

WENO 格式与虚拟单元浸入边界法 在笛卡尔网格中的应用

李自启¹ 朱君¹

摘要

高精度有限差分 WENO 格式在结构网格上处理具有复杂几何外形绕流问题时较困难,而虚拟单元浸入边界法却是一种较新颖且对网格的要求较低的方法,适用于复杂几何外形边界的处理.为此,在笛卡尔网格上采用 WENO 格式以求解 Euler 守恒律方程,试图将两者有效结合起来,希望能在笛卡尔网格上处理具有复杂几何外形的物体绕流问题.最后,几个经典数值算例的结果验证了该方法的有效性.

关键词

WENO 格式;虚拟单元浸入边界法;笛卡尔网格

中图分类号 V211.3

文献标志码 A

收稿日期 2012-09-10

资助项目 国家自然科学基金(11002071)

作者简介

李自启,男,硕士生,研究方向为偏微分方程数值解.530371451@qq.com

朱君(通信作者),男,博士,副教授,研究方向为偏微分方程数值解.zhujun@nuaa.edu.cn

¹ 南京航空航天大学 理学院,南京,210016

0 引言

在流体力学数值方法的研究中,高精度格式的构造和应用一直受到人们的重视. Harten 等^[1]提出的 ENO 格式具有在间断区域分辨率高,在光滑区域计算精度高等优点. 1994 年, Liu 等^[2]提出了一种 WENO 格式. 在此基础上,文献[3-5]提出了新的 WENO 格式,使格式在光滑区域截断误差更小,在间断区域仍能保持很好的分辨率.

计算流体力学中一个持续的困难是复杂几何外形的网格生成问题. 现存的流场网格生成方法主要包括非结构网格、贴体网格和笛卡尔网格等方法. 笛卡尔网格相对于贴体网格、非结构网格来说,具有网格生成简单的优势,故本文所有算例均在笛卡尔网格上进行计算. 但此网格一般不适合直接应用于计算具有复杂几何外形的物体绕流问题(飞行器气动外形设计问题)和运动物体绕流问题(昆虫扑翼,鱼在水中游动等仿生学问题).

最近, Dadone 等^[6-8]系统研究了结构网格中的 Ghost Cell 方法,并把将之命名为 ST (Symmetry Technique) 方法以及 CCST (Curvature Corrected Symmetry Technique) 方法,这些有效的边界处理方法被推广用于笛卡尔网格^[9-10],并取名为 GBCM (Ghost Body-Cell Method) 方法. 在文献[9]中,此类方法也被用于二维非结构网格,能得到较好的结果. 此外, Forrer 等^[10-11]提出了一种新的虚拟单元浸入边界方法求解二维静止与运动物体绕流问题.

本文试图将 ST 方法, GBCM 方法与高精度有限差分 WENO 格式相结合,在笛卡尔网格上对多个复杂物体绕流问题进行数值模拟. 多个算例的计算结果表明本文所使用的方法具有一定效果,且易于实现.

1 WENO 格式构造

本文仅研究无粘可压流体,考虑二维欧拉方程:

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0, \quad (1)$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix},$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2).$$

1.1 WENO 格式^[4]构造

首先,考虑一维 Euler 守恒律方程:

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (2)$$

假设网格点 $\{x_i\}$ 是等距分布的,即有

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = (x_{i+1} + x_i)/2.$$

定义 $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, 设 k 为时间步长, $t^{n+1} = t^n + k$, $u_i^n = u(x_i, t^n)$ 代表点值, 在下文为方便将其

简记为 u_i , $\bar{u}_i^n = \frac{1}{h} \int_{I_i} u(x, t^n) dx$, 将式(2) 在区域 $I_i \times [t^n, t^{n+1}]$ 上积分, 得

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{1}{h} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right]. \quad (3)$$

这在单元平均值与点值之间建立起一个关系, 本文将利用这一点来得到 WENO 格式. 具体构造步骤如下.

第 1 步. 给出 3 个小模板 $S_j, I_i \in S_j (j = 0, 1, 2)$. 其中 $S_0 = \{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i\}, S_1 = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}, S_2 = \{I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$.

定义 $T = \cup_{j=0}^2 S_j$ 为模板集.

第 2 步. 在每个小模板 S_j 上定义多项式 $p_j(x)$, 要求满足以下条件(以 S_0 为例):

$$\frac{1}{h} \int_{I_{i+k}} p_0(x) dx = \bar{u}_{i+k} (k = -2, -1, 0). \quad (4)$$

同样, 在模板集 T 上有 4 次多项式 $Q(x)$ 存在, 且满足

$$\frac{1}{h} \int_{I_{i+k}} Q(x) dx = \bar{u}_{i+k} (k = -2, -1, 0, 1, 2). \quad (5)$$

具体构造详见文献[4].

第 3 步. 计算小模板 S_j 在 I_i 端点处线性权 $\gamma_j^\pm (j = 0, 1, 2)$:

$$Q(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=0}^2 \gamma_j^- p_j(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad (6)$$

$$Q(x_{i-\frac{1}{2}}) = \sum_{j=0}^2 \gamma_j^+ p_j(x_{i-\frac{1}{2}}). \quad (7)$$

线性权的确定依赖于网格的几何分布, 与 u 在模板上的取值无关.

$$p_j(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^2 a_{jk} \bar{u}_{i+k-5} (j = 0, 1, 2), \quad (8)$$

其中 a_{jk} 取法详见文献[4].

第 4 步. 计算小模板 S_j 上的光滑指示器^[4]:

$$\beta_j = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{I_j} h^{2l-1} \left(\frac{d^l}{dx^l} p_j(x) \right)^2 dx (j = 0, 1, 2). \quad (9)$$

由光滑指示器和线性权可得非线性权, 具体可参考文献^[4].

第 5 步. 得到半离散格式:

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = L(u_i). \quad (10)$$

第 6 步. 使用三阶 TVD Runge-Kutta 时间离散公式^[4]:

$$\begin{cases} u_i^{(1)} = u_i^n + \Delta t L(u_i^n), \\ u_i^{(2)} = \frac{3}{4} u_i^n + \frac{1}{4} u_i^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u_i^{(1)}), \\ u_i^{(n+1)} = \frac{1}{3} u_i^n + \frac{2}{3} u_i^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u_i^{(2)}). \end{cases} \quad (11)$$

2 Ghost Cell 方法

利用笛卡尔网格, 物体与网格相交, 如图 1 所示. 本文使用 Ghost Cell 方法需要给出浸入边界 (Immersed Boundary) 内部网格点处的物理量, 比如点 A 处的值. 最直接最简单的方法就是使用一般的对称反射边界条件 (ST):

$$\begin{cases} \rho_A = \rho_B, \\ p_A = p_B, \\ \vec{v}_A = \vec{v}_B - 2(\vec{v}_B \cdot \vec{n}) \vec{n}. \end{cases} \quad (12)$$

这样给出的边界条件能够满足无穿透边界条件 $\vec{v}_{\text{wall}} \cdot \vec{n} = 0$. Forrer 等^[10] 对于浸入固体内部的 Ghost Cell 值建议速度仍然使用一般的反射, 而压强和密度使用如下公式:

$$\begin{cases} p_A = p(x_w) + |x_w - x_A| \frac{p(x_w) - p(x_w^h)}{h}, \\ \rho_A = \rho(x_w) + |x_w - x_A| \frac{\rho(x_w) - \rho(x_w^h)}{h}. \end{cases} \quad (13)$$

这里 $x_w^h = x_w + h\vec{n}$, 墙压强 $p(x_w)$ 以及 $p(x_w^h)$ 通过线性或双线性插值得到. 本文称此方法为 FGCM (Forrer's Ghost Cell Method).

文献[6-8]系统地给出了一个新颖的 Ghost Cell 方法 (GBCM) 处理笛卡尔网格下的静止物体. 其中, Ghost Cell 物理量在墙附近通过一个法向假想的具有局部对称分布的熵 (S) 与总焓 (H) 涡流场来得到, 这种流体模型满足如下法向动量方程:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{(\bar{u})^2}{R}. \quad (14)$$

这里 R 是带符号的局部曲率半径, 如果曲率中心在物体内部就为正, 反之则为负. \bar{u} 是切向速度, 满足

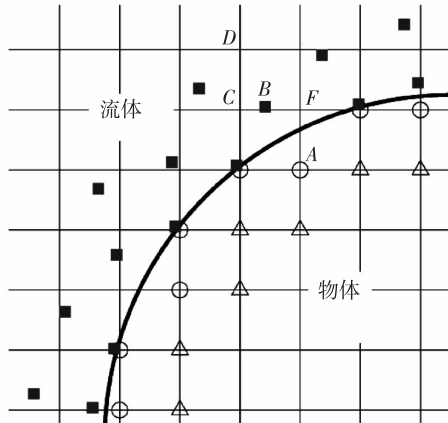


图1 笛卡尔网格
Fig.1 Cartesian mesh

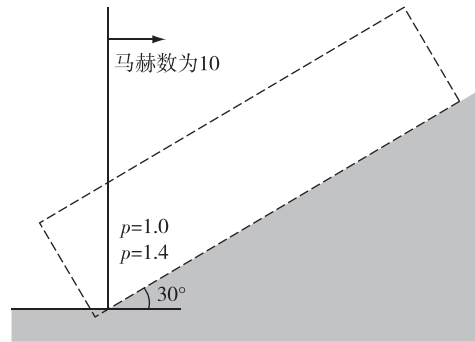


图2 初始斜坡
Fig.2 Initial figure of slope

无穿透边界条件 $\vec{v}_{\text{wall}} \cdot \vec{n} = 0$, 此外沿着物体的表面法向强加反对称的熵与总焓的法向导数 $\frac{\partial S}{\partial n}, \frac{\partial H}{\partial n}$. 这种熵与总焓分布使得当流动是无旋时, 产生零法向导数, 甚至在墙壁出现涡时也能满足 Crocco 关系. 如图 1 所示, 对于二维问题, 采用如下边界条件:

$$\begin{cases} p_A = p_B - \rho_B (\tilde{u}_B^2 / R) \Delta n, \\ \rho_A = \rho_B \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{1/\gamma}, \\ \tilde{u}_A^2 = \tilde{u}_B^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_B}{\rho_B} - \frac{p_A}{\rho_A} \right), \\ \tilde{v}_A = -\tilde{v}_B, \end{cases} \quad (15)$$

这里 \tilde{u}, \tilde{v} 分别指切向与法向速度分量. Dadone 等^[6-8] 比较了 GBCM 方法与贴体网格下的 CCST 方法以及二阶压力外插 (P-II) 方法, 得出 GBCM 方法具有和贴体网格中 CCST 相同的解精度, 而且要比 P-II 方法具有更好的收敛精度. 在数值计算中, Ghost Cell 中心 A 所对应的法向对称点 B 变量的值可以通过一般插值得到.

3 数值结果

算例 1 斜面双马赫反射问题. 该问题描述的是一个强激波入射在与平面成 30° 角的斜坡上后发生的变化, 来流是马赫数为 10 的强激波, 如图 2 所示. 计算区域取 $[0, 3] \times [0, 2]$, 始于 $x = \sqrt{3}/12$, 激波垂直 x 轴. 初始数据的左右状态为 $\mathbf{u}_L = (8, 66.009, 0, 563.544)^T$, $\mathbf{u}_R = (1.4, 0, 0, 2.5)^T$. 边界条件处理为左右边界分别取左右状态值. 当 $x > \sqrt{3}/12$ 时下边界为反射边界, $x \leq \sqrt{3}/12$ 时, 下边界设

为左状态; 当 $x > g(t)$ 时, 上边界取右状态, $x \leq g(t)$ 时, 上边界取左状态. 其中 $g(t) = \sqrt{3}/12 + 10t$. 为便于与水平的密度进行比较, 把坐标轴旋转 30° . 图 3a 是用 ST 方法求出的斜面双马赫密度等值线, 图 3b 和图 3c 是用不同方法求斜面双马赫经过坐标轴旋转得到的图形. 图 3 中 30 条密度等值线的取值范围为 1.5 ~ 21.5, 网格长度为 1/200.

算例 2 台阶问题. 该问题是 Emery 于 1968 年提出的一个用于检验非线性双曲型守恒律格式的经典算例. 初始数据为管道内充满均匀流 $(\rho, u, v, p)^T = (1.4, 3, 0, 1)^T$, 管道区域为 $[0, 3] \times [0, 1]$, 在距左边界 0.6 处有一高度为 0.2 的台阶, 且台阶沿伸到管道的尽头. 上下边界为反射边界, 左边界与初始一致, 右边界为出流边界, 如图 4 所示. 图 5 给出了用不同方法求出的前台阶密度等值线, 取 30 条密度等值线, 取值范围是 0.32 ~ 6.75, 网格长度为 1/100.

算例 3 NACA0012 翼型跨声速绕流问题. $Ma_\infty = 0.85$, 攻角 $\alpha = 1.0^\circ$. 图 6 和图 7 分别给出了来流马赫数与表面压力系数. 其中, 30 条马赫数等值线的取值范围是网格长度为 1/100.

4 结论

本文使用的有限差分 WENO 格式较适合计算含有强间断或含复杂光滑解结构的问题, 能在光滑区域保持时空一致高阶精度. 对于计算具有复杂几何外形的物体绕流问题, 贴体网格和非结构网格的生成较为困难, 且其能用的高精度计算格式较难构造. 为此, 本文采用虚拟单元浸入边界处理方法使在笛卡尔网格上对上述问题的高精度数值模拟成为可能. 本文将此两种方法结合在一起并进行了相应的数值试验, 得到了较好的数值结果.

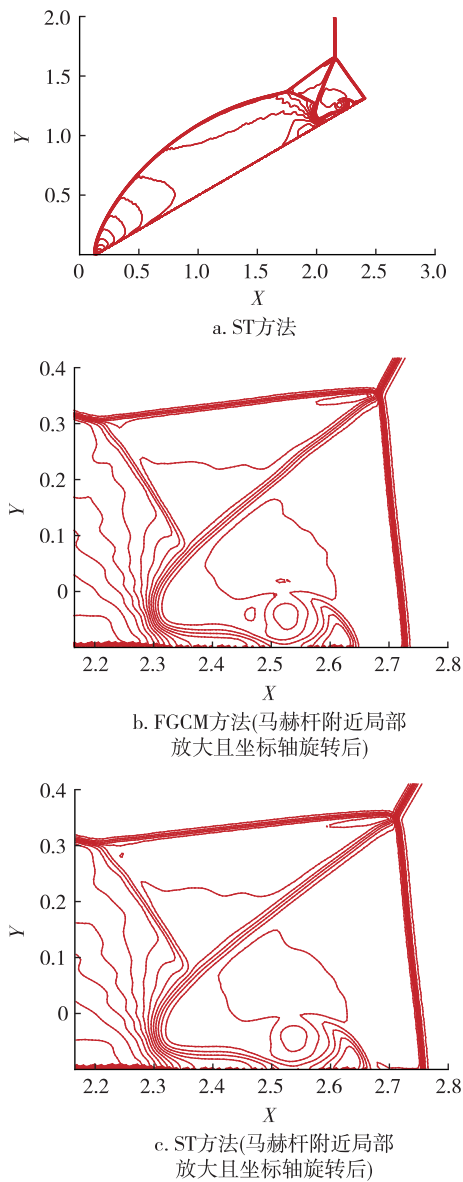


图3 双马赫密度等值线

Fig. 3 Density contour of double Mach reflection

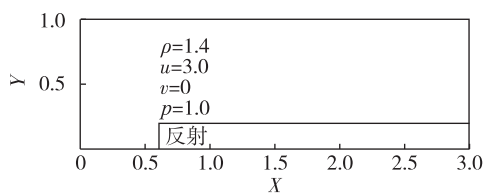


图4 前台阶

Fig. 4 Forward step

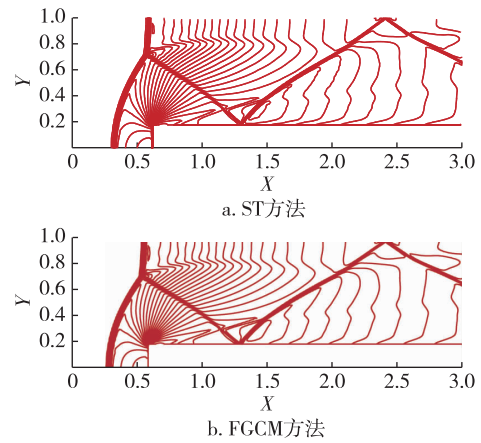


图5 台阶密度等值线

Fig. 5 Density contour of step

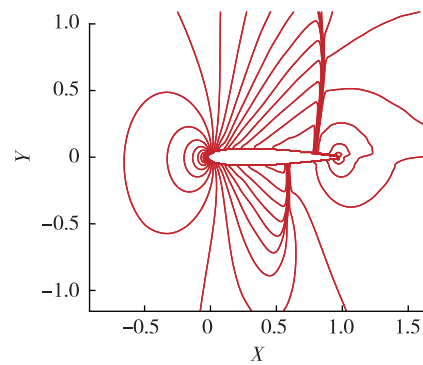


图6 $Ma_\infty = 0.85$, 攻角 $\alpha = 1.0^\circ$, FGCM 方法马赫数等值线

Fig. 6 Mach number contours for the method of FGCM

with $Ma_\infty = 0.85$ and angle of attack $\alpha = 1.0^\circ$

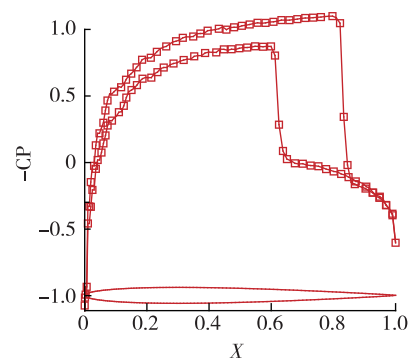


图7 $Ma_\infty = 0.85$, 攻角 $\alpha = 1.0^\circ$, FGCM 方法表面压力

Fig. 7 Surface pressure coefficient for the method of FGCM

with $Ma_\infty = 0.85$ and angle of attack $\alpha = 1.0^\circ$

参考文献

References

[1] Harten A, Osher S. Uniformly high-order accurate non-os-

cillatory schemes. [J]. SIAM J Numer Anal, 1987, 24 (2) :279-309

[2] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. J Comp Phys,

- 1994, 115(1):200-212
- [3] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. J Comp Phys, 1996, 126(1):202-228
- [4] Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[R]. NASA ICASE Report, 1997:97-65
- [5] Balsara D S, Shu CW. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy [J]. J Comp Phys, 2000, 160(2):405-452
- [6] Dadone A. Symmetry technique for the numerical solution of the 2D Euler equations at impermeable boundaries [J]. Int J Numer Meth Fluids, 1998, 28(7):1093-1108
- [7] Dadone A, Grossman B. Surface boundary conditions for the numerical solution of the Euler equations in three dimensions[J]. Lect Notes Phys, 1995, 453:188-194
- [8] Dadone A, Grossman B. Ghost-cell method with far field coarsening and mesh adaptation for Cartesian grids[J]. Computers & Fluids, 2006 35(7):676-687
- [9] Wang Z J, Sun Y Z. Curvature-based wall boundary condition for the Euler conditions on unstructured grids[J]. AIAA Journal, 2003, 41(1):27-33
- [10] Forrer H, Jeltsch R. A higher-order boundary treatment for Cartesian-grid methods[J]. J Comput Phy, 1998, 140(2):259-277
- [11] Forrer H, Berger M. Flow simulations on Cartesian grids involving complex moving geometries[C]//Proc 7th Int Conf Hyp Problems, Zurich, Switz, 1998

Application of WENO scheme with ghost cell immersed boundary method on Cartesian mesh

LI Ziqi¹ ZHU Jun¹

¹ College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

Abstract Finite difference WENO scheme of high order accuracy scheme has difficulty in dealing with the problem which has the flow over a complex geometry on structured mesh. While the ghost cell immersed boundary method is a novel and general technique for handling a flow with complex geometry without any special needs of computing mesh. We use the WENO scheme in conjunction with the ghost cell immersed boundary method to solve the above-mentioned problem on Cartesian mesh. Finally, the results of some classic numerical tests are given to verify the effectiveness of this proposed method.

Key words WENO scheme; ghost cell immersed boundary method; Cartesian mesh