文章编号:1674-7070(2012)04-0380-05

不确定系数多离散时滞的中立型系统的时滞相关鲁棒稳定性

马跃[1]　高存臣[1]　丛心尉[1]

摘要

研究了一类时变不确定系数多离散时滞中立型系统的时滞相关鲁棒稳定性问题. 利用线性矩阵不等式技术,提出了一种计算该系统自由权矩阵和时滞上界的简化方法,并在系统中考虑了中立项时滞和离散时滞,得到了上述系统为稳定与鲁棒稳定的一些充分条件. 最后,用数值例子说明了该方法的有效性和较小的保守性.

关键词

时滞中立型系统;时变系数;不确定系数;鲁棒稳定性;线性矩阵不等式

中图分类号 O231.3

文献标志码 A

收稿日期 2011-09-26

资助项目 国家自然科学基金(60974025)

作者简介

马跃,男,硕士生,研究方向是控制理论与应用. mayuesummer@163.com

高存臣(通信作者),男,教授,感兴趣的研究领域是控制理论与应用,海洋信息处理与系统. ccgao@ouc.edu.cn

1 中国海洋大学 数学科学学院,青岛,266100

0　引言

时滞中立型系统(简称中立型系统)是指在系统的状态和状态的导数中都含有时滞的系统,这与仅仅在状态中含有时滞相比要复杂得多. 例如,某城市的人口发展数量不但与过去的人口数量有关,而且与过去的人口发展速度也有关,表现在数学模型上就是时滞中立型系统. 时滞中立型系统在种群生态学、分布式网络无损传输线、热传导以及素数的分布等领域都有广泛的应用[1-3]. 其在新型控制技术中也得到了应用,如重复控制系统就是一类重要的时滞中立型系统[4],它通过插入一个人工的中立项时滞到控制回路,以提高周期信号的控制性能.

到目前为止,时滞中立型系统的稳定性研究得到了众多学者的密切关注,对于包含时变不确定系数时滞系统的研究,Lyapunov 泛函和线性矩阵不等式技术是最有效的方法. 时滞中立型系统的稳定性分为时滞无关稳定[5]和时滞相关稳定[6-7]2 类. 由于时滞无关条件不含有时滞信息,其结果比较保守. 状态时滞(通常称为离散时滞)和中立项时滞可以相等,也可以不相等,这就产生了不同的时滞中立型系统. 文献[6]讨论了离散时滞和中立项时滞相等且定常的中立型时滞系统,而文献[7-8]讨论的是离散时滞和中立型时滞不相等的情况. 在这些文献中,大都要求中立项时滞是定常的,而离散时滞没有要求,但几乎所有的这些准则都与离散时滞有关而与中立项时滞无关. 文献[9]研究了与时滞中立项和离散时滞都相关的时滞中立型系统的稳定性,较以上文献有了很大的改进,结果也具有较小的保守性. 但是关于多个离散时滞的系统,研究却很少. 本文针对这一问题,进一步研究与时滞中立项和离散时滞都有关的时滞中立型系统的稳定性问题.

本文提出了一种解决中立型系统时滞相关稳定性的简化方法. 首先,给出标称中立型系统的一个判据. 通过自由权矩阵表示出一些时滞项,由线性矩阵不等式(LMIs)方法使得自由权矩阵易于选取. 虽然判据同时考虑了与中立型时滞相关和离散时滞相关,但是依然具有较小的保守性. 然后将该判据推广到了时变不确定系数多时滞离散中立型系统. 最后用数值例子说明了本文方法的有效性和较小的保守性.

1 系统描述

考虑如下的时变不确定系数多离散时滞的中立型系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}_0 + \Delta\boldsymbol{A}_0(t))\boldsymbol{x}(t) + \\ \quad \sum_{i=1}^{r-1}(\boldsymbol{A}_i + \Delta\boldsymbol{A}_i(t))\boldsymbol{x}(t-\tau_i) + \\ \quad \boldsymbol{A}_r\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau_r), \quad t>0, \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \quad \boldsymbol{\phi}(t) \in \mathbf{C}^1[-\tau,0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量,$\tau_i > 0(i=1,\cdots,r)$ 是常时滞,$\tau = \max\limits_{i=1,\cdots,r}(\tau_i)$,$\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{n\times n}(i=0,\cdots,r)$ 是常矩阵,$\boldsymbol{A}_r$ 的谱半径满足 $\rho(\boldsymbol{A}_r) < 1$.

假设时变不确定项满足以下形式的范数有界条件:

$$\Delta\boldsymbol{A}_i(t) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_i, \quad i=0,\cdots,r-1. \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}_i$ 是具有适当维数的常值矩阵,$\boldsymbol{F}(t)$ 是未知的实函数矩阵,并且 $\boldsymbol{F}(t)$ 的元素是勒贝格可测的. 不失一般性,设 $\boldsymbol{F}(t)$ 的欧拉范数满足:

$$\|\boldsymbol{F}(t)\| \leqslant 1, \quad \forall t. \tag{3}$$

首先,给出系统(1)的标称系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{r-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i) + \\ \quad \boldsymbol{A}_r\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau_r), \quad t>0, \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \quad \boldsymbol{\phi}(t) \in \mathbf{C}^1[-\tau,0]. \end{cases} \tag{4}$$

引理 1[10] 已知具有适当维数的矩阵 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,如果

$$\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} < 0,$$

则对任意满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leqslant \boldsymbol{I}$ 的 $\boldsymbol{F}(t)$,当且仅当存在 $\varepsilon>0$ 时使得下式成立:

$$\boldsymbol{Q} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \varepsilon\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} < 0.$$

本文采用以下符号:$\boldsymbol{A}>0$(或 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$)表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的(或半正定的);$\boldsymbol{A}<0$(或 $\boldsymbol{A}\leqslant 0$)表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的(或半负定的);$\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$)表示 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的元素满足 $a_{ij}>b_{ij}$(或 $a_{ij}\geqslant b_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$);$\boldsymbol{A}<\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$)表示 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的元素满足 $a_{ij}<b_{ij}$(或 $a_{ij}\leqslant b_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$).

2 主要结果

为便于分析,定义 $\mathbf{C}([-\tau_r,0],\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ 上的一个算子 $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D}\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{x}(t-\tau_r). \tag{5}$$

这里,$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}(t+\theta),\theta\in[-\tau_r,0]$.

$\mathscr{D}$ 的稳定性定义如下.

定义 1[11] 算子 $\mathscr{D}$ 是稳定的,如果齐次差分方程:

$$\begin{cases} \mathscr{D}\boldsymbol{x}_t = 0, \quad t\geqslant 0, \\ \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\varphi} \in \{\boldsymbol{\phi}\in\mathbf{C}([-\tau_r,0],\mathbf{R}^n):\mathscr{D}\boldsymbol{\phi}=0\} \end{cases}$$

的零解是一致渐近稳定的.

系统(1)和系统(2)稳定的必要条件是算子 $\mathscr{D}$ 是稳定的[11]. 对于标称系统(1)有下面的定理.

定理 1 对于给定的标量 $\tau_k>0,k=1,\cdots,r$,标称系统(4)是渐近稳定的,如果算子 $\mathscr{D}$ 是稳定的,并且存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>0,\boldsymbol{Q}_i=\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0$ $(i=1,\cdots,r-1)$,非负定矩阵 $\boldsymbol{X}_{ii}^{(k)}=\boldsymbol{X}_{ii}^{(k)\mathrm{T}}\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{Y}_{ii}=\boldsymbol{Y}_{ii}^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,以及任意矩阵 $\boldsymbol{X}_{ij}^{(k)},\boldsymbol{Y}_{ij}(i=1,\cdots,r+3;i<j\leqslant r+3;k=1,\cdots,r-1)$ 使得下列 LMIs 成立:

$$\boldsymbol{\varPsi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varPsi}_{11} & \boldsymbol{\varPsi}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\varPsi}_{1r} & \boldsymbol{\varPsi}_{1\,r+1} & \boldsymbol{\varPsi}_{1\,r+2} & A_0^{\mathrm{T}}S \\ * & \boldsymbol{\varPsi}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\varPsi}_{2r} & \boldsymbol{\varPsi}_{2\,r+1} & \boldsymbol{\varPsi}_{2\,r+2} & \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{\varPsi}_{rr} & \boldsymbol{\varPsi}_{r\,r+1} & \boldsymbol{\varPsi}_{r\,r+2} & \boldsymbol{A}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \\ * & * & \cdots & * & \boldsymbol{\varPsi}_{r+1\,r+1} & \boldsymbol{\varPsi}_{r+1\,r+2} & 0 \\ * & * & \cdots & * & * & \boldsymbol{\varPsi}_{r+2\,r+2} & \boldsymbol{A}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_1 & \cdots & \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_{r-1} & 0 & \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_r & -\boldsymbol{S} \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\varPhi}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11}^{(k)} & \boldsymbol{X}_{12}^{(k)} & \cdots & \boldsymbol{X}_{1\,r+2}^{(k)} & \boldsymbol{X}_{1\,r+3}^{(k)} \\ * & \boldsymbol{X}_{22}^{(k)} & \cdots & \boldsymbol{X}_{2\,r+2}^{(k)} & \boldsymbol{X}_{2\,r+3}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{X}_{r+2\,r+2}^{(k)} & \boldsymbol{X}_{r+2\,r+3}^{(k)} \\ * & * & \cdots & * & \boldsymbol{X}_{r+3\,r+3}^{(k)} \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\varXi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{Y}_{12} & \cdots & \boldsymbol{Y}_{1\,r+2} & \boldsymbol{Y}_{1\,r+3} \\ * & \boldsymbol{Y}_{22}^{(k)} & \cdots & \boldsymbol{Y}_{2\,r+2}^{(k)} & \boldsymbol{Y}_{2\,r+3}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{Y}_{r+2\,r+2} & \boldsymbol{Y}_{r+2\,r+3} \\ * & * & \cdots & * & \boldsymbol{Y}_{r+3\,r+3} \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{8}$$

其中:

$$\boldsymbol{\varPsi}_{11} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{Q}_i + \sum_{k=1}^{r-1}(\boldsymbol{X}_{1\,r+3}^{(k)} + \boldsymbol{X}_{1\,r+3}^{(k)\,\mathrm{T}}) + \boldsymbol{Y}_{1\,r+3} + \boldsymbol{Y}_{1\,r+3}^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{11}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{11};$$

$$\boldsymbol{\varPsi}_{1j} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{j-1} - \boldsymbol{X}_{j-1\,r+3}^{(1)} + \sum_{k=1}^{r-1}\boldsymbol{X}_{j\,r+3}^{(k)\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}_{j\,r+2}^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{1j}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{1j} \quad (j=2,\cdots,r);$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{1\,r+1} = -\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_r + \sum_{k=1}^{r-1}\boldsymbol{X}_{r+1\,r+3}^{(k)\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}_{r+1\,r+3}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{Y}_{1\,r+3} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{1\,r+1}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{1\,r+1};$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{1\,r+2} = \sum_{k=1}^{r-1}\boldsymbol{X}_{r+2\,r+3}^{(k)\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}_{r+2\,r+3}^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{1\,r+2}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{1\,r+2};$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{2\,r+1} = -\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_r - \boldsymbol{X}_{r+1\,r+3}^{(1)} - \boldsymbol{Y}_{2\,r+3} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{2\,r+1}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{2\,r+1};$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{ij} = -\boldsymbol{X}_{j\,r+3}^{(i-1)\mathrm{T}} - \boldsymbol{X}_{i\,r+3}^{(j-1)} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{ij}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{ij} \quad (2 \leqslant i < j \leqslant r);$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{i\,r+1} = -\boldsymbol{X}_{r+1\,r+3}^{(i-1)\mathrm{T}} - \boldsymbol{Y}_{i\,r+3} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{i\,r+1}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{i\,r+1} \quad (3 \leqslant i \leqslant r);$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{i\,r+2} = -\boldsymbol{X}_{r+2\,r+3}^{(i-1)\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{i\,r+2}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{i\,r+2} \quad (2 \leqslant i \leqslant r);$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{ii} = -\boldsymbol{Q}_{i-1} - \sum_{k=1}^{r-1}\left(\boldsymbol{X}_{i\,r+3}^{(k)} + \boldsymbol{X}_{ir+3}^{(k)\mathrm{T}}\right) + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{ii}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{ii} \quad (i = 2,\cdots,r+1);$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{r+1\,r+2} = -\boldsymbol{Y}_{r+2\,r+3}^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{r+1\,r+2}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{r+1\,r+2};$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{r+2\,r+2} = -\boldsymbol{R} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{r+2\,r+2}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{r+2\,r+2};$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R} + \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\boldsymbol{X}_{r+3\,r+3}^{(k)} + \tau_r\boldsymbol{Y}_{r+3\,r+3}. \tag{9}$$

证明 选取 Lyapunov-Krasovskii 泛函如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_t) = {} & (\mathscr{D}\boldsymbol{x}_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\mathscr{D}\boldsymbol{x}_t + \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \\ & \int_{t-\tau_r}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_r\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \int_{t-\tau_r}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s + \\ & \sum_{k=1}^{r-1}\int_{-\tau_k}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}_{k+4\,k+4}^{(k)}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \\ & \int_{-\tau_r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Y}_{r+3\,r+3}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{10}$$

其中：

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} > 0, \boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} > 0 \ (i = 1,\cdots,r-1)$ 是权矩阵，并且 $\boldsymbol{X}_{r+3\,r+3}^{(k)} = \boldsymbol{X}_{r+3\,r+3}^{(k)\mathrm{T}} \geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{Y}_{r+3\,r+3} = \boldsymbol{Y}_{r+3\,r+3}^{\mathrm{T}} \geqslant 0$. 所有的这些矩阵都是待定矩阵，现求 $V(\boldsymbol{x}_t)$ 沿着系统(4)的迹的导数，有

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}_t) = {} & 2(\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\left[\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{r-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i)\right] + \\ & \sum_{i=1}^{r-1}\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i)\right] + \\ & \sum_{i=1}^{r-1}\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i)\right] + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_r\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_r)\boldsymbol{Q}_r\boldsymbol{x}(t-\tau_r) + \\ & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-\tau_r)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau_r) + \\ & \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}_{k+4\,k+4}^{(k)}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \tau_r\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_{r+3\,r+3}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \\ & \sum_{k=1}^{r-1}\int_{t-\tau_k}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}_{k+4\,k+4}^{(k)}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s - \\ & \int_{t-\tau_r}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Y}_{r+3\,r+3}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{11}$$

根据牛顿-莱布尼茨公式有

$$\boldsymbol{x}(t-\tau_i) = \boldsymbol{x}(t) - \int_{t-\tau_i}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s, \quad i = 1,\cdots,r. \tag{12}$$

根据式(11)，对任意的 $\boldsymbol{X}_{i\,r+3}^{(k)}, \boldsymbol{Y}_{i\,r+3}\,(i = 1,\cdots,r+2; k = 1,\cdots,r-1)$ 下列式子成立：

$$2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}_{1\,r+3}^{(1)} + \sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{X}_{i+1\,r+3}^{(1)} + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-\tau_r)\boldsymbol{X}_{r+2\,r+3}^{(1)}\right]\cdot\left[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-\tau_k) - \int_{t-\tau_k}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right] = 0,$$

$$\vdots$$

$$2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}_{1\,r+3}^{(r-1)} + \sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{X}_{i+1\,r+3}^{(r-1)} + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-\tau_r)\boldsymbol{X}_{r+2\,r+3}^{(r-1)}\right]\cdot\left[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-\tau_k) - \int_{t-\tau_k}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right] = 0,$$

$$2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_{1\,r+3} + \sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{Y}_{i+1\,r+3} + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-\tau_r)\boldsymbol{Y}_{r+2\,r+3}\right]\cdot\left[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-\tau_r) - \int_{t-\tau_r}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right] = 0.$$

为便于分析，将以上 r 个式子统一记为 Σ.

对于任意具有适当维数的矩阵 $\boldsymbol{X}_{ij}^{(k)}, \boldsymbol{Y}_{ij}\,(i = 1,\cdots,r+2; i \leqslant j \leqslant r+2; k = 1,\cdots,r-1)$，下列式子是恒成立的：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-\tau_1)\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}(t-\tau_r)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau_r)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{11} & \boldsymbol{\Lambda}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{1\,r+2}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Lambda}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{2\,r+2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\Lambda}_{1\,r+1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Lambda}_{2\,r+1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{r+1\,r+2}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{1\,r+2}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Lambda}_{2\,r+2}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{r+2\,r+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-\tau_1)\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}(t-\tau_r)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau_r)\end{pmatrix} = 0. \tag{13}$$

其中：

$$\boldsymbol{\Lambda}_{ij} = \sum_{k=1}^{r-1}\tau_k(\boldsymbol{X}_{ij}^{(k)} - \boldsymbol{X}_{ij}^{(k)}) + \tau_r(\boldsymbol{Y}_{ij} - \boldsymbol{Y}_{ij}),$$
$$i = 1,\cdots,r+2; i \leqslant j \leqslant r+2; k = 1,\cdots,r-1. \tag{14}$$

现在，将 Σ 和式(13)左边的式子代入到 $\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)$，考虑对任意的 $r \geqslant 0$ 和任意的函数 $f(t)$，下式恒成立：

$$\int_{t-r}^{t}f(t)\mathrm{d}s = rf(t),$$

则 $\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)$ 可以表示为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t) = z_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}z_1(t) - \sum_{k=1}^{r-1}\int_{t-\tau_k}^{t}z_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Phi}^{(k)}z_2(t,s)\mathrm{d}s - \int_{t-\tau_r}^{t}z_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Xi}z_2(t,s)\mathrm{d}s. \tag{15}$$

这里

$z_1(t)=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_r),\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-\tau_r))^{\mathrm{T}}$,

$z_2(t,s)=(z_1^{\mathrm{T}}(t),\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s))^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} & \cdots & \boldsymbol{M}_{1\,r} & \boldsymbol{M}_{1\,r+1} & \boldsymbol{M}_{1\,r+2} \\ * & \boldsymbol{M}_{22} & \cdots & \boldsymbol{M}_{2\,r} & \boldsymbol{M}_{2\,r+1} & \boldsymbol{M}_{2\,r+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{M}_{r\,r} & \boldsymbol{M}_{r\,r+1} & \boldsymbol{M}_{r\,r+2} \\ * & * & \cdots & * & \boldsymbol{M}_{r+1\,r+1} & \boldsymbol{M}_{r+1\,r+2} \\ * & * & \cdots & * & * & \boldsymbol{M}_{r+2\,r+2} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{M}_{ij}=\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_{ij}+\boldsymbol{A}_{i-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_{j-1} & (i=1,\cdots,r;i\leqslant j\leqslant r); \\ \boldsymbol{\Psi}_{ij} & (i=1,\cdots,r+1;j=r+1); \\ \boldsymbol{\Psi}_{ij}+\boldsymbol{A}_{i-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_{j-2} & (i=1,\cdots,r;j=r+2); \\ \boldsymbol{\Psi}_{r+1\,r+2} & (i=r+1;j=r+2); \\ \boldsymbol{\Psi}_{r+2\,r+2}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_r & (i=r+2;j=r+2). \end{cases}$$

$\boldsymbol{\Phi}^{(k)},\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Psi}_{ij}(i=1,\cdots,r+2;i\leqslant j\leqslant r+2;k=1,\cdots,r-1)$以及 $\boldsymbol{S}$ 已经在(6)—(9)定义. 如果 $\boldsymbol{\Omega}<0,\boldsymbol{\Phi}^{(k)}\geqslant 0\ (k=1,\cdots,r-1)$和 $\boldsymbol{\Xi}\geqslant 0$,则对任意 $z_1(t)\neq 0$,有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)<0$. 利用 Schur 补引理,$\boldsymbol{\Phi}^{(k)}<0\ (k=1,\cdots,r-1)$等价于 $\boldsymbol{\Omega}<0$. 所以如果 LMIs(6)—(8)被满足,则系统(4)是渐近稳定的.

证毕.

定理 2 对于给定的标量 $\tau_k>0(k=1,\cdots,r)$,时变不确定系数多离散时滞中立型系统(1)是鲁棒稳定的,如果算子 $\mathscr{D}$ 是稳定的,并且存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>0,\boldsymbol{Q}_i=\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0\ (i=1,\cdots,r-1)$,非负定矩阵 $\boldsymbol{X}_{ii}^{(k)}=\boldsymbol{X}_{ii}^{(k)\mathrm{T}}\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{Y}_{ii}=\boldsymbol{Y}_{ii}^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,以及任意矩阵 $\boldsymbol{X}_{ij}^{(k)},\boldsymbol{Y}_{ij}(i=1,\cdots,r+3;i<j\leqslant r+3;k=1,\cdots,r-1)$和标量 $\lambda>0$,使得 LMIs(7),(8)和(16)成立. 在(16)中,$\boldsymbol{\Psi}_{ij}(i=1,\cdots,r+2;i\leqslant j\leqslant r+2)$以及 $\boldsymbol{S}$ 都已在(9)中给出.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12}\cdots & \boldsymbol{N}_{1\,r} & \boldsymbol{N}_{1\,r+1} & \boldsymbol{N}_{1\,r+2} & \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{PD} \\ * & \boldsymbol{N}_{22}\cdots & \boldsymbol{N}_{2\,r} & \boldsymbol{N}_{2\,r+1} & \boldsymbol{N}_{2\,r+2} & \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & *\cdots & \boldsymbol{N}_{r\,r} & \boldsymbol{N}_{r\,r+1} & \boldsymbol{N}_{r\,r+2} & \boldsymbol{A}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} & 0 \\ * & *\cdots & * & \boldsymbol{N}_{r+1\,r+1} & \boldsymbol{N}_{r+1\,r+2} & 0 & -\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{PD} \\ * & *\cdots & * & * & \boldsymbol{N}_{r+2\,r+2} & \boldsymbol{A}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} & 0 \\ * & *\cdots & * & * & * & -\boldsymbol{S} & \boldsymbol{SD} \\ * & *\cdots & * & * & * & * & -\lambda\boldsymbol{I} \end{pmatrix}<0. \quad (16)$$

其中:

$$\boldsymbol{N}_{ij}=\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_{ij}+\lambda\boldsymbol{E}_{i-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{j-1} & (i=1,\cdots,r;i\leqslant j\leqslant r); \\ \boldsymbol{\Psi}_{ij} & (i=1,\cdots,r+2;i\leqslant j;j=r+1,r+2). \end{cases}$$

证明 如果将(6)中的 $\boldsymbol{A}_i$ 分别用 $\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{DF}(t)\boldsymbol{E}_i\ (i=0,\cdots,r-1)$代替,则(6)将等价于以下条件:

$$\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\Gamma}_2+\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}_1<0. \quad (17)$$

其中:

$$\boldsymbol{\Gamma}_1=(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},0,\overbrace{\cdots}^{r-3},0,-\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_r,0,\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2=(\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_1,\cdots,\boldsymbol{E}_r,0,0,0).$$

由引理 1 可知,式(17)成立的充分必要条件是存在 $\lambda>0$ 使下式成立:

$$\boldsymbol{\Psi}+\lambda^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1+\lambda\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_2<0. \quad (18)$$

由 Schur 补引理,可以发现式(18)等价于式(16). 证毕.

3 数值例子

在(1)中,令 $r=3$,则系统(1)变为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}_0(t))\boldsymbol{x}(t)+ \\ \quad(\boldsymbol{A}_1+\Delta\boldsymbol{A}_1(t))\boldsymbol{x}(t-\tau_1)+ \\ \quad(\boldsymbol{A}_2+\Delta\boldsymbol{A}_2(t))\boldsymbol{x}(t-\tau_2)+\boldsymbol{A}_3\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau_3), \quad t>0, \\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t), \quad \boldsymbol{\phi}(t)\in\mathbf{C}^1[-\tau,0]. \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{\phi}(t)=0,t\in[-\tau,0]$,

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & -2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{pmatrix},0\leqslant c<1,$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=0.2\boldsymbol{I}.$$

表 1 列出了对于确定的 c,系统(1)中 τ_1 与 τ_2 的最大离散时滞上界的计算结果.

表 1 最大离散时滞上界

Table 1 Maximum upper bounds of discrete delay

τ	c				
	0	0.05	0.10	0.15	0.20
$\tau_1=\tau_2=\tau_3$	2.31	1.98	1.71	1.45	1.22
$\tau_1=\tau_2\neq\tau_3,\tau_3=0.1$	2.31	2.15	2.03	1.91	1.78
$\tau_1\neq\tau_2\neq\tau_3,\tau_3=0.1$	2.31	2.11	1.96	1.82	1.65

4 结论

本文给出了判定时变不确定系数多离散时滞中立型系统时滞相关稳定性的 2 个定理. 在定理中考虑了 $\boldsymbol{x}(t-\tau_i)$ 和 $\boldsymbol{x}(t)-\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$ 的关系,并且利

用线性矩阵不等式选取的自由权矩阵考虑到了 $\boldsymbol{x}(t-\tau_i)$ 和 $\boldsymbol{x}(t)-\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$ 的相互影响.本文给出的结果都是与时滞中立项和离散时滞相关的.最后用数值例子说明了本文方法的有效性和较小的保守性.

参考文献
References

[1] Kolmanovskii V B, Myshkis A. Applied theory of functional differential equations[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992

[2] Kolmanovskii V B, Nosov V R. Stability of functional differential equations[M]. London: Academic Press, 1986

[3] Kuang Y. Delay differential equations with applications in population dynamics[M]. Boston: Academic Press, 1993

[4] Hara S, Yamamoto Y, Omata T, et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic signals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33(7): 659-668

[5] Mahmoud M S. Robust H_∞ control of linear neutral systems[J]. Automatica, 2000, 36(5): 757-764

[6] Fridman E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. Systems & Control Letters, 2001, 43(4): 309-319

[7] Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control: Constant and time-varying delays[J]. Int J Control, 2003, 76(1): 48-60

[8] Han Q L. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays[J]. Automatica, 2004, 40(10): 1791-1796

[9] He Y, Wu M, She J H, et al. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays[J]. Systems & Control Letters, 2004, 51(1): 57-65

[10] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-411

[11] Hale J K. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1977

[12] 吴敏,何勇.时滞系统鲁棒控制:自由权矩阵方法[M].北京:科学出版社,2008
WU Min, HE Yong. Robust control of time-delay system: Free weighing matrices method[M]. Beijing: Science Press, 2008

Delay-dependent robust stability for uncertain coefficients neutral systems with multiple discrete delays

MA Yue[1] GAO Cunchen[1] CONG Xinwei[1]
1 School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100

Abstract The delay-dependent robust stability is concerned for the neutral type systems with time-varying uncertain coefficients and discrete multiple delays in this paper. Based on linear matrix inequality, a simplified method is proposed to calculate the free weighing matrices and the upper bounds on the delays for the system. Both neutral delays and discrete delays are considered in the system and some sufficient conditions for the stability and robust stability of the system are derived. The numerical example is given to demonstrate that the proposed method is feasible and less conservative.

Key words time-delay neutral type system; time-varying coefficient; uncertain coefficients; robust stability; linear matrix inequality