文章编号:1674-7070(2013)02-0184-04

带马氏利率风险模型的破产概率

胡荣华[1]　李志民[1]

摘要

为了更好地研究利率因素对破产概率的影响,考虑利率为马氏链的离散时间风险模型,运用归纳法和鞅方法给出有限时间和最终时间破产概率的递归方程和最终破产概率的上界表达式,数值模拟结果表明鞅方法和递归法所得上界优于伦德伯格(Lundberg)上界.

关键词

离散风险模型;马尔可夫链;破产概率;鞅

中图分类号 O211.6
文献标志码 A

收稿日期 2011-09-02
资助项目 安徽省自然科学基金(10040606Q-03);安徽工程大学引进人才科研启动基金(2009YQQ005)

作者简介

胡荣华,男,硕士生,研究方向为风险理论和经济统计.312479884@qq.com

李志民(通信作者),男,博士,副教授,主要研究随机过程及其应用.zmli08@ahpu.edu.cn

1 安徽工程大学 应用数理学院,芜湖,241000

0 引言

破产概率作为衡量保险公司稳健性的重要指标,是风险管理的一个重要工具.但事实上,破产概率并不能真正表示保险公司即将倒闭的概率.从某种程度上说,破产概率只是一个数学概念而已,破产概率高意味着保险公司不稳定,这时保险人必须采取提高保费、进行再保险以转移风险或者设法吸收一些额外的资本金等措施.因此,准确地计算或估计保险公司的破产概率是十分重要的课题.

在经典风险模型理论开创后,人们从不同角度对模型进行了推广,其中在模型中引入随机利率更是风险研究的一个热点.Yang[1]在模型中考虑了利率是常数的情形,而Cai[2]讨论了利率为独立同分布的情况,Cai[3]在接下来又考虑了利率符合一个AR(1)相关模型的情形,Tang等[4]给出了有限时刻破产概率的渐近公式,De Vylder等[5]利用鞅方法求一个新的更新风险模型的破产概率上界.

国内一些学者同样做了很多研究.林庆敏等[6]通过对引入息力的风险模型的研究,得到了描述破产前瞬时盈余和破产时赤字分布的递推算法,并且给出积分方程,李娜芝等[7]考虑一类保费和理赔额均为随机变量,且利率为马氏链的离散时间风险模型,推出了有限时间和最终时间破产概率的递归方程,并用归纳法得到了最终时间破产概率的上界表达式.

本文在文献[7]的模型结构基础上,考虑利率的影响且保费收取在第 n 期初始的情形,记

$$U_k = (U_{k-1} + X_k)(1 + I_k) - Y_k,\quad k = 1,2,\cdots. \tag{1}$$

其中 $U_0 = u \geqslant 0$,是一个常数,U_k 是一个盈余过程,$\{X_k, k = 1,2\cdots\}$ 为独立同分布随机变量序列,分布函数为 $F(x) = P(X \leqslant x)$,$\{Y_k, k = 1,2\cdots\}$ 为独立同分布随机变量序列,分布函数为 $H(y) = P(Y \leqslant y)$.$\{I_k, k = 1,2\cdots\}$,$\{X_k, k = 1,2\cdots\}$ 和 $\{Y_k, k = 1,2\cdots\}$ 互相独立.定义 X_k 为 k 时刻的保费收入,Y_k 是 k 时刻的索赔额,I_k 为 k 时刻的利率.

由(1)易得如下等价公式:

$$U_k = u\prod_{j=1}^{k}(1 + I_j) + \sum_{j=1}^{k}\left[(X_j(1 + I_j) - Y_j)\prod_{t=j+1}^{k}(1 + I_t)\right],\quad k = 1,2,\cdots. \tag{2}$$

为便于处理,规定当 $a > b$ 时,有 $\prod_{t=a}^{b} x_t = 1$,$\sum_{t=a}^{b} x_t = 0$.

假设利率 $\{I_k, k = 1,2\cdots\}$ 服从齐次马尔可夫链,状态空间 $I =$

$\{i_0,i_1,\cdots,i_N\}$,它的转移概率定义为

$$P\{I_{k+1}=i_t \mid I_k=i_s\}=p_{st},\quad s,t=0,1,\cdots,N \tag{3}$$

且满足 $\sum_{t=0}^{N} p_{st}=1$.

记 $\psi_n(u,i_s)=P\{\cup_{j=1}^{n}(U_j<0)\mid I_0=i_s\}$ 和 $\psi(u,i_s)=P\{\cup_{j=1}^{\infty}(U_j<0)\mid I_0=i_s\}$ 分别表示有限时间破产概率和最终破产概率,显然有 $\psi_1(u,i_s)\leqslant\psi_2(u,i_s)\leqslant\cdots$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(u,i_s)=\psi(u,i_s). \tag{4}$$

1 主要结论及证明

引理1 破产概率的递归方程:

$$\begin{cases}\psi_{n+1}(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}p_{st}\int_0^{\infty}\Big\{\overline{H}((u+x)(1+i_t))+\\ \quad\int_0^{(u+x)(1+i_t)}\psi_n((u+x)(1+i_t)-y,i_t)\mathrm{d}H(x)\Big\}\mathrm{d}F(x),\\ \psi_1(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}p_{st}\int_0^{\infty}\overline{H}((u+x)(1+i_t))\mathrm{d}F(x),\\ \psi(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}p_{st}\int_0^{\infty}\Big\{\overline{H}((u+x)(1+i_t))+\\ \quad\int_0^{(u+x)(1+i_t)}\psi((u+x)(1+i_t)-y,i_t)\mathrm{d}H(x)\Big\}\mathrm{d}F(x).\end{cases}$$

证明与文献[7]类似,这里就不再给出. 与文献[2]类似的方法,有下面引理.

引理2 若 $E(Y_1-X_1(1+I_1))<0$,则存在一个常数 $R>0$ 使得

$$E[\mathrm{e}^{R(Y_1-X_1(1+I_1))}]=1. \tag{5}$$

定理1 在引理2的条件下,对于任意 $u\geqslant0$ 有

$$\psi(u,i_s)\leqslant\beta\mathrm{e}^{-Ru}. \tag{6}$$

其中 $\beta^{-1}=\inf_{t\geqslant0}\dfrac{\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{Ry}\mathrm{d}H(y)}{\mathrm{e}^{Rt}\overline{H}(t)}$ 且 $0\leqslant\beta\leqslant1$.

证明 对任意 $x\geqslant0$,有

$$\overline{H}(x)=\left(\frac{\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{Ry}\mathrm{d}H(y)}{\mathrm{e}^{Rx}\overline{H}(x)}\right)^{-1}\mathrm{e}^{-Rx}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{Ry}\mathrm{d}H(y)\leqslant$$
$$\beta\mathrm{e}^{-Rx}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{Ry}\mathrm{d}H(y)\leqslant\beta\mathrm{e}^{-Rx}E(\mathrm{e}^{RY_1}). \tag{7}$$

由引理1和式(6),对任意 $u\geqslant0,i_s\geqslant0$ 有

$$\psi_1(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}p_{st}\int_0^{\infty}\overline{H}((u+x)(1+i_t))\mathrm{d}F(x)\leqslant$$
$$\beta\sum_{t=0}^{N}p_{st}E(\mathrm{e}^{RY_1})\mathrm{e}^{-R(u+x)(1+i_t)}\leqslant$$
$$\beta E(\mathrm{e}^{RY_1})E[\mathrm{e}^{-R(u+X_1)(1+I_1)}\mid I_0=i_s]. \tag{8}$$

用归纳法证明,假设 $u\geqslant0$,有

$$\psi_n(u,i_s)\leqslant\beta E(\mathrm{e}^{RY_1})E[\mathrm{e}^{-R(u+X_1)(1+I_1)}\mid I_0=i_s] \tag{9}$$

和下面不等式,

$$\psi_n((u+x)(1+i_t)-y,i_t)\leqslant$$
$$\beta E(\mathrm{e}^{RY_1})E[\mathrm{e}^{-R((u+x)(1+i_t)-y+X_1)(1+I_1)}\mid I_0=i_s]=$$
$$\beta E[\mathrm{e}^{-R((u+x)(1+i_t)-y)(1+I_1)}\mid I_0=i_s]\cdot1\leqslant$$
$$\beta E[\mathrm{e}^{-R((u+x)(1+i_t)-y)}].$$

$$\psi_{n+1}(u,i_s)\leqslant$$
$$\sum_{t=0}^{N}p_{st}\int_0^{\infty}\Big\{\beta E[\mathrm{e}^{-R(u+x)(1+i_t)}]\int_{(u+x)(1+i_t)}^{\infty}\mathrm{d}H(y)+$$
$$\int_0^{(u+x)(1+i_t)}\beta E[\mathrm{e}^{-R((u+x)(1+i_t)-y)}]\mathrm{d}H(y)\Big\}\mathrm{d}F(x)=$$
$$\sum_{t=0}^{N}p_{st}\int_0^{\infty}\Big\{\beta E[\mathrm{e}^{-R(u+x)(1+i_t)}]\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{Ry}\mathrm{d}H(y)\Big\}\mathrm{d}F(x)\leqslant$$
$$\beta E(\mathrm{e}^{RY_1})E[\mathrm{e}^{-R(u+X_1)(1+I_1)}\mid I_0=i_s]=$$
$$\beta E[\mathrm{e}^{-Ru(1+I_1)}\mid I_0=i_s]\leqslant\beta\mathrm{e}^{-Ru}.$$

上述结果表明求出的破产概率优于 Lundberg 上界,下面运用鞅的方法推导破产概率的上界. 首先,给出式(2)的折现风险过程 $\{D_k,k=1,2,\cdots\}$,它满足下面等式:

$$\psi_n(u,i_s)=P\{\cup_{j=1}^{n}(U_j<0)\mid I_0=i_s\}=$$
$$P\{\cup_{j=1}^{n}(D_j<0)\mid I_0=i_s\}.$$

其中 $D_k=U_k\prod_{j=1}^{k}(1+I_j)^{-1},\quad k=1,2,\cdots$.

在经典风险模型中,$\{\mathrm{e}^{-RU_k},k=1,2,\cdots\}$ 是鞅,而式(2)中找不到一个正常数 r 使得其是个鞅. 利用 Cai 等[8] 的方法可以证明存在一个正常数 r 使得 $\{\mathrm{e}^{-rD_k},k=1,2,\cdots\}$ 是个上鞅,从而可以根据最优停时定理推导出破产概率.

引理3 假设 $E(Y_1-X_1(1+I_1))<0$,存在 $\rho_s>0$ 使得下面等式成立:

$$E[\mathrm{e}^{\rho_s(Y_1-X_1(1+I_1))(1+I_1)^{-1}}\mid I_0=i_s]=1,\quad s=1,2,\cdots,N. \tag{10}$$

对所有 s,有 $E[\mathrm{e}^{r(Y_1-X_1(1+I_1))(1+I_1)^{-1}}\mid I_0=i_s]\leqslant1$,其中 $r=\min_{0\leqslant s\leqslant N}\{\rho_s\}\geqslant R$.

证明与文献[8]类似.

定理2 在引理3假设条件下,有

$$\psi(u,i_s)\leqslant\mathrm{e}^{-ru},\quad u\geqslant0. \tag{11}$$

证明 由式(2)知,$D_k=U_k\prod_{j=1}^{k}(1+I_j)^{-1}=u+\sum_{j=1}^{k}\Big[(X_j(1+I_j)-Y_j)\prod_{t=1}^{j}(1+I_t)^{-1}\Big]$ 且 $S_n=\mathrm{e}^{-rD_k}$,那么 $S_{n+1}=S_n\mathrm{e}^{-r[X_{n+1}(1+I_{n+1})-Y_{n+1})]\prod_{t=1}^{n+1}(1+I_t)^{-1}}$,记 $\mathscr{F}_n=$

$\sigma(X_j,Y_j,I_j,j\leqslant n)$,表示随机变量$\{X_j,Y_j,I_j\}_{j\leqslant n}$生成的$\sigma$域,因此当$n\geqslant 1$,

$$E(S_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)=$$
$$S_nE\left(\mathrm{e}^{-r(X_{n+1}(1+I_{n+1})-Y_{n+1})\prod_{t=1}^{n+1}(1+I_t)^{-1}}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right)=$$
$$S_nE\left(\mathrm{e}^{-r(X_{n+1}(1+I_{n+1})-Y_{n+1})(1+I_{n+1})^{-1}\prod_{t=1}^{n}(1+I_t)^{-1}}\,\middle|\,I_1,I_2,\cdots,I_n\right)\leqslant$$
$$S_nE\left(\mathrm{e}^{-r(X_{n+1}(1+I_{n+1})-Y_{n+1})(1+I_{n+1})^{-1}}\,\middle|\,I_1,I_2,\cdots,I_n\right)^{\prod_{t=1}^{n}(1+I_t)^{-1}}\leqslant$$
$$S_nE\left(\mathrm{e}^{-r(X_{n+1}(1+I_{n+1})-Y_{n+1})(1+I_{n+1})^{-1}}\,\middle|\,I_n\right)^{\prod_{t=1}^{n}(1+I_t)^{-1}}=$$
$$S_nE\left(\mathrm{e}^{r(Y_{n+1}-X_{n+1}(1+I_{n+1}))(1+I_{n+1})^{-1}}\,\middle|\,I_n\right)^{\prod_{t=1}^{n}(1+I_t)^{-1}}\leqslant S_n.$$

这表明$\{S_n,n=1,2,\cdots\}$是一个上鞅,令$T_s=\min\{n:D_n<0\mid I_0=i_s\}$,$T_s$是个停时且$n\wedge T_s=\min(n,T_s)$是有限停时.由上鞅的最优停时定理可得,$E(S_{n\wedge T_s})\leqslant E(S_0)=\mathrm{e}^{-ru}$.因此

$$\mathrm{e}^{-ru}\geqslant E(S_{n\wedge T_s})\geqslant$$
$$E(S_{n\wedge T_s}I(T_s<n))=E(S_{T_s}I(T_s<n))=$$
$$E(\mathrm{e}^{-rD_{T_s}}I(T_s<n))\geqslant E(I(T_s<n))=\psi_n(u,i_s).$$

令$n\to\infty$时,有$\psi(u,i_s)\leqslant\mathrm{e}^{-ru}$成立.

2 数值模拟

运用Matlab模拟定理1和定理2给出的破产概率上界以及Lundberg界.

假定X_n,Y_n服从参数分别为$\lambda=0.5,\lambda=1$的指数分布,且考虑3种可能的利率,状态空间为$I=\{6\%,8\%,10\%\}$, 概率转移矩阵为$\begin{pmatrix}0.6&0.3&0.1\\0.15&0.7&0.15\\0.1&0.3&0.6\end{pmatrix}$.模型中取利率为6%的情形,由式(5)很容易得到$R=0.528\,3$.假定指数分布是递减失效率DFR[9](Decreasing Failure Rate),DFR⊂NWUC,因此H服从按凸序新劣于旧NWUC[9](New Worse than Used in Convex ordering)的寿命分布,故$\beta^{-1}=E[\mathrm{e}^{RY_1}]=\frac{1}{1-R}$,即$\beta=1-R$.所以可以得出定理1中的结果,例如:

$$\psi(u,i_s)\leqslant$$
$$(1-R)[0.15\mathrm{e}^{-1.06Ru}+0.7\mathrm{e}^{-1.08Ru}+0.15\mathrm{e}^{-1.1Ru}].\quad(12)$$

与此类似,可以得到引理3中的$r=0.569\,65$,获得ρ_s的解.下面给出一种情形,由式(10)得

$$1=\frac{1}{2\rho_1+1}\left[0.15M\left(\frac{\rho_1}{1.06}\right)+0.7M\left(\frac{\rho_1}{1.08}\right)+0.15M\left(\frac{\rho_1}{1.1}\right)\right].\quad(13)$$

已知Lundberg上界是e^{-Ru}.设定0—9个单位量的初始资产,利用Matlab得出一组破产概率的数据,如表1.

表1 不同方法的上界

Table 1 Upper bounds of different approaches

初始资产	Lundberg法	鞅方法	递归法
0	1.000 0	1.000 0	0.471 7
1	0.589 6	0.565 7	0.266 6
2	0.347 6	0.320 0	0.150 7
3	0.205 0	0.181 1	0.085 2
4	0.120 9	0.102 4	0.048 2
5	0.071 3	0.057 9	0.027 2
6	0.042 0	0.032 8	0.015 4
7	0.024 8	0.018 5	0.008 7
8	0.014 6	0.010 5	0.004 9
9	0.008 6	0.005 9	0.002 8

利用Matlab绘制出破产概率的对比(图1).

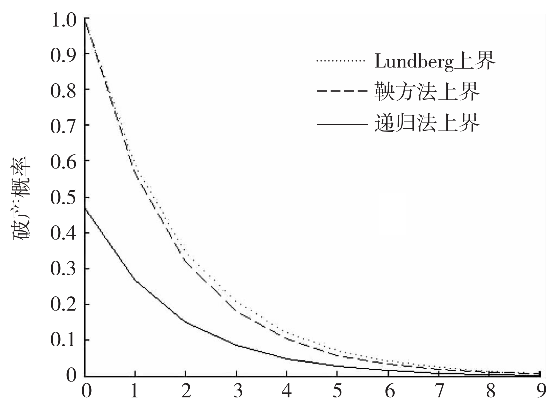

图1 3种模型在不同初始资产下的破产概率

Fig.1 Ruin probability of three models under different initial assets

从表1中可以由数据对比得出Lundberg上界最大,鞅方法上界其次,递归法上界最小.图1直观地显示了它们的关系.所以,以上结果符合预期.

参考文献

References

[1] Yang H L. Non-exponential bounds for ruin probabilitiy

with interest effect included[J]. Scandinavian Actuarial Journal,1999(1):66-79
[2] Cai J. Discrete time risk models under rates of interest [J]. Probability in the Engineering and Informational Sciences,2002,16(3):309-324
[3] Cai J. Ruin probabilities with dependent rates of interest [J]. Journal of Applied Probability, 2002, 39 (2): 312-323
[4] Tang Q H,Tsitsiashvili G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks[J]. Stochastic Processes and their Applications,2003,108(2):299-325
[5] de Vylder F,Goovaerts M J. Upper bounds for ruin probabilities in a new general risk model by the martingales method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,1982,2(8):121-126
[6] 林庆敏,汪荣明. 带息力的更新风险模型下的破产概率的计算[J]. 华东师范大学学报:自然科学版,2005,2005(1):46-52
LIN Qingmin, WANG Rongming. Calculation of ruin probabiliyies under a renewal risk model with interest force[J]. Journal of East China Normal University:Natural Science,2005,2005(1):46-52
[7] Li N Z,Liu Q P. Ruin probabilities for discrete time risk models with Markov interest rates[J]. Mathematical Theory and Applications,2009,29(4):6-9
[8] Cai J,Dickson D C M. Ruin probabilities with a Markov chain interest model[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2004,35(3):513-525
[9] 崔家峰. NWUC 寿命分布类及其一类应用[J]. 天津科技大学学报,2007,22(2):66-71
CUI Jiafeng. Application of the NWUC class of life distributions[J]. Journal of Tianjin University of Science & Technology,2007,22(2):66-71

Ruin probabilities for risk models with Markov interest rates

HU Ronghua[1] LI Zhimin[1]
1 School of Mathematics and Physics,Anhui Polytechnic University,Wuhu 241000

Abstract In order to study the effects of the factors like interest rate on the ruin probability,we consider a discrete time risk model with Markov chain as interest rates. Recursive and integral equations for ruin probability of finite and ultimate time are given,and upper bounds for ruin probability of ultimate time are obtained by inductive and martingale approaches. Numerical simulation shows that upper bounds for inductive and martingale are better than that of Lundberg.

Key words discrete time risk model;Markov chain;ruin probability;martingale