

# 多维非高斯系统最小熵控制

殷利平<sup>1,2</sup> 周丽<sup>1</sup> 张敏<sup>1</sup>

## 摘要

针对多维非高斯系统提出了最小熵控制方法,控制的目标是使系统的非高斯输出概率密度函数跟踪一个已知的联合概率密度函数.首先,根据系统模型和辅助映射,构建了系统状态、跟踪误差与扰动输入之间的泛函算子模型,然后基于梯度算法设计了递归的次优控制律,最后通过仿真验证了最小熵控制算法的有效性.

## 关键词

非高斯系统;最小熵;概率密度函数(PDF);跟踪控制;泛函算子模型

中图分类号 TP13

文献标志码 A

## 0 引言

在控制工程实践中,很多系统都不可避免地会受到系统外部的干扰.针对具有随机干扰的系统,大部分文献都是假设这些随机干扰信号是高斯信号,然后基于 Lyapunov 定理和(扩展)Kalman 滤波方法设计控制器<sup>[1-3]</sup>.但是,有很多实际的工业过程,相关的随机信号是非高斯的<sup>[4-8]</sup>.对于这类输入和输出均为非高斯的随机系统,用期望和方差远不能描述相关随机变量(向量)的统计特性,因此需要采用一种新的测度“熵”来刻画非高斯变量的特征.熵这个概念起源于热力学,现已广泛应用到信息学、控制理论等各个方面.熵是用来描述随机变量的不确定性的测度,熵的定义有很多种<sup>[9]</sup>,对于随机变量  $x$ ,最初的熵(Shannon 熵)定义为  $H(x) = - \int_{\alpha}^{\beta} \gamma_x(\tau) \ln \gamma_x(\tau) d\tau$ .

作为一种新控制方法,最小熵控制这几年来越来越受到学者们的关注<sup>[10-13]</sup>.文献[10]是在输出 PDF(概率密度函数)可以量测的前提下,基于 B 样条神经网络进行最小熵控制,文献[11]则是在输出 PDF 不可量测的情况下,基于建立泛函算子模型用最小熵方法对一个给定的概率密度函数进行跟踪控制.当系统模型存在不确定性,甚至输入 PDF 模型有扰动,文献[12]通过 Renyi 熵、构造辅助函数等方法进行了有效的 PDF 跟踪控制.

在输出 PDF 不可量测的前提下,最小熵控制的研究成果都是针对单输入单输出系统.如果系统是多维的,输出不再是一个随机变量,而是一个随机向量,情况将会复杂很多,而且稳定性分析也将成为难点.

本文将针对多维非高斯系统研究最小熵控制方法.控制的目标是使系统输出的 PDF 跟踪一个给定的联合分布.首先建立跟踪误差与输入之间的泛函算子模型,然后基于梯度算法设计控制器.为了分析闭环系统的稳定性,本文设计了递归的次优镇定控制律,最后通过数值仿真证明了所提方法的有效性.

## 1 问题描述

### 1.1 系统模型

本文考虑的系统模型如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{1k} \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_{2k} \boldsymbol{\omega}_k, \\ \mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{r}). \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期 2012-03-21

资助项目 国家自然科学基金(61104123, 61104073);博士后基金(2012M520141);南京信息工程大学科研启动基金(S8110123001)

作者简介

殷利平,女,博士,讲师,研究方向为随机控制与故障检测等. lpyin@nuist.edu.cn

1 南京信息工程大学 信息与控制学院,南京, 210044

2 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院,北京,100191

其中  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  是状态序列,  $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^l$  是受控输出序列,  $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^p$  是控制序列,  $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbf{R}^q$  和  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^l$  是随机扰动序列,  $\mathbf{r}$  是已知的参考输入向量, 其联合 PDF 为  $\gamma_d(\boldsymbol{\tau})$ .  $\mathbf{A}_k$  和  $\mathbf{B}_{ik}$  ( $i = 1, 2$ ) 是已知的系统矩阵, 具有相应的维数.

另外, 随机干扰  $\boldsymbol{\omega}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  是非高斯的, 联合 PDF 已知. 对于这两个随机输入, 首先给出下面的假设条件.

**假设 1** 随机向量  $\mathbf{v}_k, \boldsymbol{\omega}_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 是有界、连续、相互独立的, 联合 PDF 分别定义在  $[a_1, b_1]^q$  和  $[a_2, b_2]^l$  上, 且分别为  $\gamma_\omega(\boldsymbol{\tau})$  和  $\gamma_v(\boldsymbol{\tau})$ .

实际上, 在很多的实际工业过程中, 上述假设条件都成立, 如造纸过程, 其纤维、填料等原材料带有强烈的随机因素(纤维长度分布、填料分子量分布大小等), 其 PDF 可以通过 Parzen Window 方法估计<sup>[14]</sup>.

**注 1**  $\mathbf{v}_k, \boldsymbol{\omega}_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 都假设是连续的随机向量, 如果  $\mathbf{v}_k$  或  $\boldsymbol{\omega}_k$  中含有离散分量, 处理方法与文献[15]相同.

**假设 2**  $h(\cdot, \cdot, \cdot)$  是 Borel 可测的, 光滑的非线性函数, 且  $h(0, 0, 0) = 0$ .

在每一个采样时刻  $k$ , 随机输出向量  $\mathbf{y}_k$  都可以通过定义在  $[\alpha, \beta]^l$  上的联合 PDF  $\gamma_{y_k}$  来表征, 其中  $\alpha$  和  $\beta$  可以分别是  $-\infty$  和  $+\infty$ . 一般来说, 由于非线性函数的存在, 即使  $\boldsymbol{\omega}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  是高斯向量,  $\mathbf{y}_k$  也是非高斯的.

**假设 3** 输出  $\mathbf{y}_k$  不可测, 但是  $\mathbf{y}_k$  的 PDF  $\gamma_{y_k}$  可测.

**注 2** 在锅炉内火焰燃烧过程中, 锅炉内温度很高, 且各点温度不均匀, 要系统地量测锅炉内各点温度不太现实, 但是可以采用图像处理的方法, 建立静态的气体射流火焰模型, 从而获得了火焰的温度场分布, 然后在一定的假设条件下将火焰温度分布转化为火焰能量分布, 火焰能量分布是典型的 PDF 分布<sup>[5]</sup>.

## 1.2 泛函算子模型

用  $\mathbf{e}_k$  表示跟踪误差, 显然  $\mathbf{e}_k$  也是随机向量, 则 
$$\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{r} = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{r}) - \mathbf{r}. \quad (2)$$

本文考虑的是多维非高斯系统的最小熵控制问题, 控制的目标是使跟踪误差的熵越来越小, 通俗地说, 就是使跟踪误差的 PDF 越来越窄. 熵是表示随机变量(向量)不确定性的测度, 如果该随机变量(向量)是高斯的, 那么最小熵控制与最小方差控制等价.

假设 1 和假设 3 保证了系统的输出和跟踪误差都是连续的, 对于连续随机向量, 可以引入 Renyi 熵简化计算. 跟踪误差  $\mathbf{e}_k$  的 Renyi 熵定义为

$$H_\alpha(\mathbf{e}_k) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int_a^b \gamma_{\mathbf{e}_k}^\alpha d\boldsymbol{\tau}. \quad (3)$$

一般情况下, 选择参数  $\alpha = 2$ <sup>[14-15]</sup>. 在这种情况下, 根据对数函数的单调性,  $H_2(\mathbf{e}_k)$  的最小化(最大化)问题就转化成

$$V(\mathbf{e}_k) = \int_a^b \gamma_{\mathbf{e}_k}^2(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

的最大化(最小化)问题.

最小熵控制就是要设计控制律  $\mathbf{u}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{r})$  使得

$$J_N := \mathbf{Q}_k H_2(\mathbf{e}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k \quad (5)$$

最小化. 其中  $\mathbf{Q}_k > 0$  和  $\mathbf{R}_k \geq 0$  分别是权系数和权矩阵.

为了简化控制器设计程序, 引入下面的假设.

**假设 4** 假设雅可比矩阵

$$\Xi_k := \left| \det \frac{\partial h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}_k} \right| \neq 0$$

在假设 4 条件下, 给定一个常数  $\kappa$ , 对于函数  $h(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ , 存在反函数

$$\boldsymbol{\tau} = h^{-1}(\kappa, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \quad (6)$$

使  $\boldsymbol{\tau} = h(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$  成立.

为了明确输入和跟踪误差之间的关系, 构造下面的两个辅助向量

$$\begin{aligned} \xi_k^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, & \psi_k^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{1,k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{B}_{2,k-1} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \\ \xi_k^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, & \psi_k^2 &= \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{r}) - \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

构造辅助映射可以简化计算<sup>[15]</sup>, 并得到下面的结论.

**定理 1** 根据假设 1—4, 在采样时刻  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 相应的泛函算子模型为

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{x}_{k+1}(\boldsymbol{\tau})} &= \int_{a_1}^{b_1} \gamma_{\mathbf{x}_k}(\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B}_{1,k} \mathbf{u}_k - \mathbf{B}_{2,k} \boldsymbol{\tau}_1)) \gamma_\omega(\boldsymbol{\tau}_1) |\det \mathbf{A}_k^{-1}| d\boldsymbol{\tau}_1, \\ \gamma_{\mathbf{e}_k}(\boldsymbol{\tau}) &= \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \gamma_{\mathbf{x}_k}(h^{-1}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3)) \gamma_v(\boldsymbol{\tau}_2) \gamma_d(\boldsymbol{\tau}_3) |\det \Xi_k|^{-1} d\boldsymbol{\tau}_2 d\boldsymbol{\tau}_3. \quad (9)$$

**证明** 在假设 4 条件下, 从  $\xi_k^i$  ( $i = 1, 2$ ) 到  $\psi_k^i$  ( $i = 1, 2$ ) 的映射是一一映射, 且可以证明从  $\xi_k^i$  ( $i =$

1,2) 到  $\psi_k^i (i = 1, 2)$  的雅可比矩阵行列式分别为  $\det \mathbf{A}_k$  和  $\det \Xi_k$ . 因此根据式(6) 定义的反函数及  $\mathbf{x}_k$  与  $\boldsymbol{\omega}$  的相互独立性

$$\gamma_{x_{k+1}}(\tau) = \int_{a_1}^{b_1} \gamma_{\psi_{k+1}}(\tau, \tau_1) d\tau =$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \gamma_{x_k, \boldsymbol{\omega}}(\mathbf{A}_k^{-1}(\tau - \mathbf{B}_{1,k} \mathbf{u}_k - \mathbf{B}_{2,k} \tau_1), \tau_1) |\det \mathbf{A}_k|^{-1} d\tau_1 =$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \gamma_{x_k}(\mathbf{A}_k^{-1}(\tau - \mathbf{B}_{1,k} \mathbf{u}_k - \mathbf{B}_{2,k} \tau_1)) \gamma_{\boldsymbol{\omega}}(\tau_1) |\det \mathbf{A}_k|^{-1} d\tau_1.$$

相似地, 可以证明式(9) 成立.

## 2 最小熵控制器设计

为了设计控制律, 可以将一些优化算法应用到最小熵控制中, 为了简化设计过程, 不妨假设  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{I}$ , 并且只考虑在线控制策略.

在式(3) 中,  $H_2(\mathbf{e}_k)$  实质上是条件熵  $H_2(\mathbf{e}_k | \mathbf{u}_k)$  [15], 它是关于  $\mathbf{u}_k$  的带积分约束的非线性函数, 将其直接优化获取控制律比较困难, 因此采用递归的方法, 令

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \Delta \mathbf{u}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \dots, +\infty, \quad (10)$$

在(3) 和(9) 的基础上,  $H_2(\mathbf{e}_k)$  可以进一步表示为

$$H_2(\mathbf{e}_k) = H_{20} + H_{21} \Delta \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k^T H_{22} \Delta \mathbf{u}_k + o(\Delta \mathbf{u}_k), \quad (11)$$

$$\text{其中 } H_{20} := H_2(\mathbf{e}_k) \Big|_{\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1}}, H_{21} = \frac{\partial H_2(\mathbf{e}_k)}{\partial \mathbf{u}_k} \Big|_{\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1}},$$

$$H_{22} = \frac{\partial^2 H_2(\mathbf{e}_k)}{\partial \mathbf{u}_k^2} \Big|_{\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1}}.$$

**定理 2** 根据假设 1—4, 系统(1) 基于最小化性能指标  $J_N$  的次优最小熵控制律为

$$\Delta \mathbf{u}_k^* = -\frac{H_{21} + \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k}{2H_{22} + 2\mathbf{R}_k}, \quad (12)$$

其中  $\mathbf{R}_k$  满足  $H_{22} + \mathbf{R}_k > 0$ .

**证明** 最优控制律可以通过下式得到

$$\frac{\partial \left[ H_2(\mathbf{e}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k \right]}{\partial \Delta \mathbf{u}_k} = 0. \quad (13)$$

基于 Bellman 最优化准则, 得到的是局部最优控制律. 从(10) 可以看出:

$$\mathbf{R}_k \mathbf{u}_k^2 = \mathbf{R}_k \mathbf{u}_{k-1}^2 + 2\mathbf{R}_k \mathbf{u}_{k-1} \Delta \mathbf{u}_k + \mathbf{R}_k \Delta \mathbf{u}_k^2, \quad (14)$$

将(11) 和(14) 代入(13), 对于  $k = 1, 2, \dots, +\infty$ , 就将得到递归的次优控制律(12).

**注 3** 定理 2 是性能指标(5) 最小化的必要条件. 为了保证充分性, 只要下面的不等式成立:

$$\frac{\partial^2 \left[ H_2(\mathbf{e}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k \right]}{\partial \Delta \mathbf{u}_k^2} = 2(H_{22} + \mathbf{R}_k) > 0. \quad (15)$$

实际上, 当  $\mathbf{R}_k$  选得充分大, 式(15) 必然成立.

**注 4** 定理 2 给出的递归的最小熵控制算法可以总结如下:

- 1) 初始化  $\mathbf{x}_0$  和  $\mathbf{u}_0$ ;
- 2) 在每一个采样时刻  $k$ , 计算  $\gamma_{e_k}$  和(4) 所定义的  $V(\mathbf{e}_k)$ ;
- 3) 根据(10) 和(12) 计算  $\Delta \mathbf{u}_k$  和  $\mathbf{u}_k$ ;
- 4)  $k = k + 1$ , 返回步骤 2).

## 3 仿真

在这一部分, 将通过一个数值例子来说明怎样对多维非高斯系统进行最小熵控制. 系统模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1k+1} \\ \mathbf{x}_{2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & 1 \\ 0 & -0.90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1k} \\ \mathbf{x}_{2k} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.50 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_k, \\ \mathbf{y}_k = \frac{1}{1 + \mathbf{x}_{1k}^3} + \mathbf{u}_k + \mathbf{x}_{2k} + \sqrt{\mathbf{v}_k}. \end{cases}$$

假设随机变量  $\boldsymbol{\omega}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  都是独立同分布的随机变量,  $\mathbf{v}_k$  的非对称 PDF 定义为

$$\gamma_{\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} \frac{-6(x - 0.25)}{\sqrt{x}}, & x \in [0, 0.25], \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (0.25, +\infty), \end{cases}$$

而  $\boldsymbol{\omega}_k$  的 PDF 是

$$\gamma_{\boldsymbol{\omega}}(x) = \begin{cases} -48 \left( x^2 - x + \frac{3}{16} \right), & x \in [0, 0.25], \\ 0, & x \in (-\infty, 0.25) \cup (0.75, +\infty), \end{cases}$$

参考输入  $r$  服从 Beta(3, 2) 分布, 即  $r$  的 PDF 为

$$\frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x).$$

在仿真中, 设定初始条件为 [5, 5]. 在每一个采样时刻  $k$ , 次优控制输入序列如图 1 所示. 图 2 是参考输入  $r$ , 图 3 是跟踪误差, 图 4 是跟踪误差的概率密度函数. 从图 4 可以看出, 误差的概率密度函数越来越窄. 图 5 是跟踪误差的熵, 随着采样时刻增加, 跟踪误差的熵越来越小.

## 4 结论

本文针对多维非高斯系统, 在输出不可测的情形下研究了联合概率密度函数的跟踪问题. 首先在系统模型的基础上, 构造辅助映射建立了输入和跟踪误差之间的泛函算子模型. 由于性能指标函数是关于控制律  $\mathbf{u}_k$  的带积分约束的非线性函数, 直接求

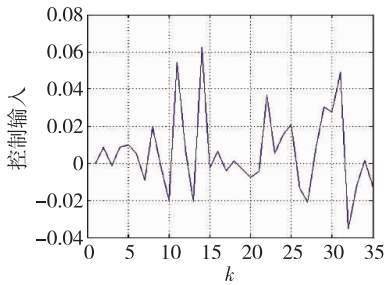


图1 次优控制序列

Fig. 1 Suboptimal control sequence

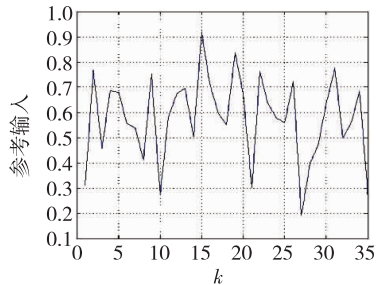


图2 参考输入

Fig. 2 Reference input

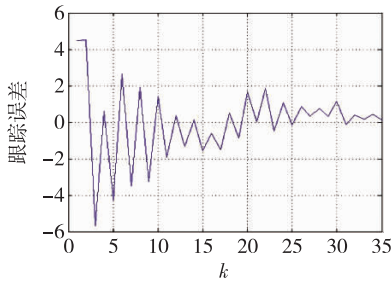


图3 跟踪误差

Fig. 3 Tracking error

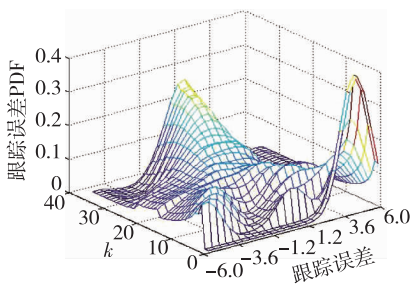


图4 跟踪误差的概率密度函数

Fig. 4 PDF of tracking error

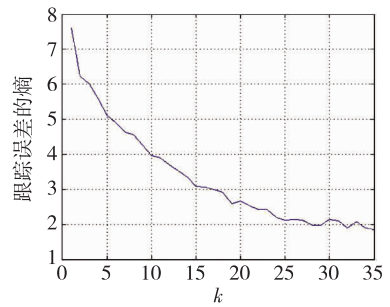


图5 跟踪误差的熵

Fig. 5 Entropy of tracking error

制方法.

## 参考文献

## References

- [ 1 ] Astrom K J. Introduction to stochastic control theory [ M ]. New York: Academic Press, 1970
- [ 2 ] Mao X. Exponential stability of stochastic delay interval systems with Markovian switching[ J ]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47: 1604-1612
- [ 3 ] Ugrinovskii V A, Petersen I R. Robust stability and performance of stochastic uncertain systems on an infinite time interval [ J ]. Systems & Control Letters, 2001, 44: 291-308
- [ 4 ] Wang H. Bounded dynamic stochastic systems: Modeling and control [ M ]. London: Springer-Verlag, 2000
- [ 5 ] Wang H, Ding J, Chai T, et al. 随机分布控制系统研究进展及应用 [ C ] // 中国自动化大会暨两化融合高峰论坛, 杭州, 2009  
Wang H, Ding J, Chai T, et al. Recent advances on stochastic distribution control and its application [ C ] // Chinese Automation Congress, Hangzhou, 2009
- [ 6 ] 裔扬. 随机分布系统跟踪控制和优化方法的研究 [ D ]. 南京: 东南大学自动化学院, 2008  
YI Yang. Research on tracking control and optimization method based on stochastic distribution systems [ D ]. Nanjing: School of Automation, Southeast University, 2008
- [ 7 ] Guo L, Wang H. Stochastic distribution control: Matrix inequality approach [ M ]. London: Springer-Verlag, 2009
- [ 8 ] 殷利平. 非高斯系统基于熵优化的随机分布控制理论研究 [ D ]. 南京: 东南大学自动化学院, 2010  
YIN Liping. Stochastic distribution control for non-Gaussian systems based on entropy optimization principle [ D ]. Nanjing: School of Automation, Southeast University, 2010
- [ 9 ] Papoulis A. Probability, random variables and stochastic processes [ M ]. New York: McGraw-Hill, 2004
- [ 10 ] Wang H. Minimum entropy control of non-Gaussian dynamic stochastic systems [ J ]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47( 2 ): 398-403
- [ 11 ] Yue H, Wang H. Minimum entropy control of closed loop tracking errors for dynamic stochastic systems [ J ]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48 ( 1 ): 118-122

取控制律比较困难, 本文采用递归方法和梯度算法设计最小熵控制器. 仿真结果表明, 对于多维非高斯系统, 最小熵控制方式是一种新颖且非常有效的控

- [12] Yin L P, Guo L, Wang H. Robust minimum entropy tracking control with guaranteed stability for nonlinear stochastic systems under modeling errors [C] // 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2008: 1469-1474
- [13] Zhang J H, Wang H. Iterative learning-based minimum tracking error entropy controller for robotic manipulators with random communication random delays [J]. IET Control Theory & Applications, 2008, 2(8): 682-692
- [14] Erdogmus D, Hild K E, Principe J C, et al. Adaptive blind deconvolution of linear channels using Renyi's entropy with Parzen window estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(6): 1489-1498
- [15] Yin L P, Guo L. Fault isolation for dynamic multivariate nonlinear non-Gaussian stochastic systems using generalized entropy optimization principle [J]. Automatica, 2009, 45(11): 2612-2619

## Minimum entropy control for multivariate non-Gaussian system

YIN Liping<sup>1,2</sup> ZHOU Li<sup>1</sup> ZHANG Min<sup>1</sup>

1 School of Information and Control, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

2 School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100191

**Abstract** This paper considers a new tracking control problem for a class of multivariate non-Gaussian system where the tracked target is a given joint probability density function. The control objective is to find an algorithm such that the entropy of tracking error is minimized. A function based model is established between the disturbance, state and error. A recursive optimization approach is presented such that the performance index is minimized. Finally, simulations are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed minimum entropy control algorithm.

**Key words** non-Gaussian systems; minimum entropy; Probability Density Functions (PDF); tracking control; functional operator model