文章编号:1674-7070(2013)02-0171-07

基于灰区间真值的群体决策方法及应用

巩在武[1,2]　郭崇兰[1]　周显信[3]

摘要

研究了灰区间偏好的群体决策问题.在专家灰区间偏好群体意见集结过程中,常规的灰区间运算会产生决策信息的失真.为了避免这一缺陷,首先引入了灰区间调节参数的概念,通过建立求解调节参数的二次规划模型,确定专家灰区间判断的真值.建立了专家客观权重求解的二次规划模型,并给出了专家客观权重的最优解.此外,从另外一个角度同时考虑调节参数与客观权重,建立求解灰区间真值与专家客观权重的群体最优决策模型.气象敏感性行业专家群体评估决策的算例表明,决策策略是有效的.

关键词

群决策;灰区间;真值;二次规划;气象敏感性行业

中图分类号 C934;O223
文献标志码 A

收稿日期 2012-02-13
资助项目 国家自然科学基金(70901043,71171115);教育部人文社科基金(09YJC630130);江苏省研究生培养创新工程(CXLX12_0511);江苏省高校哲学社会科学研究基金(2012SJD630037)

作者简介

巩在武,男,博士,副教授,研究方向为灰色系统理论等.zwgong26@163.com

1 南京信息工程大学 经济管理学院,南京,210044
2 南京信息工程大学 应用气象学院,南京,210044
3 南京信息工程大学 公共管理学院,南京,210044

0 引言

在实际决策中,存在着大量的不精确与不确定性问题.决策信息的不完备性与决策问题的复杂性使得专家无法给出精确的判断值.为了使决策更有把握性,一方面,专家用判断信息的区间范围来表达对决策问题的看法,即区间的下限表现为决策者的最保守判断,区间的上限表现为决策者的最乐观判断,这个判断实质上是一个“外延明确,内涵模糊”的灰区间[1-3];另一方面,群体决策能够有效地解决个体判断的局限性.通过集结群决策中个体偏好为群体偏好,可以有效降低个体判断的偏差,并提高决策准确性.基于灰区间的群决策理论研究是灰色决策理论的重要组成部分.文献[4]研究了基于多元灰区间偏好信息的群体决策方法,文献[5]基于灰色系统理论的思想和方法,探讨了方案指标值为区间灰数且灰数取值可能性最大数已知的决策问题,文献[6]提出了灰色多指标群决策问题的特征向量方法,文献[7]针对方案偏好和属性值均为区间数的多属性群决策问题,研究了群体专家权重的确定,并提出了一种新的群决策方法,文献[8]对风险型动态混合多属性决策进行了研究,提出了灰色矩阵关联度法.

在灰区间群体决策中,专家群体判断信息在集结过程中常常会涉及灰区间运算问题.常规的灰区间加法与乘法运算会随着计算过程的增加而产生逐级放大或者缩小,导致决策误差的增大甚至决策结论的错误.为了减少或者避免决策误差,有些学者采用灰关联度方法进行决策[9].本文从灰区间(数)本身的内涵出发,通过寻求灰判断区间的最优真值,即通过优化方法求出专家判断的确定值,然后利用主观权重或者优化方法求出决策专家的客观权重,以线性加权的形式进行决策.最后,将用一个气象敏感性行业评估的算例说明本文所给方法的可行性.

1 相关概念与主要定理

设群决策问题中,决策专家集为 s_i,专家 s_i 的权重为 $\omega_i, i \in \mathbf{N} = \{1,2,\cdots,n\}$.为了对决策问题更有把握,专家用灰区间 $\otimes\mu_i = [\mu_{il}, \mu_{iu}]$ 来表达对决策属性(指标)的判断.不失一般性,这里假设决策属性值越大越好.由于专家给出的决策判断值为一个不确定的区间,同时,灰区间在加法与乘法运算过程中,会产生数据的放大(缩小),从

而给专家群体决策带来一定的困难,甚至带来决策结果的失真. 因此,确定灰区间的真值对于正确决策非常关键. 这里引入一个变量 $d_i = \mu_{iu} - \mu_{il}$,并令 $\otimes\mu_i = \mu_{il} + \alpha_i d_i$,其中 $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$. 对任意的 $i \in \mathbf{N}$,若 $\alpha_i = 1$,则 $\otimes\mu_i = \mu_{iu}$;若 $\alpha_i = 0$,则 $\otimes\mu_i = \mu_{il}$;若 $0 < \alpha_i < 1$,则 $\mu_{il} < \otimes\mu_i < \mu_{iu}$. $\alpha_i, i \in \mathbf{N}$ 实际上可以看作是一个调节参数,α_i 越大,决策者的判断越接近于灰区间 $[\mu_{il}, \mu_{iu}]$ 的右端点;α_i 越小,决策者的判断越接近于灰区间 $[\mu_{il}, \mu_{iu}]$ 的左端点. 如果 $\alpha_i, i \in \mathbf{N}$ 的值确知,则 $\otimes\mu_i = \mu_{il} + \alpha_i d_i$ 为一个确定的值. 因此,本文称 $\otimes\mu_i = \mu_{il} + \alpha_i d_i$ 为灰区间 $[\mu_{il}, \mu_{iu}]$ 的真值. 确定该真值的关键是求出 $\alpha_i, i \in \mathbf{N}$ 的值,不妨定义 α_i 为调节参数.

在专家群体决策中,由于情趣、爱好以及认识能力之间的差异,不同决策者给出的决策判断值会存在差异. 因此,决策群体往往试图通过减少彼此之间的差异,寻求整体最优决策. 因此,本文通过最小化专家个体加权判断之间的差异,建立群体最优决策模型,从而确定灰区间 $[\mu_{il}, \mu_{iu}]$ 的真值,进而进行决策. 在本部分内容中,需要解决两个问题,一个是确定调节参数 $\alpha_i, i \in \mathbf{N}$,另外一个是确定专家权重 ω_i, $i \in \mathbf{N}$.

1.1 调节参数的确定

在有些情形下可以对专家权重进行主观赋权,有些情形下专家权重是未知的,需要用客观方法求出. 专家的客观权重求法将在下节给出,本节中,首先假定所有专家权重是已知的.

1) 情形 1. 决策专家的权重分布不同

群体决策中,希望任意两个专家判断之间的差异越小越好. 即对任意的 $i, j \in \mathbf{N}$,$(\omega_i \times \otimes\mu_i - \omega_j \times \otimes\mu_j)^2 = [\omega_i(\mu_{il} + \alpha_i d_i) - \omega_j(\mu_{jl} + \alpha_j d_j)]^2$ 越小越好. 因此,构造最优决策模型 1.

模型 1

$$S(\alpha) = \min \sum_{i<j}^{n} [\omega_i(\mu_{il} + \alpha_i d_i) - \omega_j(\mu_{jl} + \alpha_j d_j)]^2,$$
$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

模型 1 等价于模型 1′:

$$S(\boldsymbol{\alpha}) = \min \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha} \geqslant 0. \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2(n-1)d_1^2\omega_1^2 & -2d_1d_2w_1w_2 & \cdots & -2d_1d_nw_1w_n \\ -2d_2d_1w_2w_1 & 2(n-1)d_2^2\omega_2^2 & \cdots & -2d_2d_nw_2w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2d_nd_1w_nw_1 & -2d_nd_2w_nw_2 & \cdots & 2(n-1)d_n^2\omega_n^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2(n-1)d_1\mu_{1l}\omega_1^2 - 2\sum_{i=2}^{n}\omega_i\mu_i d_1\omega_1 \\ 2(n-1)d_2\mu_{2l}\omega_2^2 - 2\sum_{i=1,i\neq 2}^{n}\omega_i\mu_i d_2\omega_2 \\ \vdots \\ 2(n-1)d_n\mu_{nl}\omega_n^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\mu_i d_n\omega_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

下面讨论模型 1′的解的情况. 由于模型 1′的约束条件(4)是有界的,因此,模型 1′的可行域是凸集.

定理 1 模型 1 的可行域为凸集. 令

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} d_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2\omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n\omega_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 2(n-1) & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & 2(n-1) & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & 2(n-1) \end{pmatrix},$$

则矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可以写成 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\delta}$ 的形式. 又因为矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 为半正定矩阵,因此矩阵 $\boldsymbol{H}$ 也是半正定的.

从而可知,模型 1′为凸二次规划问题. 考虑如下两个引理:

引理 1[10] 凸二次规划问题的局部极小点必为全局最小点.

引理 2[10] 凸二次规划问题的可行点 α^* 满足 Kuhn-Tucker 条件(即该点为 K-T 点),则 α^* 必为一极小点.

构造 Lagrangian 函数

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}. \tag{3}$$

模型 1′的 Kuhn-Tucker 条件构造如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{H\alpha}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\eta}=0,\\ \quad\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0,\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0,\boldsymbol{\eta}\geqslant 0,\boldsymbol{y}\geqslant 0,\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0,\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$ 为 Lagrangian 乘子,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 为松弛变量. 这里把满足式(4) 的解称为互补基本可行解,显然,这个解构成模型 1′的 K-T 点. 由于模型 1′为凸二次规划问题,因此,若式(4)存在互补基本可行解,则由引理 2,该解即为模型 1′的最优解.

定理 2 若式(4)存在 K-T 点,则模型 1′ 存在最优解.

式(4)可简记为

$$\begin{cases}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{MZ}=\boldsymbol{q}, & \boldsymbol{W}\geqslant 0,\boldsymbol{Z}\geqslant 0,\\ \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}=0, & \boldsymbol{W}\geqslant 0,\boldsymbol{Z}\geqslant 0,\end{cases}\tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix},\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix},\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix},\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}$.

由定理 2,如果式(4)或(5)的解存在,即模型 1′的 K-T 点存在,则可求模型 1′的最优解. 式(4)或(5)可用著名的 Lemke 方法[10]求解:在 Lemke 算法中,若算法终止于一个 K-T 点,此时得到二次规划问题的最优解;若算法终止于半射线,则二次规划问题无可行解或有无界解.

Lemke 算法首先考虑向量 $\boldsymbol{q}$. 若 $\boldsymbol{q}\geqslant 0$,则 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{q},\boldsymbol{Z}=0$ 即为(5) 的解. 若存在一个 $q_i\geqslant 0$,则可以首先引入一个人工变量 W_0,满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{MZ}-W_0\boldsymbol{e}=\boldsymbol{q}, & \boldsymbol{W}\geqslant 0,\boldsymbol{Z}\geqslant 0,\\ \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}=0, & \boldsymbol{W}\geqslant 0,\boldsymbol{Z}\geqslant 0,\end{cases}\tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$. 显然,若 $W_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{q}\geqslant 0$,则 $\boldsymbol{W}=W_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{q}\geqslant 0,\boldsymbol{Z}=0$ 和 $W_0=W_0$即为式(6) 的一组解. 式(6) 中,若$(\boldsymbol{W},\boldsymbol{Z},W_0)$ 满足 $W_0=0$,则$(\boldsymbol{W},\boldsymbol{Z})$ 即为式(4) 或(5) 的解,也就是模型 1 的最优解. 因此,取 $W_0=\max\{-q_i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}$,$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{q}+W_0\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{Z}=0$ 为式(6)的初始互补基本可行解. 类似于线性规划求解方法,选择进基/离基变量,通过旋转得到互补基本可行解,如此继续,最终得到 $W_0=0$ 的互补基本可行解(如果存在的话).

2) 情形 2. 决策专家的权重分布相同

由模型 1,令各专家权重为 1,可得等权力分布下的最优决策模型.

模型 2

$$F_1(\boldsymbol{\alpha})=\min\sum_{i<j}^{n}[(\mu_i+\alpha_i d_i)-(\mu_j+\alpha_j d_j)]^2,$$

$$0\leqslant\alpha_i\leqslant 1,\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{7}$$

模型 2 等价于 模型 2′:

$$F_1(\boldsymbol{\alpha})=\min\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{A\alpha}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0,\tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}2(n-1)d_1^2 & -2d_1d_2 & \cdots & -2d_1d_n\\ -2d_2d_1 & 2(n-1)d_2^2 & \cdots & -2d_2d_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -2d_nd_1 & -2d_nd_2 & \cdots & 2(n-1)d_n^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_1=\left(2(n-1)\mu_1-\sum_{i=2}^{n}\mu_i\ \cdots\ 2(n-1)\mu_n-\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

显然,模型 2 仍为凸二次规划问题,是模型 1 的特殊形式. 因此,模型 2 的最优解求解方式与模型 1 完全相同.

1.2 专家权重的确定

专家客观权重的确定,需要综合考虑专家的灰区间判断. 即既要考虑专家判断的最低可能值(左区间 μ_{il}),又要考虑专家判断的最高可能值(右区间 μ_{iu}). 为了寻求最优决策,本文通过最小化专家个体加权左区间判断之间的差异以及专家个体加权右区间判断之间的差异,建立群体最优决策模型,从而确定专家的客观权重 $\omega_i,i\in\mathbf{N}$.

模型 3

$$S_2(\boldsymbol{\omega})=\min\sum_{i<j}^{n}[(\omega_i\mu_{il}-\omega_j\mu_{jl})^2+(\omega_i\mu_{iu}-\omega_j\mu_{ju})^2],\tag{9}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1,\\ \omega_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{10}$$

构造 Lagrangian 函数

$$L(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i<j}^{n}[(\omega_i\mu_{il}-\omega_j\mu_{jl})^2+(\omega_i\mu_{iu}-\omega_j\mu_{ju})^2]-2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i-1\right).\tag{11}$$

令 $\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0$. 则

$$2(n-1)(\mu_{il}^2+\mu_{iu}^2)\omega_i - 2\sum_{i<j}(\mu_{il}\mu_{jl}+\mu_{iu}\mu_{ju})\omega_j - 2\lambda = 0. \tag{12}$$

式(12)等价于如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{G\omega} = \boldsymbol{\lambda e}. \tag{13}$$

这里

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} (n-1)(\mu_{1l}^2+\mu_{1u}^2) & \cdots & -\mu_{1l}\mu_{nl}-\mu_{1u}\mu_{nu} \\ \vdots & & \vdots \\ -\mu_{nl}\mu_{1l}-\mu_{nu}\mu_{1u} & \cdots & (n-1)(\mu_{nl}^2+\mu_{nu}^2) \end{pmatrix}.$$

由于等式(9)等价于 $S_2(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G\omega}$, 其中 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$. 因此,对于任意的 $\boldsymbol{\omega} \geqslant 0$, 有 $S_2(\boldsymbol{\omega}) > 0$. 因此,矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为正定矩阵. 显然,G 是可逆的. 于是,等式(13) 可以写成

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\lambda G}^{-1}\boldsymbol{e}. \tag{14}$$

又因为 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n = 1$, 可得

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \frac{1}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{e}}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \frac{\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{e}}. \tag{16}$$

重新考虑矩阵 $\boldsymbol{G}$,事实上 $\boldsymbol{G}$ 是一个 $\boldsymbol{M}$- 矩阵. 根据 $\boldsymbol{M}$- 矩阵的性质,$\boldsymbol{G}^{-1}$ 为非负矩阵. 因此可得,$\boldsymbol{\omega}^* > 0$. 从而 $\boldsymbol{\omega}^* = \frac{\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{e}}$ 为模型 3 的最优解.

定理 3 模型 3 存在最优解,其最优解为

$$\boldsymbol{\omega}^* = \frac{\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{e}}.$$

1.3 调节参数与专家客观权重之间的关系

1.1 节与 1.2 节实际上是专家决策的两个重要过程:确定专家的权重,主观权重通过经验获得、客观权重通过模型 3 得到;确定灰区间判断 $[\mu_{il}, \mu_{iu}]$ 的真值,先利用模型 1 确定调节参数 α_i,再计算真值 $\mu_{il}+\alpha_i d_i$. 下面再考虑另外一种更一般的情形:专家权重 ω_i 与调节参数 $\alpha_i, i \in \mathbf{N}$ 同时未知. 首先建立专家加权评价值之间的差异目标函数 $[\omega_i(\mu_{il}+\alpha_i d_i) - \omega_j(\mu_{jl}+\alpha_j d_j)]^2$. 同时,目标函数中还考虑到专家判断的初始值的重要性,即引入专家加权左区间判断之间的差异目标函数 $(\omega_i\mu_{il} - \omega_j\mu_{jl})^2$. 构造最优决策模型如下:

模型 4

$$S_3(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) = \min\Big\{\sum_{i<j}^{n}(\omega_i\mu_{il} - \omega_j\mu_{jl})^2 + \sum_{i<j}^{n}[\omega_i(\mu_{il}+\alpha_i d_i) - \omega_j(\mu_{jl}+\alpha_j d_j)]^2\Big\}, \tag{17}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n = 1, \\ \omega_i \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad i \in \mathbf{N}.\end{cases} \tag{18}$$

首先将 $\alpha_i, i \in \mathbf{N}$ 看作为已知.

构造 Lagrangian 函数

$$L(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}) = \sum_{i<j}^{n}(\omega_i\mu_{il} - \omega_j\mu_{jl})^2 + [\omega_i(\mu_{il}+\alpha_i d_i) - \omega_j(\mu_{jl}+\alpha_j d_j)]^2 - 2\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}\omega_i - 1\Big). \tag{19}$$

令 $\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0$. 则

$$2\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(\mu_{il}+\alpha_i d_i)[(\mu_{il}+\alpha_i d_i)\omega_i - (\mu_{jl}+\alpha_j d_j)\omega_j] + 2\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\mu_{il}(\mu_{il}\omega_i - \mu_{jl}\omega_j) - 2\lambda = 0, \tag{20}$$

即

$$(n-1)[(\mu_{il}+\alpha_i d_i)^2+\mu_{il}^2]\omega_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n}[(\mu_{il}+\alpha_i d_i)(\mu_{jl}+\alpha_j d_j)+\mu_{il}\mu_{jl}]\omega_j - 2\lambda = 0. \tag{21}$$

式(21)等价于如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\lambda e}. \tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{pmatrix} (n-1)(r_1^2+\mu_{1l}^2) & -r_1r_2-\mu_{1l}\mu_{2l} & \cdots & -r_1r_n-\mu_{1l}\mu_{nl} \\ -r_2r_1-\mu_{2l}\mu_{1l} & (n-1)(r_2^2+\mu_{2l}^2) & \cdots & -r_2r_n-\mu_{2l}\mu_{nl} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -r_nr_1-\mu_{nl}\mu_{1l} & -r_nr_2-\mu_{nl}\mu_{2l} & \cdots & (n-1)(r_n^2+\mu_{nl}^2) \end{pmatrix},$$

$r_i = (\mu_{il}+\alpha_i d_i), \quad i \in \mathbf{N}, \quad \boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$.

由式(17)等价于

$$S_3(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{\omega}. \tag{23}$$

可知 $S_3(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) > 0, \forall \omega \geqslant 0$, 从而 $\boldsymbol{G}_1$ 是正定因而是可逆的. 类似于模型 3,可以求得

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \frac{1}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{-1}\boldsymbol{e}}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \frac{\boldsymbol{G}_1^{-1}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{-1}\boldsymbol{e}}. \tag{25}$$

式(29)实质是给出了调节参数 α_i 与专家客观权重 $\omega_i, i \in \mathbf{N}$ 之间的关系,并非模型 4 的最优解. 因此,需要设计它们之间的迭代算法或用 Matlab 等优化软件求出调节参数 α_i 与专家客观权重 ω_i 的值.

2 算例分析

例 1 行业气象服务效益评估是中国气象局开展的一项新业务. 评估过程中需要了解主要气象因

子（气温、降水）对国民经济行业的敏感性，从中选出气象高敏感性行业，进行行业气象效益评估．为此，气象局聘请1个行业专家（D_1）、2个气象专家（D_2,D_3）、与1个经济专家（D_4）构成专家组，对涉及国民经济的4个重要行业（农业x_1、商业x_2、交通运输业x_3与工业x_4）进行评价，构造评价矩阵（表1）．4个专家的主观权重分别为0.2，0.3，0.4，0.1．

在3种不同的气象条件下，求出各专家针对各行业的最优评价值（真值）如表2．

针对各行业的气象敏感度，专家总体评价值如表3所示．

因此，可以得出气温敏感性行业排序为商业＞农业＞工业＞交通运输业；降水敏感性行业排序为农业＞商业＞交通运输业＞工业；气压敏感性行业排序为商业＞农业＞交通运输业＞工业，其中符号"＞"表示"优于"．

下面以工业对温度的敏感性专家最优评价为例说明表2的计算过程．

设专家D_i，$i=1,2,3,4$针对工业的温度敏感性评价值为$0.5+0.2\alpha_1$，$0.7+0.2\alpha_2$，$0.6+0.3\alpha_3$，$0.7+0.1\alpha_4$．最小化加权专家评价值之间的差距，构造最优决策模型如下：

表3 各行业气象敏感度

Table 3 Meteorological sensitivities of different industries

气象条件	农业	商业	交通	工业
气温	0.74	0.86	0.66	0.67
降水	0.78	0.77	0.74	0.58
气压	0.58	0.62	0.39	0.30

$$S(\alpha)=(0.2\times(0.5+0.2\alpha_1)-0.3\times(0.7+0.2\alpha_2))^2+(0.2\times(0.5+0.2\alpha_1)-0.4\times(0.6+0.3\alpha_3))^2+(0.2\times(0.5+0.2\alpha_1)-0.1\times(0.7+0.1\alpha_4))^2+(0.3\times(0.7+0.2\alpha_2)-0.4\times(0.6+0.3\alpha_3))^2+(0.3\times(0.7+0.2\alpha_2)-0.1\times(0.7+0.1\alpha_4))^2+(0.4\times(0.6+0.3\alpha_3)-0.1\times(0.7+0.1\alpha_4))^2,$$

$$0\leqslant\alpha_i\leqslant1,\quad i=1,2,3,4.$$

上述模型等价于

$$S(\boldsymbol{\alpha})=\min\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\begin{pmatrix}-0.0176\\0.0264\\0.0816\\-0.0068\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha},$$

$$0\leqslant\alpha_i\leqslant1,\quad i=1,2,3,4.\tag{26}$$

其中

表1 针对气象条件的各专家对各行业的评价矩阵

Table 1 Appraisal matrix of different experts with regard to different industries based on meteorological conditions

气象条件	农业				商业			
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_1	D_2	D_3	D_4
气温	[0.8,0.8]	[0.7,0.8]	[0.7,0.8]	[0.8,0.9]	[0.7,0.9]	[0.9,0.9]	[0.8,0.9]	[0.7,0.9]
降水	[0.7,0.9]	[0.8,0.9]	[0.7,0.9]	[0.6,0.8]	[0.7,0.8]	[0.7,0.8]	[0.8,0.9]	[0.6,0.8]
气压	[0.6,0.7]	[0.5,0.8]	[0.6,0.9]	[0.3,0.5]	[0.6,0.7]	[0.6,0.7]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]

气象条件	交通运输				工业			
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_1	D_2	D_3	D_4
气温	[0.5,0.7]	[0.6,0.8]	[0.7,0.9]	[0.5,0.6]	[0.5,0.7]	[0.7,0.9]	[0.6,0.9]	[0.7,0.8]
降水	[0.7,0.8]	[0.6,0.9]	[0.8,0.9]	[0.6,0.8]	[0.4,0.6]	[0.5,0.6]	[0.6,0.8]	[0.5,0.7]
气压	[0.3,0.4]	[0.4,0.5]	[0.4,0.5]	[0.3,0.5]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]	[0.3,0.5]	[0.2,0.3]

表2 针对气象条件的各专家对各行业的最优评价值

Table 2 Optimum appraisal values of different experts with regard to different industries based on meteorological conditions

气象条件	农业				商业				交通运输				工业			
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_1	D_2	D_3	D_4	D_1	D_2	D_3	D4	D_1	D_2	D_3	D_4
气温	0.8	0.7	0.7	0.9	0.9	0.9	0.8	0.9	0.7	0.6	0.7	0.6	0.7	0.7	0.6	0.8
降水	0.9	0.8	0.7	0.8	0.8	0.7	0.8	0.8	0.8	0.6	0.8	0.8	0.6	0.5	0.6	0.7
气压	0.7	0.5	0.6	0.5	0.7	0.7	0.5	0.8	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.3	0.3	0.3

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.0096 & -0.0048 & -0.0096 & -0.0008 \\ -0.0048 & 0.0216 & -0.0144 & -0.0012 \\ -0.0096 & -0.0144 & 0.0864 & -0.0024 \\ -0.0008 & -0.0012 & -0.0024 & 0.0006 \end{pmatrix},$$

模型 K-T 条件为

$$\boldsymbol{W}-\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -0.0176 \\ 0.0264 \\ 0.0816 \\ -0.0068 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}\geqslant 0,\boldsymbol{Z}\geqslant 0,$$

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}=0,$$

其中,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,

$$\boldsymbol{Z}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{W}=(y_1,y_2,y_3,y_4,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{\mathrm{T}}.$$

利用 Lemke 算法,可得二次规划问题的最优解为

$$\boldsymbol{Z}=(0.0088,0,0,0.007,1,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{W}=(0,1,1,0,0,0.0204,0.0696,0)^{\mathrm{T}}.$$

因此,各专家针对工业的温度敏感性最优评价值为 0.7,0.7,0.6,0.8,专家组总体评价值为 $0.2\times0.7+0.3\times0.7+0.4\times0.6+0.1\times0.8=0.67$.

3 结束语

在灰区间的群体判断决策问题中,需要解决两个关键问题,一个是确定灰区间的真值,另外一个是确定决策专家的客观权重.针对这两个关键问题,本文采取了两种策略.

1)通过最小化专家个体加权判断之间的差异,建立群体最优二次规划决策模型,并给出了该模型求解的 Lemke 算法,从而确定专家判断灰区间的真值;针对决策专家的客观权重(主观权重可以直接给出),同样通过最小化专家个体加权左区间判断之间的差异以及专家个体加权右区间判断之间的差异,建立群体最优最小二乘决策模型,并给出了专家的客观权重的最优解.

2)同时考虑灰调节参数与客观权重,建立专家加权评价值之间的差异目标函数以及专家加权左区间判断之间的差异目标函数,建立专家群体最优决策模型.

此外,本文通过气象敏感性行业专家群体评估决策的例子来说明第一种决策策略的有效性.需要指出的是,后一种决策策略在最优解求解上存在一定的困难,这也是下一步需要展开的研究内容.

参考文献
References

[1] Deng J L. Introduction to grey system theory[J]. The Journal of Grey System,1989,1(1):1-24

[2] Liu S F,Lin Y. An introduction to grey systems:Foundations,methodology and application[M]. Slippery rock:IIGSS Academic Publisher,1998:40-77

[3] 肖新平,宋中民,李峰.灰技术基础及其应用[M].北京:科学出版社,2005
XIAO Xinping,SONG Zhongmin,LI Feng. Basis of grey technology and its application[M]. Beijing:Science Press,2005

[4] 罗党.三参数区间灰数信息下的决策方法[J].系统工程理论与实践,2009,29(1):124-130
LUO Dang. Decision-making methods with three-parameter interval grey number[J]. Systems Engineering Theory & Practice,2009,29(1):124-130

[5] 罗党.灰色决策问题的特征向量方法[J].系统工程理论与实践,2005,25(4):67-71
LUO Dang. An eigenvector method for grey decision-making[J]. Systems Engineering Theory & Practice,2005,25(4):67-71

[6] 万树平.区间型多属性群体专家权重的确定方法[J].应用数学与计算数学学报,2008,22(2):109-116
WAN Shuping. Method of determining experts weights for interval multi-attribute group decision-making[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation,2008,22(2):109-116

[7] 饶从军,肖新平.风险型动态混合多属性决策的灰矩阵关联度法[J].系统工程与电子技术,2006,28(9):1353-1357
RAO Congjun,XIAO Xinping. Method of grey matrix relative degree for dynamic hybrid multi-attribute decision making under risk[J]. Systems Engineering and Electronics,2006,28(9):1353-1357

[8] 陈孝新,刘思峰.一种部分权重信息的灰色多属性群决策方法[J].系统工程与电子技术,2009,31(4):843-846
CHEN Xiaoxin,LIU Sifeng. Grey multiple attribute group decision-making method with partial weight information[J]. Systems Engineering and Electronics,2009,31(4):843-846

[9] 门可佩,唐沙沙,赵凯,等.江苏经济增长质量和效益评价模型与实证分析[J].南京信息工程大学学报:自然科学版,2011,3(6):550-555
MEN Kepei,TANG Shasha,ZHAO Kai,et al. Evaluation model and empirical analysis on the economic growth quality and efficiency of Jiangsu province[J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology:Natural Science Edition,2011,3(6):550-555

[10] 施光燕，董加礼. 最优化方法[M]. 北京：高等教育出版社，1999
SHI Guangyan，DONG Jiali. Optimization method[M]. Beijing：Higher Education Press，1999

Group decision making based on true value for grey intervals

GONG Zaiwu[1,2] GUO Chonglan[1] ZHOU Xianxin[3]

1 School of Economics and Management，Nanjing University of Information Science & Technology，Nanjing 210044

2 School of Applied Meteorology，Nanjing University of Information Science & Technology，Nanjing 210044

3 School of Public Administration，Nanjing University of Information Science & Technology，Nanjing 210044

Abstract The group decision making method based on grey interval preference is investigated. When aggregating the interval preferences of group decision making，the range of interval may be gradually exaggerated with the increase of number of arithmetic computational steps. To avoid this kind of defect，we introduce the definition of adjustment parameter for grey interval. In order to determine the true value of grey interval preference，we develop a quadratic programming method to get the adjustment parameter. We establish a quadratic programming model for objective weight of decision maker，and give the optimal solution of this model. In addition，we construct an optimal model with the adjustment parameter and objective weight combined. We illustrate the feasibility and effectiveness of our proposed methods with numerical example for selecting industries with higher meteorological sensitivity.

Key words group decision making；grey interval；true value；quadratic programming；industries with higher meteorological sensitivity