文章编号: 1674-7070(2012)03-0285-04

含有 Bernoulli 数和 Euler 数的恒等式

王琛颖[1]　宗兆余[1]

摘要

Bernoulli 数和 Euler 数是重要的经典组合数,它们在数学和理论物理中具有广泛的应用.利用基本三角函数的幂级数展开式结合发生函数方法,建立若干含有 Bernoulli 数和 Euler 数的算术恒等式.

关键词

三角函数展开式; Bernoulli 数; Euler 数

中图分类号 0157.1

文献标志码 A

收稿日期 2011-08-03

资助项目 南京信息工程大学科研启动基金(S8110102001);南京信息工程大学国家自然科学基金预研项目(S8111116001)

作者简介

王琛颖,女,博士,研究方向为组合数学与基本超几何级数. wang.chenying@nuist.edu.cn

1 南京信息工程大学 数学与统计学院,南京,210044

0 引言

Bernoulli 数 $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ 和 Euler 数 $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$ 是数学史上著名的两组数列,它们在经典分析、数论以及理论物理中具有广泛的应用.对与这两类数相关的恒等式的研究一直是组合数学与特殊函数研究工作者感兴趣的课题. Bernoulli 数和 Euler 数一般可通过下面的两个三角函数展开式来定义[1-2]:

$$x\cot x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}B_{2n}, \tag{1}$$

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}E_{2n}. \tag{2}$$

这里列举 Bernoulli 数和 Euler 数的有限项以供参考:

$B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_4=-\frac{1}{30}$; 当 $k\geqslant 1$ 时, $B_{2k+1}=0, B_{2k}\neq 0$;

$E_0=1, E_2=-1, E_4=5, E_6=-61.$

通过引入三角函数关系式 $\tan x=\cot x-2\cot(2x)$, $\csc x=\cot x+\tan\frac{x}{2}$, 不难推出另外两个关于 Bernoulli 数的三角函数展开式:

$$x\tan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}(1-4^n)B_{2n}, \tag{3}$$

$$x\csc x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}(2-4^n)B_{2n}. \tag{4}$$

目前,有大量数学文献采用不同的方法处理与 Bernoulli 数和 Euler 数或者它们的多项式相关的恒等式.如文献[3-5]着重研究了卷积公式;文献[6-7]专门针对 Miki-型恒等式做了研究;文献[8-9]是关于 Bernoulli 和 Euler 多项式恒等式的研究.另外,文献[10]中也收录了大量有关 Bernoulli 数和 Euler 数的恒等式.

2005 年,Liu 等[11]通过对几个三角函数幂级数展开式的研究,建立了一些关于 Bernoulli 数和 Euler 数的恒等式,这些恒等式是将前有限个正奇数的偶次幂之和表示成有限项 Bernoulli 数和/或 Euler 数的线性组合. 2009 年,Chu 等[12]从大家熟知的三角函数关系出发,利用前文提到的四个基本的三角函数幂级数展开式,不仅推广了文献[11]的结果,而且建立了新的正整数幂之和与 Bernoulli 数和 Euler 数间的关系.注意到这两项工作都是通过对基本三角函数关系的处理获得了与经典组合数 Bernoulli 数和 Euler 数相关的恒等式,本文继续

深入探索通过三角函数关系研究含有 Bernoulli 数和 Euler 数的部分和，着重讨论 Bernoulli 数之间、Euler 数之间以及 Bernoulli 数与 Euler 数之间的关系，建立含有自由参数 α,β 的与 Bernoulli 数和 Euler 数相关的求和公式与变换关系式. 本文中，如无特别说明，始终设 n 为任意非负整数. 另外，文中还将用到正弦函数和余弦函数的 Taylor 展开式：

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{5}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{6}$$

1 考虑三角函数关系 $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

本节利用三角函数积化和差公式

$$2\sin\alpha x\cos\beta x = \sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x \tag{7}$$

建立几个与 Bernoulli 数和 Euler 数相关的算术恒等式.

1.1 含有 Bernoulli 数的求和公式

当 $\alpha\neq 0$ 时，式(7)可化为

$$2\cos\beta x = \csc\alpha x\,[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

在其中代入展开式(4)—(6)，不难得到下面的幂级数表达式：

$$\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{[(\alpha+\beta)^{2j+1}+(\alpha-\beta)^{2j+1}]}{\alpha^{1-2i}(2i)!(2j+1)!}(2-4^i)B_{2i}x^{2i+2j} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

比较上式两端 x^{2n} 项前面的系数，可获得如下含有 Bernoulli 数的恒等式.

定理 1 对于任意实数 α,β $(\alpha\neq 0)$，有下面的恒等式成立：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}\frac{[(\alpha+\beta)^{2n-2i+1}+(\alpha-\beta)^{2n-2i+1}]}{\alpha^{1-2i}}(2-4^i)B_{2i} = 2(2n+1)\beta^{2n}.$$

此定理包含了一些简单的关于 Bernoulli 数的求和公式.

推论 1 (在定理 1 中令 $\beta=0$（见文献[11] Eq. 5))

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}(2-4^i)B_{2i} = 0，其中\ n>0.$$

推论 2 (在定理 1 中令 $\beta=\alpha$（见文献[11] Eq. 8))

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}\frac{2-4^i}{4^i}B_{2i} = \frac{2n+1}{4^n}.$$

推论 3 (在定理 1 中令 $\beta=2\alpha$)

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}(3^{2n-2i+1}-1)(2-4^i)B_{2i} = 2^{2n+1}(2n+1).$$

1.2 含有 Euler 数的求和公式

将式(7)等价地化为

$$2\sin\alpha x = \sec\beta x\,[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

利用展开式(2)和(5)，可以得出下面的表达式：

$$\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{\beta^{2i}[(\alpha+\beta)^{2j+1}+(\alpha-\beta)^{2j+1}]}{(2i)!(2j+1)!}E_{2i}x^{2i+2j+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

比较上式两端 x^{2n+1} 项前面的系数，得到如下关于 Euler 数的恒等式.

定理 2 对于任意实数 α,β，有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}\beta^{2i}[(\alpha+\beta)^{2n-2i+1}+(\alpha-\beta)^{2n-2i+1}]E_{2i} = 2\alpha^{2n+1}.$$

推论 4 (在定理 2 中令 $\alpha=2\beta\neq 0$)

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}(3^{2n-2i+1}+1)E_{2i} = 4^{n+1}.$$

1.3 关于 Bernoulli 数和 Euler 数的变换关系式

将式(7)改写为

$$2\tan\alpha x\cos\beta x = \sec\alpha x\,[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

并在上式左右两端应用展开式(2)、(3)和(5)、(6)，得到表达式：

$$\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i}\frac{\alpha^{2i}[(\alpha+\beta)^{2j+1}+(\alpha-\beta)^{2j+1}]}{(2i)!(2j+1)!}E_{2i}x^{2i+2j+1} = 2\sum_{i\geqslant 1,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{4^i(1-4^i)\alpha^{2i-1}\beta^{2j}}{(2i)!(2j)!}B_{2i}x^{2i+2j-1}.$$

比较上式左右两端 x^{2n+1} 项的系数，得到如下含有 Bernoulli 数和 Euler 数的变换公式.

定理 3 对于任意实数 α 和 β，当 $n>0$ 时，有下面的恒等式成立：

$$n\sum_{i=0}^{n}\binom{2n-1}{2i}\alpha^{2i}[(\alpha+\beta)^{2n-2i-1}+(\alpha-\beta)^{2n-2i-1}]E_{2i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}4^i(4^i-1)\alpha^{2i-1}\beta^{2n-2i}B_{2i}.$$

此定理包含了下面的求和公式.

推论 5 (在定理 3 中令 $\beta\to 0$（见文献[10] Eq. 51.1.2))

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n-1}{2i}E_{2i} = \frac{4^n}{2n}(4^n-1)B_{2n}.$$

2 考虑三角函数关系 $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

本节通过积化和差公式

$$2\sin\alpha x\sin\beta x = \cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x \quad (8)$$

的两种等价形式,建立一个关于 Bernoulli 数的求和公式以及一个 Bernoulli 数和 Euler 数间的的变换关系式.

2.1 含有 Bernoulli 数的求和公式

当 $\alpha \neq 0$ 时,式(8)可化为

$$2\sin\beta x = \csc\alpha x\,[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

代入展开式(4)—(6),不难得到如下含有 Bernoulli 数的关系式:

$$\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{[(\alpha-\beta)^{2j}-(\alpha+\beta)^{2j}](2-4^i)B_{2i}}{\alpha^{1-2i}(2i)!(2j)!}x^{2i+2j-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

比较上式两端 x^{2n-1} 前面的系数,可以得到如下含有 Bernoulli 数的求和公式.

定理 5 对于任意的实数 α,β,有下面的恒等式成立:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}\alpha^{2i}[(\alpha+\beta)^{2n-2i}-(\alpha-\beta)^{2n-2i}](2-4^i)B_{2i} = 4n\alpha\beta^{2n-1}.$$

推论 6 (在定理 5 中取 $\alpha=2\beta$)

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}4^i(3^{2n-2i}-1)(2-4^i)B_{2i} = 8n.$$

2.2 关于 Bernoulli 数和 Euler 数的变换关系式

考虑式(8)的另一个等价形式

$$2\tan\alpha x\sin\beta x = \sec\alpha x\,[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

在上式两端代入展开式(2)、(3)和(5)、(6),推出如下幂级数关系式:

$$\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{[(\alpha-\beta)^{2j}-(\alpha+\beta)^{2j}]\alpha^{2i}E_{2i}}{(2i)!(2j)!}x^{2i+2j} = 2\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{4^i(1-4^i)\alpha^{2i-1}\beta^{2j+1}B_{2i}}{(2i)!(2j+1)!}x^{2i+2j},$$

比较上式左右两端 x^{2n} 项前面的系数,得到下面 Bernoulli 数和 Euler 数间的变换关系式.

定理 6 对于任意的实数 α 和 β,有下面的恒等式成立:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}\alpha^{2i+1}[(\alpha-\beta)^{2n-2i}-(\alpha+\beta)^{2n-2i}]E_{2i} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}\frac{4^i(1-4^i)\alpha^{2i}}{\beta^{2i-2n-1}}B_{2i}.$$

在定理 6 中令 $\alpha=2\beta$,得到下面关于 Bernoulli 数和 Euler 数较简单的变换关系.

推论 7
$$(2n+1)\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}4^i(3^{2n-2i}-1)E_{2i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}4^{2i}(4^i-1)B_{2i}.$$

3 考虑三角函数关系 $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$

考虑积化和差公式

$$2\cos\alpha x\cos\beta x = \cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x \quad (9)$$

的两种等价形式,推导含有 Bernoulli 数或 Euler 数的算术恒等式.

3.1 含有 Euler 数的求和公式

由式(9)容易得到三角函数关系式

$$2\cos\beta x = \sec\alpha x\,[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x],$$

在上式中应用展开式(2)和(6),不难推出如下幂级数展开式:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{\alpha^{2i}[(\alpha-\beta)^{2j}+(\alpha+\beta)^{2j}]}{(2i)!(2j)!}E_{2i}x^{2i+2j},$$

比较上式两端 x^{2n} 项前面的系数,得到下述含有 Euler 数的求和公式.

定理 7 对于任意实数 α,β,有下面的恒等式成立:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2j}\alpha^{2n-2i}[(\alpha-\beta)^{2i}+(\alpha+\beta)^{2i}]E_{2n-2i} = 2\beta^{2n}.$$

当 $\alpha=1,\beta=0$ 时,定理 7 退化为下述已知著名结论.

推论 8[1] 当 $n\geqslant 1$ 时,$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}E_{2i}=0$.

3.2 关于 Bernoulli 数的变换关系式

当 $\alpha\neq 0$ 时,式(9)可化为

$$2\cot\alpha x\cos\beta x = \csc\alpha x\,[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x],$$

在上式左右两端代入相关三角函数的幂级数展开式(1)、(4)和(6),推得

$$\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{[(\alpha-\beta)^{2j}+(\alpha+\beta)^{2j}]}{\alpha^{1-2i}(2i)!(2j)!}(2-4^i)B_{2i}x^{2i+2j-1} = 2\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^{i+j}\frac{4^i\alpha^{2i-1}\beta^{2j}}{(2i)!(2j)!}B_{2i}x^{2i+2j-1},$$

比较两端 x^{2n-1} 项前面的系数,得到如下关于 Bernoulli 数的变换关系式.

定理 8 对于任意的实数 α 和 β,有下面的变换公式成立:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}\alpha^{2i}\left[(\alpha-\beta)^{2n-2i}+(\alpha+\beta)^{2n-2i}\right](2-4^{i})B_{2i}=2\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}4^{i}\alpha^{2i}\beta^{2n-2i}B_{2i}.$$

在上述定理中令 $\alpha=2\beta$,得到一个较为简洁的变换关系.

推论 9 $\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}2^{2i-1}(3^{2n-2i}+1)(2-4^{i})B_{2i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}4^{2i}B_{2i}$.

参考文献
References

[1] Stromberg K R. An introduction to classical real analysis [M]. Belmont,California: Wadsworth Inc,1981

[2] Wilf H S. Generatingfunctionology [M]. 2nd ed. Boston, MA: Academic Press,1994

[3] Agoh T,Dilcher K. Convolution identities and lacunary recurrences for Bernoulli numbers [J]. Journal of Number Theory,2007,124(1):105-122

[4] Dilcher K. Sums of products of Bernoulli numbers [J]. Journal of Number Theory,1996,60(1):23-41

[5] Chu W C,Wang C Y. Convolution formulae for Bernoulli numbers [J]. Integral Transforms and Special Functions, 2010,21(6):437-457

[6] Miki H. A relation between Bernoulli numbers [J]. Journal of Number Theory,1978,10:297-302

[7] Gessel I M. On Miki's identity for Bernoulli numbers [J]. Journal of Number Theory,2005,110(1):75-82

[8] Cheon G S. A note on the Bernoulli and Euler polynomials [J]. Applied Mathematics Letters,2003,16(3): 365-368

[9] Srivastava H M,Pinter A. Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials [J]. Applied Mathematics Letters,2004,17(4):375-380

[10] Hansen E R. A table of series and products [M]. Englewood Cliffs,N J: Prentice-Hall,1975

[11] Liu G D,Luo H. Some identities involving Bernoulli numbers [J]. The Fibonacci Quarterly,2005,43(3):208-212

[12] Chu W C,Wang C Y. Arithmetic identities involving Bernoulli and Euler numbers [J]. Results in Mathematics, 2009,55(1/2):65-77

Some identities involving Bernoulli and Euler numbers

WANG Chenying[1] ZONG Zhaoyu[1]

1 School of Mathematics & Statistics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract The Bernoulli and Euler numbers are important classical numbers and have wide applications in mathematics and physics. By applying the formal power series method to some elementary trigonometric identities,we establish several arithmetic identities involving Bernoulli and Euler numbers.

Key words trigonometric sums; Bernoulli numbers; Euler numbers