文章编号:1674-7070(2013)01-0081-05

二阶奇异动力系统的非平凡周期解

廖芳芳[1]　许晓婕[2]

摘要

应用 Leray-Schauder 非线性二择一原理研究二阶动力系统 $\ddot{x}+k^2x=f(t,x)+e(t)$ 非平凡周期解的存在性,其中 $0<k<\pi/T$,$f\in \mathbf{C}((\mathbf{R}/T\mathbf{Z})\times\mathbf{R}^N\setminus\{0\},\mathbf{R}^N)$ 在原点具有排斥的奇性. 不需要任何的强制性条件,既可以处理强奇性,也可以处理弱奇性.

关键词

非平凡周期解;奇异动力系统;Leray-Schauder 二择一原理

中图分类号 O175

文献标志码 A

收稿日期 2012-04-16

资助项目 国家自然科学基金(11171090)

作者简介

廖芳芳,女,博士生,讲师,从事微分方程理论及其应用研究. liaofangfang8178@ sina. com

1 南京信息职业技术学院 素质教育部,南京,210023

2 中国石油大学(华东)素质教育部 理学院,青岛,266555

0 引言

考虑如下二阶动力系统非平凡 T-周期解的存在性:

$$\ddot{x}+k^2x=f(t,x)+e(t),\tag{1}$$

其中 $k\in(0,\pi/T)$,非线性项 $f\in\mathbf{C}((\mathbf{R}/T\mathbf{Z})\times\mathbf{R}^N\setminus\{0\},\mathbf{R}^N)$,$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_N(t))\in\mathbf{C}^2(\mathbf{R}/T\mathbf{Z},\mathbf{R}^N)$,$e(t)\in\mathbf{C}(\mathbf{R}/T\mathbf{Z},\mathbf{R}^N)$. 如果 $x\in\mathbf{C}^2(\mathbf{R}/T\mathbf{Z},\mathbf{R}^N)$ 满足(1)且对于所有的 t 有 $x(t)\neq 0$,则称 x 为式(1)的非平凡解. 这里用 $\mathbf{C}(\mathbf{R}/T\mathbf{Z},\mathbf{R})$ 表示 T 周期的连续函数空间.

本文主要考虑式(1)在 $x=0$ 具有排斥的奇性的情况,如果从物理学的角度解释,这意味着:

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{i=1}^{N}f_i(t,x)=+\infty,\text{关于 } t \text{ 一致的成立.}$$

需要指出的是这里的奇性要比文献[1-2]中所理解的广泛,因为不需要向量值函数 $f(t,x)$ 的每一个分量在 $x=0$ 都具有奇性,而这在文献[1-2]中是必须的.

奇异动力系统周期解的存在性在过去 20 年吸引了很多学者的关注[1-3]. 一个很重要的假设是由数学家 Gordon 在文献[4]中所引入的强制性条件. 如果强制性条件成立,则称系统具有强奇性,反之称之为弱奇性. 与强奇性相比,弱奇性的研究要相对晚些,但是近几年也取得了一系列比较重要的成果[5-8]. 本文受到文献[1,9]的启发,所得到的新结果在下面 2 个方面改进了文献[1,9]的工作:1)不需要非线性 f 的每一个分量具有奇性;2)不需要 e 是非负的.

本文先陈述一些预备知识,后应用 Leray-Schauder 二择一原理证明本文的主要结果. 为了解释新的结果,还将考虑例子

$$\begin{cases}\ddot{x}+k^2x=\dfrac{a(t)}{|x|^{\alpha}}+\mu b(t)|x|^{\beta}+e_1(t),\\[2mm]\ddot{y}+k^2y=\dfrac{a(t)}{|x|^{\alpha}}+\mu b(t)|x|^{\beta}+e_2(t)\end{cases}\tag{2}$$

和

$$\begin{cases}\ddot{x}+k^2x=\dfrac{a(t)}{|x|^{\alpha}}+e_1(t),\\[2mm]\ddot{y}+k^2y=\mu b(t)|x|^{\beta}+e_2(t).\end{cases}\tag{3}$$

其中 $a,b,e_1,e_2\in\mathbf{C}[0,T]$,$\alpha,\beta>0$,$\mu\in\mathbf{R}$ 是参数.

1 预备知识

首先引入一些符号. 给定本性有界函数 p,用 p^* 和 p_* 分别表示其本性上界和本性下界. 用 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbf{C}[0,T]$ 的最大值模,令 $X=\mathbf{C}[0,T]\times\cdots\times\mathbf{C}[0,T]$($N$ 次),如果 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_N(t))\in X$,则对应的范数是

$$|x|=\sum_{i=1}^{N}\|x_i\|=\sum_{i=1}^{N}\max_t|x_i(t)|,$$

显然 X 是 Banach 空间.

本文将假定 $0<k<\pi/T$,这等价于线性方程

$$\ddot{x}+k^2x=0 \tag{4}$$

在周期边值条件

$$x(0)=x(T),\quad \dot{x}(0)=\dot{x}(T) \tag{5}$$

下满足反极值原理. 在此情形下,线性系统(4)是非共振的,且式(4)—(5)所对应的格林函数 $G(t,s)$ 是正的,即 $G(t,s)>0$ 对于所有的 t,s 都成立. 事实上,格林函数具有如下形式:

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\sin k(t-s)+\sin k(T-t+s)}{2k(1-\cos kT)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\\[2mm] \dfrac{\sin k(s-t)+\sin k(T-s+t)}{2k(1-\cos kT)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T,\end{cases}$$

并且

$$m=\frac{1}{2k}\cot\frac{kT}{2}\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{1}{2k\sin\frac{kT}{2}}=M,\quad 0\leqslant s,t\leqslant T.$$

本文将用如下符号

$$\sigma=\frac{m}{M}=\cos\frac{kT}{2}, \tag{6}$$

显然 $0<\sigma<1$. 另一个重要事实是

$$\int_0^T G(t,s)\mathrm{d}s=\frac{1}{k^2}.$$

下一节主要定理的证明将用到下面的二择一原理.

引理 1[10] 假设 Ω 是赋范空间 X 中凸集 K 的一个相对紧子集,$0\in\Omega$,$A:\overline{\Omega}\to K$ 是一个连续紧映射. 则下面的两个结果有且只有一个成立:

1) $\mathscr{A}$ 在 $\overline{\Omega}$ 中有一个不动点;

2) 存在 $x\in\partial\Omega$ 和 $0<\lambda<1$ 使得 $x=\lambda\mathscr{A}x$.

2 主要结论

用

$$\gamma(t)=\int_0^T G(t,s)e(s)\mathrm{d}s \tag{7}$$

来表示线性系统

$$\ddot{x}+k^2x=e(t)$$

的唯一 T-周期解. 通过观察,一个重要的事实是:如果系统

$$\ddot{x}+k^2x=f(t,x(t)+\gamma(t)) \tag{8}$$

有一个 T-周期解 $x(t)$,则 $y(t)=x(t)+\gamma(t)$ 是(1)的 T-周期解,因此本文将考虑系统(8). 定义算子 A:$X\to X$

$$(Ax)(t)=\int_0^T G(t,s)f(s,x(s)+\gamma(s))\mathrm{d}s. \tag{9}$$

显然算子 A 的不动点正是(8)的 T-周期解.

本节还将使用如下符号:

$$\Gamma(t)=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i(t),\ \Lambda(t)=\sum_{i=1}^{N}|\gamma_i(t)|.$$

定理 1 假设 $f\in\mathbf{C}((\mathbf{R}/T\mathbf{Z})\times\mathbf{R}^N\backslash\{0\},\mathbf{R}^N)$,$e\in\mathbf{C}(\mathbf{R}/T\mathbf{Z},\mathbf{R}^N)$ 且 $\Gamma_*\geqslant 0$,存在常数 $r>0$ 满足

(H_1) 存在连续函数 $\varphi_{r+\Lambda^*}>0$(即 $\varphi_{r+\Lambda^*}(t)\geqslant 0$ 对于几乎所有的 $t\in[0,T]$ 成立,且在某一正测度集上取正值)使得:

$\sum_{i=1}^{N}f_i(t,x)\geqslant\varphi_{r+\Lambda^*}(t)$,对所有的 $0\leqslant t\leqslant T$ 和 x:$0<|x|\leqslant r+\Lambda^*$ 成立.

(H_2) 存在 $(0,\infty)$ 上的连续非负函数 $g(\cdot)$,$h(\cdot)$,使得对于所有的 t 和 x:$0<|x|\leqslant r+\Lambda^*$,有

$$f_i(t,x)\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,N,$$

$$\sum_{i=1}^{N}f_i(t,x)\leqslant g(|x|)+h(|x|),$$

其中 $g(\cdot)>0$ 是单调不增函数,$h(\cdot)/g(\cdot)$ 是单调不减函数.

(H_3) 下面不等式成立:

$$\frac{1}{k^2}g(\sigma r+\Gamma_*)\left\{1+\frac{h(r+\Lambda^*)}{g(r+\Lambda^*)}\right\}<r,$$

则系统(1)至少有一个非平凡的 T-周期解.

证明 只需证明系统(8)有非平凡 T-周期解. 由于条件(H_3)成立,可以选择 $n_0\in\{1,2,\cdots\}$ 满足 $\frac{1}{n_0}<\sigma r+\Gamma_*$ 和

$$\frac{1}{k^2}g(\sigma r+\Gamma_*)\left\{1+\frac{h(r+\Lambda^*)}{g(r+\Lambda^*)}\right\}+\frac{1}{n_0}<r.$$

令 $N_0=\{n_0,n_0+1,\cdots\}$. 对于 $n\in N_0$,考虑系统

$$\ddot{x}+k^2x=\lambda f^n(t,x(t)+\gamma(t))+\frac{k^2}{nN}, \tag{10}$$

这里 $\lambda\in[0,1]$,

$$f^n(t,x)=\begin{cases}f(t,x), & \sum_{i=1}^{N}x_i\geqslant\frac{1}{n},\\ \tilde{f}(t,x), & \sum_{i=1}^{N}x_i<\frac{1}{n}.\end{cases}\tag{11}$$

其中函数$\tilde{f}$的选取使得$f^n(t,x)$对于$(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N$是连续的. 显然求解(10)等价于下面的不动点问题

$$x(t)=\lambda(T^n x)(t)+\frac{1}{nN},\tag{12}$$

其中算子T^n为

$$(T^n x)(t)=\int_0^T G(t,s)f^n(s,x(s)+\gamma(s))\mathrm{d}s.$$

现在首先证明:对于任意的$\lambda\in[0,1]$,式(12)的任何不动点x都满足$|x|\neq r$. 事实上,假设不成立,设x是式(12)对应于某一$\lambda\in[0,1]$的不动点,且$|x|=r$. 利用格林函数$G(t,s)$的正性,对于每一个$i=1,2,\cdots,N$,有

$x_i(t)\geqslant 0$对所有的$0\leqslant t\leqslant T$成立.

此外,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}x_i(t)-\frac{1}{n}=\\&\lambda\int_0^T G(t,s)\sum_{i=1}^{N}f_i^n(s,x(s)+\gamma(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda m\int_0^T\sum_{i=1}^{N}f_i^n(s,x(s)+\gamma(s))\mathrm{d}s=\\&\sigma M\lambda\int_0^T\sum_{i=1}^{N}f_i^n(s,x(s)+\gamma(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\sigma\max_t\left\{\lambda\int_0^T G(t,s)\sum_{i=1}^{N}f_i^n(s,x(s)+\gamma(s))\mathrm{d}s\right\}=\\&\sigma\left\|\sum_{i=1}^{N}x_i-\frac{1}{n}\right\|.\end{aligned}$$

从而,对于所有的t,有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}x_i(t)&\geqslant\sigma\left\|\sum_{i=1}^{N}x_i-\frac{1}{n}\right\|+\frac{1}{n}\geqslant\\&\sigma\left(|x|-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\geqslant\sigma r.\end{aligned}$$

既然$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n_0}<\sigma r+\Gamma_*$,于是

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i(t)+\gamma_i(t))\geqslant\sigma r+\Gamma_*>\frac{1}{n}.$$

这表明

$$f^n(t,x(t)+\gamma(t))=f(t,x(t)+\gamma(t)).$$

利用条件(H_2),有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}x_i(t)=\lambda\int_0^T G(t,s)\sum_{i=1}^{N}f_i(s,x(s)+\gamma(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{n}\leqslant\\&\int_0^T G(t,s)g\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i(s)+\gamma_i(s)|\right)\cdot\\&\left\{1+\frac{h\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i(s)+\gamma_i(s)|\right)}{g\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i(s)+\gamma_i(s)|\right)}\right\}\mathrm{d}s+\frac{1}{n}\leqslant\\&\frac{1}{k^2}g(\sigma r+\Gamma_*)\left\{1+\frac{h(r+\Lambda^*)}{g(r+\Lambda^*)}\right\}+\frac{1}{n_0}.\end{aligned}$$

故有

$$r=|x|\leqslant\frac{1}{k^2}g(\sigma r+\Gamma_*)\left\{1+\frac{h(r+\Lambda^*)}{g(r+\Lambda^*)}\right\}+\frac{1}{n_0},$$

这与n_0的选择相矛盾,从而上面的结论得证.

利用引理1可知

$$x(t)=(T^n x)(t)+\frac{1}{nN},\tag{13}$$

在$B_r=\{x\in X:|x|<r\}$里有一个不动点,用x^n表示,即系统

$$\ddot{x}+k^2x=f^n(t,x(t)+\gamma(t))+\frac{k^2}{nN}\tag{14}$$

有一个T-周期解x^n且满足$|x^n|<r$. 又由于

$$\sum_{i=1}^{N}x_i^n(t)\geqslant\frac{1}{n}>0,\text{对于所有的}t\in[0,T],$$

所有x^n是(14)的非平凡T-周期解.

为了从系统(14)的解x^n得到原系统(8)的解,需要证明:存在一常数$H>0$,对于所有的$n\geqslant n_0$,有

$$|\dot{x}^n|\leqslant H.\tag{15}$$

为此,对于每一个$i=1,\cdots,N$,利用周期边值条件,存在$t_i\in[0,T]$使得$\dot{x}_i^n(t_i)=0$. 从0到T对(14)积分,得

$$k^2\int_0^T x^n(t)\mathrm{d}t=\int_0^T\left[f^n(t,x^n(t)+\gamma(t))+\frac{k^2}{nN}\right]\mathrm{d}t.$$

因此,

$$\begin{aligned}&|\dot{x}^n|=\sum_{i=1}^{N}\|\dot{x}_i^n\|=\sum_{i=1}^{N}\max_t\left|\int_{t_i}^t\ddot{x}_i^n(s)\mathrm{d}s\right|=\\&\sum_{i=1}^{N}\max_t\left|\int_{t_i}^t\left[f_i^n(s,x_n(s)+\gamma(s))+\frac{k^2}{nN}-k^2x_i^n(s)\right]\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\sum_{i=1}^{N}\int_0^T\left[f_i^n(s,x_n(s)+\gamma(s))+\frac{k^2}{nN}\right]\mathrm{d}s+k^2\sum_{i=1}^{N}\int_0^T x_i^n(s)\mathrm{d}s=\\&2k^2\sum_{i=1}^{N}\int_0^T x_i^n(s)\mathrm{d}s<2Nk^2rT=H.\end{aligned}$$

最后证明:存在不依赖于$n\in N_0$的常数$\delta>0$,使得

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i^n(t)+\gamma_i(t))\geqslant\delta,\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{16}$$

事实上,由于(H_1)成立,存在连续函数$\varphi_{r+\Lambda^*}(t)>0$满足:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(t,s) \geqslant \varphi_{r+\Lambda^*}(t)$$,对于所有的$0 \leqslant t \leqslant T$和

x: $< x0 \leqslant | r + | \Lambda^*$ 成立.

令 $x^{r+\Lambda^*}(t)$ 是

$$\ddot{x} + k^2 x = \boldsymbol{\Phi}(t)$$

的唯一 T- 周期解, 其中 $\boldsymbol{\Phi}(t) = (\varphi_{r+\Lambda^*}(t), \cdots, \varphi_{r+\Lambda^*}(t))^{\mathrm{T}}$. 同时令

$$A_* = \min_t \int_0^T G(t,s)\varphi_{r+\Lambda^*}(s)\,\mathrm{d}s,$$

取$\delta = A_* + \Gamma_* > 0$,由于

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i^n(t) + \gamma_i(t)) =$$

$$\int_0^T G(t,s)\sum_{i=1}^{N} f_i^n(s, x^n(s) + \gamma(s))\,\mathrm{d}s + \Gamma(t) + \frac{1}{n} \geqslant$$

$$\int_0^T G(t,s)\varphi_{r+\Lambda_*}(s)\,\mathrm{d}s + \Gamma(t) \geqslant A_* + \Gamma_* = \delta,$$

则不等式(16)成立.

利用事实$| x^n | < r$和式(15),可以知道对于每一个$i = 1,2,\cdots,N$, $\{x_i^n\}_{n \in N_0}$是$[0,T]$上的一致有界和等度连续函数列. 利用 Arzela-Ascoli 定理, $\{x_i^n\}_{n \in N_0}$有一个收敛的子列,这里用$\{x_i^{n_k}\}_{k \in N}$表示,并设其收函数$x_i \in C[0,T]$. 令$x = (x_1, \cdots, x_N)$,则x满足

$$\delta \leqslant \sum_{i=1}^{N}(x_i(t) + \gamma_i(t)) \leqslant r + \Lambda^*.$$

此外, x^{n_k} 满足积分方程

$$x^{n_k}(t) = \int_0^T G(t,s) f(s, x^{n_k}(s) + \gamma(s))\,\mathrm{d}s + \frac{1}{n_k N}.$$

令$k \to \infty$,得到

$$x(t) = \int_0^T G(t,s) f(s, x(s) + \gamma(s))\,\mathrm{d}s.$$

于是x是系统(8)的非平凡T- 周期解.

推论1 假设$\alpha, \beta > 0$, $a(t)$, $b(t)$都是连续的正函数,则对于每一个$e_1, e_2 \in \mathbf{C}(\mathbf{R}/T\mathbf{Z}, \mathbf{R})$满足$\Gamma_* \geqslant 0$:

1) 如果$\beta < 1$,则对于所有的$\mu > 0$,系统(2)或(3)至少有一个非平凡的T- 周期解.

2) 如果$\beta \geqslant 1$,则存在一常数$\mu_1 > 0$,使得对于所有的$0 < \mu < \mu_1$,系统(2)或(3)至少有一个非平凡的T- 周期解;

证明 这里仅仅考虑系统(2),关于系统(3)的证明类似. 应用定理2, 对于$s \in \mathbf{R}, s > 0$,选取

$$g(s) = 2a^* s^{-\alpha},$$
$$h(s) = 2\mu b^* s^{\beta},$$
$$\varphi_{r+\Lambda^*}(t) = 2a_*(r + \Lambda^*)^{-\alpha}.$$

容易看出条件(H_1)和(H_2)满足,同时条件(H_3)变为:存在某一正数$r > 0$满足

$$\mu < \frac{k^2 r(\sigma r + \Gamma_*)^{\alpha} - 2a^*}{2b^*(r + \Lambda^*)^{\alpha+\beta}}.$$

从而当

$$0 < \mu < \mu_1 := \sup_{r>0} \frac{k^2 r(\sigma r + \Gamma_*)^{\alpha} - 2a^*}{2b^*(r + \Lambda^*)^{\alpha+\beta}}$$

成立时,条件(H_3)满足. 注意到当$\beta < 1$时,$\mu_1 = \infty$,而当$\beta \geqslant 1$时,$\mu_1 < \infty$.

结论得证.

参考文献

References

[1] Chu J F, Torres P J, Zhang M R. Periodic solutions of second order non-autonomous singular dynamical systems [J]. Journal of Differential Equations, 2007, 239(1): 196-212

[2] Habets P, Sanchez L. Periodic solution of some Lienard equations with singularities[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1990, 109(4): 1135-1144

[3] Lazer A C, Solimini S. On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1987, 99(1): 109-114

[4] Gordon W B. Conservative dynamical systems involving strong forces [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1975, 204: 113-135

[5] Chu J F, Torres P J. Applications of Schauder's fixed point theorem to singular differential equations[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2007, 39(4): 653-660

[6] Jiang D Q, Chu J F, Zhang M R. Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations[J]. Journal of Differential Equations, 2005, 211 (2): 282-302

[7] Rachunková I, Tvrdy M, Vrkoc I. Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second order periodic boundary value problems[J]. Journal of Differential Equations, 2001, 176(2): 445-469

[8] Torres P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem[J]. Journal of Differential Equations, 2003, 190(2): 643-662

[9] Franco D, Webb J R L. Collisionless orbits of singular and nonsingular dynamical systems [J]. Discrete and Continuous Dynamical System, 2006, 15(3): 747-757

[10] O'Regan D. Existence theory for nonlinear ordinary differential equations[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997

Nontrivial periodic solutions for second order singular dynamical systems

LIAO Fangfang[1] XU Xiaojie[2]
1 Department of Quality-Oriented Education, Nanjing College of Information Technology, Nanjing 210023
2 College of Science, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266555

Abstract In this paper, we study the existence of nontrivial periodic solutions for second order dynamical systems $\ddot{x} + k^2 x = f(t,x) + e(t)$, here $0 < k < \pi/T$ and $f \in \mathbf{C}((\mathbf{R}/T\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \mathbf{R}^N)$ has a repulsive singularity at the origin. We do not need any coercivity conditions, therefore we can deal with the case of a strong singularity as well as the case of a weak singularity. The proof is based on a nonlinear alternative principle of Leray-Schauder.

Key words nontrivial periodic solutions; singular dynamical systems; Leray-Schauder alternative principle