理论的成功发展,以往的“固定”的控制器已经不能保证系统在所有的情形下都能获得满意性能,特别是当控制系统受到大的扰动和约束时,控制器必须决定在特定情形下采取特定的控制行动,这就产生了本文有限频段的概念.事实上,有限频段的概念首次出现在文献[9]中,在此文里,作者将KYP(Kalman-Yakubovich-Popov)引理应用到有限频段上,得到广义Kalman-Yankubovich-Popov(GKYP)引理,为研究系统在有限频段的相关性质奠定了基础.

文献[10-11]指出类似于时域情形,在频域上,奇异摄动系统的传递函数具有双频标尺度,即低频和高频.其中在低频段内慢子系统只对低频的信号敏感;同样,在高频段内,快子系统只对高频信号敏感.据此就只需在子系统相应的频段内研究系统的相关性能,而不需要在全频段;同时,在分别对子系统设计相应的降阶控制器时,无需考虑无关频段,与全频段设计比较,大大降低设计保守性.

1 问题描述

首先给出所要研究的系统,接着给出一些下文中将会用到的定义和前提假设.

考察奇异摄动系统:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u},\\ \varepsilon\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u},\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为系统摄动参数，$\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^{n_i}(i=1,2)$ 为系统状态量，$\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$ 为系统控制量，$\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$ 为系统的测量输出. 令

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \varepsilon \boldsymbol{I}_{n_2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = [\boldsymbol{C}_1 \quad \boldsymbol{C}_2],$$

其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 分别为适当维数的常数矩阵，且 $\boldsymbol{A}_{22}$ 是可逆矩阵，即此时考虑的是标准的奇异摄动系统.

对系统(1)快慢分解得到快、慢 2 个子系统.

慢系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_s = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{u}_s, \\ \boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{D}_0 \boldsymbol{u}_s. \end{cases} \tag{2}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}, \quad \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2,$$
$$\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}, \quad \boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2.$$

快系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_f = \boldsymbol{A}_{22} \boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{u}_f, \\ \boldsymbol{y}_f = \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{D} \boldsymbol{u}_f. \end{cases} \tag{3}$$

系统(1)和两频标(TFS)传递函数的关系见下面的引理.

引理 1[12] 一个传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 是两频标的，当且仅当存在一个如(1)形式的 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 的最小实现.

令系统(1)的传递函数矩阵为 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$，由文献[10,13]知，若(1)是 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 的最小实现，则传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 是两频域尺度的有理矩阵. 其中

$$\boldsymbol{G}_s(s) = \boldsymbol{C}_0(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0)^{-1}\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{D}_0, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{G}_f(p) = \boldsymbol{C}_2(p\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{22})^{-1}\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{D}. \tag{5}$$

这里 $\boldsymbol{G}_s(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_f(p)$ 分别被称做传递函数 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 的低频和高频近似. 其中 $p = \varepsilon s$ 是高频频域尺度，对应于时域上的快时间尺度 $\tau = t/\varepsilon$.

为了使所描述的问题在每一个频域尺度上是适定的，$\boldsymbol{G}_s(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_f(p)$ 需要满足一些正则条件[9].

为此，本文先给出如下“消失极点”(lost poles)的定义.

定义 1[12] 令 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 是一个两频域尺度上的有理函数矩阵，且(1)是其最小实现，则 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 消失的慢极点指的是系统$(\boldsymbol{C}_0,\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0,\boldsymbol{D}_0)$中那些不可控或不可观的极点. 同样，$\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 消失的快极点指的是系统$(\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{A}_{22},\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{D})$中那些不可控或不可观的极点.

假设 1 $\boldsymbol{G}_s(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_f(p)$ 都是稳定的且 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 没有不稳定的消失极点.

下面引用文献[9]的有限频段正实的定义来定义系统(1)的有限频段正(界)实. 注意到：当 $\varepsilon = 1$ 时，此时系统(1)就是线性时不变系统.

将上述定义拓展到奇异摄动系统(1)，则可以得到系统(1)有限频段正实的定义.

定义 2 如果一个传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(\varepsilon,s)$ 满足以下条件：

ⅰ) $\boldsymbol{G}(\varepsilon,s)$ 在右半平面内没有极点且解析；

ⅱ) 对任意的 $j\omega \in j\Omega$，有 $\boldsymbol{G}(\varepsilon,j\omega) + \boldsymbol{G}(\varepsilon,j\omega)^* \geqslant 0$ 成立；

则称 $\boldsymbol{G}(\varepsilon,s)$ 在频段 $j\Omega$ 内是正实的，即是有限频段正实的.

为了得到奇异摄动系统有限频段界实定理，先给出如下引理.

引理 2[14] (广义界实定理)给定集合 $W = \left\{\tilde{\omega} \in \mathbf{R}: \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{\Psi} \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant 0\right\}$，Hermitian 矩阵 $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbf{C}^{2\times 2}$，若 $\det(j\omega\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \neq 0(\forall \omega \in W)$，则窗口 H_∞ 范数 $\|\boldsymbol{G}(s)\|_\infty^W = \|\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\|_\infty^W < \gamma$ 的充要条件为：存在 Hermitian 矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{Q} > 0$ 且

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{Q} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} - \gamma^2 \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0.$$

2 奇异摄动系统有限频段正实性能分析

由于奇异摄动系统的慢系统(2)只对低频信号敏感，对高频信号不敏感，因此本文只在低频段研究其正实性是合理的，并且根据假设 1，所定义的问题在低频段也是适定的. 假设研究的频段限定在频域段 X_l 内，即 $\omega \in X_l := \{\omega \in \mathbf{R}, 且 |\omega| \leqslant \omega_l\}$.

定理 1 假设系统(2)和标量 $\omega_l > 0$ 给定并且假设系统矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 在虚轴上没有极点，且已知对称矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_l = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，则下面的 2 种描述是等价的：

ⅰ) 系统(2)是有限频段正实的，即在 $\omega \in X_l$ 内正实；

ⅱ) 存在对称矩阵 $\boldsymbol{P}_l$ 和 $\boldsymbol{Q}_l > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{Q}_l & \boldsymbol{P}_l \\ \boldsymbol{P}_l & \omega_l^2 \boldsymbol{Q}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\Theta}_l < 0.$$

证明 若系统(2)在 $\omega \in X_l$ 内正实,由定义1知,即要求当 $\omega \in X_l$ 时,有 $\boldsymbol{G}_s(j\omega)+\boldsymbol{G}_s(j\omega)^* < 0$ 成立,此时要求 $\boldsymbol{G}_s(s)$ 在右平面解析,且没有极点,而 $\boldsymbol{G}_s(j\omega)+\boldsymbol{G}_s(j\omega)^* < 0$ 等价于下式成立: $\begin{bmatrix}(j\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}\boldsymbol{B}_0\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}^* \boldsymbol{\Theta}_l \begin{bmatrix}(j\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}\boldsymbol{B}_0\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix} < 0$. 下面由文献[15]的定理1即可证明本定理的结论.

同理,由于奇异摄动系统的快系统(3)只对高频信号敏感,对低频信号不敏感,因此只在高频段研究其正实性是合理的,并且根据假设1,所定义的问题在高频段也是适定的. 假设研究的频段限定在频域段 Γ_h 内,即 $\omega \in \Gamma_h := \{\omega \in \mathbf{R}, 且\ |\omega| \geqslant \omega_h\}$.

定理2 假设系统(3)和标量 $\omega_h > 0$ 给定并且假设系统矩阵 $\boldsymbol{A}_{22}$ 在虚轴上没有极点,且已知对称矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_h = -\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, 则下面的2种描述是等价的:

ⅰ) 系统(3)是有限频段正实的,即在 $\omega \in \Gamma_h$ 内正实;

ⅱ) 存在对称矩阵 $\boldsymbol{P}_h$ 和 $\boldsymbol{Q}_h > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{I}_{n_2} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_h & \boldsymbol{P}_h\\ \boldsymbol{P}_h & -\omega_h^2\boldsymbol{Q}_h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{I}_{n_2} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\boldsymbol{\Theta}_h < 0.$$

证明 定理2是定理1的直接推论,这其中需要用到文献[15]中的频域转换技巧. 在此略去.

下面将由奇异摄动系统低阶子系统的正实性近似构成全阶的奇异摄动的正实性. 本节将证明奇异摄动系统的有限频段正实性将由它的低阶子系统来决定,并且会证明本节的结论将是文献[16]结论的进一步推广.

引理3[17] 假设给定实标量 ω_1,ω_2,适当维数的实矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 和对称矩阵 $\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$. 假设 $\tau = +1$ 或者 -1,并且定义

$$\Omega := \{\omega \in \mathbf{R} \mid \tau(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2) \leqslant 0\}, \tag{6}$$

且假设 Ω 有一个非空的内点. 考虑系统(1)(当 $\varepsilon = 1$),则下面的描述是等价的:

ⅰ) 频域矩阵不等式 $\begin{bmatrix}(jw\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Pi}\begin{bmatrix}(jw\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix} \leqslant 0$ 对所有的 $\omega \in \Omega$ 成立,且使得 $\det(jw\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \neq 0$;

ⅱ) 时域不等式

$$\int_0^\infty \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}\mathrm{d}t \leqslant 0 \tag{7}$$

对所有的 $u \in L_2$ 成立,且使得

$$\int_0^\infty \tau(\omega_1\boldsymbol{x}+j\dot{\boldsymbol{x}})(\omega_2\boldsymbol{x}+j\dot{\boldsymbol{x}})^*\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

下面给出本文的主要结论.

定理3 如果低频近似传递函数 $\boldsymbol{G}_s(s)$ 在 X_l 内是正实的,而高频传递函数 $\boldsymbol{G}_f(p)$ 在 Γ_h 内是正实的,则对充分小的 ε_0,当 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 时,双频标传递函数 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 在 Λ 内是正实的,其中 $\Lambda = \{\omega \in \mathbf{R}, |\omega \geqslant \omega_h 或 \omega \leqslant \omega_l\}$.

证明 根据引理3的 ⅰ),对系统(1),要想证明 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 在 Λ 是正实的,只需要证明 $\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{u}\rangle \geqslant 0$ 对所有的 $\boldsymbol{u} \in L_2$ 成立,且使得

$$\int_0^\infty \tau(\omega_l\boldsymbol{x}+j\dot{\boldsymbol{x}})(\omega_h\boldsymbol{x}+j\dot{\boldsymbol{x}})^*\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

令

$$S = \int_0^\infty (\omega_l\boldsymbol{x}+j\dot{\boldsymbol{x}})(\omega_h\boldsymbol{x}+j\dot{\boldsymbol{x}})^*\mathrm{d}t,$$

则根据 Parseval 定理有

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega_l-\omega)(\omega_h-\omega)\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}^*\mathrm{d}\omega,$$

这里 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是状态变量 $\boldsymbol{x}$ 的傅里叶变换,则有 $\tau S \leqslant 0$.

下面只需证明 $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{y}\rangle \geqslant 0$ 对所有的 $u \in L_2$ 成立即可. 令

$$\lambda = \lim_{\varepsilon\to+0}\inf_{\omega\in\Lambda}\lambda_{\min}[\boldsymbol{G}(j\omega,\varepsilon)+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(-j\omega,\varepsilon)], \tag{8}$$

$$\lambda_s = \inf_{\omega\in[0,\omega_l)}\lambda_{\min}[\boldsymbol{G}_s(j\omega)+\boldsymbol{G}_s^{\mathrm{T}}(-j\omega)], \tag{9}$$

$$\lambda_f = \lim_{\varepsilon\to+0}\inf_{\omega\geqslant\omega_h}\lambda_{\min}[\boldsymbol{G}_s(\varepsilon j\omega)+\boldsymbol{G}_s^{\mathrm{T}}(-\varepsilon j\omega)], \tag{10}$$

此处 $\lambda_{\min}$ 指的是最小奇异值. 由下确界的性质知道

$$\lambda = \min\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\inf\limits_{\omega\in[0,\omega_l)}[\boldsymbol{G}(j\omega,\varepsilon)+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(-j\omega,\varepsilon)],\\ \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\inf\limits_{\omega\geqslant\omega_h}[\boldsymbol{G}(j\omega,\varepsilon)+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(-j\omega,\varepsilon)]\end{matrix}\right\},$$

即 $\lambda = \min\{\lambda_s,\lambda_f\}$. 由 $\boldsymbol{G}_s(s)$ 在 X_l 内是正实的,而 $\boldsymbol{G}_f(p)$ 在 Γ_h 内是正实的,知 $\lambda_s > 0, \lambda_f > 0$,因而 $\lambda > 0$,由(8)知,存在一个 $\varepsilon_0 > 0$ 和标量 $v > 0$,使得当 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$,

$$\inf_{\omega\in\Lambda}\lambda_{\min}[\boldsymbol{G}(j\omega,\varepsilon)+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(-j\omega,\varepsilon)] > 2v. \tag{11}$$

另一方面,由(11)和 Parseval 定理知:

$$\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{u}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{u}'(-j\omega)\boldsymbol{y}(j\omega)\mathrm{d}\omega =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{u}}'(-j\omega)[\boldsymbol{G}(\varepsilon,j\omega)+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\varepsilon,-j\omega)]\hat{\boldsymbol{u}}(j\omega)\mathrm{d}\omega \geqslant$$

$$\frac{v}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{\boldsymbol{u}}(j\omega)\|^2\mathrm{d}\omega = v\|\boldsymbol{u}\|_2^2 \geqslant 0.$$

即证.

3 奇异摄动系统有限频段界实定理

将引理 2 的结论直接应用于奇异摄动系统的慢、快子系统分别得到如下结论:

定理 4 给定集合 $W=\{\omega\in\mathbf{R}:|\omega|\leqslant\bar{\varepsilon}_l\}$,对于低频传递函数 $\boldsymbol{G}(s)$,其有形如(2)的最小实现,若 $\det(j\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)\neq 0(\forall\omega\in W)$,则窗口 H_∞ 范数 $\|\boldsymbol{G}(s)\|_\infty^W=\|\boldsymbol{C}_0(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{D}_0\|<\gamma$ 的充要条件为:存在实对称矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,满足 $\boldsymbol{Q}>0$,且

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P} & \bar{\varepsilon}_l^2\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{D}_0\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}_0\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}-\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0. \tag{12}$$

证明 定理 4 是引理 2 的直接结论,在此略去.

定理 5 给定集合 $W=\{\omega\in\mathbf{R}:|\omega|\geqslant\bar{\varepsilon}_h\}$,对于高频传递函数 $\boldsymbol{G}_f(p)$,其有形如(3)的最小实现,若 $\det(j\varepsilon\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22})\neq 0(\forall\omega\in W)$,则窗口 H_∞ 范数 $\|\boldsymbol{G}_f(p)\|_\infty^W=\|\boldsymbol{C}_2(p\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22})^{-1}\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{D}\|<\gamma$ 的充要条件为:存在实对称矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,满足 $\boldsymbol{Q}>0$,且

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P} & -\bar{\varepsilon}_h^2\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0. \tag{13}$$

证明 定理 5 是引理 2 的直接结论,在此略去.

定理 6 如果 $\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 有有限频段界实的快、慢传递函数 $\boldsymbol{G}_s(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_f(p)$ 且其最小实现分别为(2)、(3),并且满足(12)、(13),则对于足够小的 ε,$\boldsymbol{G}(s,\varepsilon)$ 是有限频段界实传递函数, 即全阶系统(1)是有限频段界实的.

4 应用举例:两频域尺度平衡模型降阶

本节将研究奇异摄动系统的平衡截断. 给出一个双频域尺度的平衡实现,即仅在高频段和低频段保持平衡性,从而在设计的时候能够在低频段、高频段依次设计;同时,如果主要考虑降阶的复杂性和系统的高维度,此种设计方法同样能大大降低保守性. 事实上,一个理想的模型降阶模型应该具有如下 2 个特征:1)能够在感兴趣的频段保留系统的相关特性;2)根据设计需要能够保留系统响应的性能和结构.

定理 7 如果 $\hat{\boldsymbol{B}}_s=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_0 & \hat{\boldsymbol{B}}_0\\ \hat{\boldsymbol{C}}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}_0\end{bmatrix}$ 和 $\hat{\boldsymbol{B}}_f=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_{22} & \hat{\boldsymbol{B}}_2\\ \hat{\boldsymbol{C}}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$ 分别是 $\boldsymbol{G}_s(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_f(p)$ 的正实平衡截断,其中 $\hat{\boldsymbol{B}}_s$、$\hat{\boldsymbol{B}}_f$ 可以从文献[2]的相关算法得到,则

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_0 & \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{B}}_0\\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{A}}_{22}/\varepsilon & \hat{\boldsymbol{B}}_2/\varepsilon\\ \hat{\boldsymbol{C}}_0^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{C}}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$$

是两频标的平衡实现且是正实的.

注 1 定理 7 给出的是一个两频标的平衡实现,即该实现只在低频和高频处保持平衡性,而一个平衡两频标实现指的是在全频段保持平衡性.

注 2 虽然定理 7 给出的平衡实现形式与文献[16]类似,但其结果是有着本质区别的. 本文在得到低频段的平衡实现时,根据定理 1 的结果,只在系统低频区域内考虑,区别于文献[16]的全频考虑;同理,在考虑高频段的平衡实现也一样. 这样带来的好处是,在设计的时候只需要考虑所关心的频段.

5 结论

本文结合奇异摄动系统自身特性和工程实际,提出了有限频段的概念,并根据广义 KYP 引理,分别以线性矩阵不等式形式给出了奇异摄动系统有限频段正实和界实的充要条件. 最后的应用实例表明,在特定的问题下,应用有限频段界实和正实定理能够得到更好的设计效果.

参考文献
References

[1] Anderson B D O, Vongpanitlerd S. Network analysis and synthesis: A modern systems theory approach[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973

[2] Yang H J, Xia Y Q. Low frequency positive real control for delta operator systems[J]. Automatica, 2012, 48(8): 1791-1795

[3] Chen X, Wen J T. Model reduction of positive real systems[C]// Proc of ACC, 1994, 3: 3423-3427

[4] Covacic M R, Teixeira M C M, Assuno E, et al. LMI-based algorithm for strictly positive real systems with static output feedback[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(4): 521-527

[5] Lee J I, Ha I J. Autopilot design for highly maneuvering STT missiles via singular perturbation-like technique[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1999, 7(5): 527-541

[6] Ding L, Feng Y, Mei P, et al. Robust control for fast sampling discrete-time fuzzy singularly perturbed systems[J]. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2010, 6(5): 2263-2274

[7] 刘永强,严正,倪以信,等. 双时间尺度电力系统动态模型降阶研究Ⅰ:电力系统奇异摄动模型[J]. 电力系统自动化, 2002, 26(18): 1-5

LIU Yongqing,YAN Zheng,NI Yixin,et al. Study on the order reduction of two-time scale power system dynamic models Ⅰ:Power system singular perturbation model [J]. Automation of Electric Power Systems, 2002, 26 (18):1-5
[8] 钟宁帆,邹云.奇异摄动系统正实性能分析[J].南京理工大学学报:自然科学版,2008,32(3):265-268
ZHONG Ningfan,ZOU Yun. Positive realness of singularly perturbed systems[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology:Nature Science,2008,32(3):265-268
[9] Iwasaki T, Hara S, Yamauchi H. Dynamical system design from a control perspective:Finite frequency positive-realness approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2003,48(8):1337-1354
[10] Luse D W,Khail H K. Frequency domain results for systems with slow and fast dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1985,30(12):1171-1179
[11] Khalil H K. Output feedback control of linear two-time-scale systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1987,32(9):784-792
[12] Luse D W, Ball J A. Frequency-scale decomposition of H_∞ disk problems[J]. SIAM Journal of Control Optimal, 1989,27(4):814-835
[13] Luse D W. State-space realization of multiple-frequency-scale transfer matrices[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1988,33(2):185-187
[14] 马国梁,陈庆伟,胡维礼.基于窗口 H_∞ 范数的 PID 控制器优化设计[J]. 自动化学报, 2007, 33(9): 1000-1003
MA Guoliang,CHEN Qingwei,HU Weili. Optimal design of PID controller based on window H_∞ norm[J]. Acta Autamatica Sinica,2007,33(9):1000-1003
[15] Iwasaki T,Hara S. Generalized KYP lemma:Unified frequency domain inequalities with design applications[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2005,50(1):41-59
[16] Oloomi H M. Two frequency scale decomposition of positive real and bounded real transfer matrices[C]//Proc of ACC,1995,6:3999-4003
[17] Iwasaki T,Hara S,Fradkov A L. Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi) finite ranges[J]. Systems & Control Letters,2005,54(7):681-691

Positive realness lemma and bounded realness lemma for singularly perturbed systems within a finite frequency band

MEI Ping[1] FU Jingzhi[1] ZANG Qiang[1]
1 School of Control & Information,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract Based on the generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma,the positive realness and bound realness lemma for singularly perturbed system in a finite frequency band is studied. It is shown that the positive real property of the full-order system can be deduced from the positive real property of its slow and fast subsystems. The same has been shown for the bounded real property. As an application,a model reduction design scheme is given which is balanced at the low and fast frequency respectively.

Key words singularly perturbed systems;positive realness;bounded realness;finite frequency band;Generalized Kalman-Yakubovich-Popov (GKYP) lemma