文章编号: 1674-7070(2012)02-0190-03

有关 Gorenstein 投射猜想的一个注记

张孝金[1]

摘要

证明了对一个 Artinian 代数 A,如果它的左有限维数或右有限维数有限,则 A 满足 Gorenstein 投射猜想. 由此可知,Gorenstein 代数和表示维数小于等于 3 的代数上的 Gorenstein 投射猜想是成立的.

关键词

有限维数; Gorenstein 代数; Gorenstein 投射猜想

中图分类号 O154

文献标志码 A

收稿日期 2011-08-31

资助项目 南京信息工程大学科研启动基金;江苏省高校自然科学基金(11KJB110007);国家自然科学基金青年基金(11101217)

作者简介

张孝金,男,博士,研究方向为环与代数. xjzhang@nuist.edu.cn

1 南京信息工程大学 数理与统计学院,南京,210044

0 引言

在同调代数与代数表示论中,许多著名的猜想,如广义 Nakayama 猜想仍然是代数学者们关心的热点问题. 广义 Nakayama 猜想是由 Auslander 等[1-2] 20 世纪 70 年代提出来的,它的内容是一个有限生成的 A-模 M 是投射的如果 M 满足 $Ext_A^i(M, A\oplus M)=0, \forall i\geqslant 1$. Yamagata[3] 给出了广义 Nakayama 猜想如下的等价刻画: 对任意一个单模 A-模 S,都有自然数 n 使得 $Ext_A^n(S, A)\neq 0$. 到目前为止,这个猜想仍然是公开的,只有一些特殊的代数的情况得到了解决[4-6].

另一方面,结合相对同调代数,黄和罗[7] 提出了广义 Nakayama 猜想的一种特殊的情况——Gorenstein 投射猜想: 一个有限生成的 Gorenstein 投射 A-模 M 是投射的如果 $Ext_A^i(M, M)=0, \forall i\geqslant 1$. 并且他们证明了 Gorenstein 投射猜想对于交换 Artinian 环是成立的.

在本文中将推广黄和罗[7] 的结果并证明如下的定理:

定理 1 设 A 是一个 Artinian 代数,如果 A 的左或右有限维数 $<\infty$,则 A 的反环代数 A^o 满足广义 Nakayama 猜想. 特别地,A 满足 Gorenstein 投射猜想.

定理 2 设 A 是一个 Gorenstein 代数,则 Gorenstin 投射猜想成立.

1 概念和主要结果

设 A 是一个代数且 M 是一个 A-模. 设正合列 $\cdots\to P_i(M)\to\cdots\to P_1(M)\to P_0(M)\to M\to 0$ 是 M 的一个极小投射分解. 记 $\Omega^i M$ 为 M 的第 i 个合冲. 对偶的,可以给出 M 的一个极小内射分解 $0\to M\to I^0(M)\to I^1(M)\to\cdots\to I^n(M)\to\cdots$ 以及第 i 个余合冲 $\Omega^{-i}M$. 记 $Pd_A M$、$Id_A M$ 为 M 的对应的投射、内射维数. 记代数 A 的左有限维数 $lfd(A) = \sup\{Pd_A M \mid Pd_A M<\infty\}$. 对应地,记右有限维数为 $rfd(A)$. 一般说来,左、右有限维数不等. 记 $Id_A A$ 和 $Id_{A^o} A$ 分别为 A 的作为左、右 A-模的内射维数. A 称为 Gorenstein 如果 $Id_A A$ 和 $Id_{A^o} A$ 都有限. 首先有如下关于 $lfd(A)$ 与 $Id_A A$ 的关系[8].

引理 1 设 A 是一个代数. 则 $lfd(A)\leqslant Id_A A$. 对应地,$rfd(A)\leqslant Id_{A^0} A$.

下面回顾一下广义 Nakayama 猜想与 Gorenstein 投射猜想并给出它们之间的联系. 首先需要:

定义1 一个A-模M称为Gorenstein投射的如果$Ext_A^i(M,A)=0$和$Ext_A^i(TrM,A)=0$对$\forall i\geqslant 1$成立，其中Tr为Auslander转置.

现在给出广义Nakayama猜想与Gorenstein投射猜想内容：

定义2 1）广义Nakayama猜想：一个A模M是投射的如果$Ext_A^i(M,A\oplus M)=0,\forall i\geqslant 1$. 等价地，可写为：对任意一个单模$A$-模$S$，都有自然数$n$使得$Ext_A^n(S,A)\neq 0$.

2）Gorenstein投射猜想：一个有限生成的Gorenstein投射A-模M是投射的如果$Ext_A^i(M,M)=0,\forall i\geqslant 1$.

不难看出，A满足广义Nakayama猜想则A必满足Gorenstein投射猜想. 下面给出本文的几个主要结果：

定理1 设A是一个代数. 如果$lfd(A)<\infty$或者$rfd(A)<\infty$，则其反代数A^o满足广义Nakayama猜想. 特别地，A满足Gorenstein投射猜想.

由于交换Artinian环的$lfd(A)=rfd(A)=0$，定理1推广了罗和黄的结果. 结合引理1，不难看出一个Gorenstein代数A满足$lfd(A)<\infty$并且$rfd(A)<\infty$（两者相同都等于Id_AA）. 利用定理1可知：

定理2 设A是一个Gorenstein代数，则Gorenstin投射猜想成立.

由于代数A的表示维数$Rep(A)=inf\{gld(\mathrm{End}_AM)\}$，其中$M$是$A$-模的生成子余生成子，$\mathrm{End}_AM$为$M$的自同态环，$gld(\mathrm{End}_AM)$表示$M$的自同态环$\mathrm{End}_AM$的整体维数. 注意到表示维数是左、右对称的，即$Rep(A)=Rep(A^o)$，结合Igusa等[9]的结果$Rep(A)\leqslant 3$可得$lfd(A)<\infty$且$rfd(A)<\infty$，再由定理1可得：

定理3 设A是一个代数. 若$Rep(A)\leqslant 3$，则A满足Gorenstein投射猜想.

2 定理的证明及应用

定理1的证明以及主要定理的一些直接应用.

证明 由于右有限维数有限情况的证明是类似的，我们只给出左有限维数有限的情况的证明. 假设存在一个非零单A^o-模S使得$Ext_{A^o}{}^i(S,A)=0,\forall i\geqslant 0$. 且$lfd(A)=m<\infty$. 取$S$的一个极小投射分解：

$$\cdots\to P_i(S)\to\cdots\to P_1(S)\to P_0(S)\to S\to 0 \quad (1)$$

不难证明$Pd_{A^o}S=\infty$（否则若$Pd_{A^o}S=t$则$Ext_{A^o}{}^t(S,A)\neq 0$与假设矛盾）. 对(1)应用函子$(-)^*=Hom_{A^o}(-,A)$由$Ext_{A^o}{}^i(S,A)=0$对$\forall i\geqslant 0$成立则有以下A模正合列：

$$0\to(P_0(S))^*\to(P_1(S))^*\to(P_2(S))^*\to\cdots\to(P_i(S))^*\to\cdots \quad (2)$$

记$f_{m+1}:P_{m+1}(S)\to P_m(S)$，则$(f_{m+1})^*:(P_m(S))^*\to(P_{m+1}(S))^*$. 记$\mathrm{Im}(f_{m+1})^*$是态射$(f_{m+1})^*$的像，从(2)可得$\mathrm{Im}(f_{m+2})^*$的投射分解：

$$0\to(P_0(S))^*\to(P_1(S))^*\to\cdots\to(P_m(S))^*\to(P_{m+1}(S))^*\to\mathrm{Im}(f_{m+2})^*\to 0 \quad (3)$$

注意到$lfd(A)=m<\infty$，故态射$(f_1)^*:(P_0(S))^*\to(P_1(S))^*$可裂，因此$f=(f^*)^*$可裂，因此$S=0$与非零单模矛盾. 所以假设不成立，即对任意的非零单模S都存在自然数都有自然数n使得$Ext_A^n(S,A)\neq 0$. 因此广义Nakayama猜想对A^o成立. 由于Gorenstein投射猜想是广义Nakayama猜想的一种特殊情况，所以A^o满足Gorenstein投射猜想. 注意到A满足Gorenstein猜想当且仅当A^o满足Gorenstein猜想，结论得证.

3 应用

推论1 设A是一个Artinian局部代数，则A满足广义Nakayama猜想，因此A满足Gorenstein投射猜想.

证明 因为A是一个Artinian局部代数，所以$lfd(A)=rfd(A)=0$，由定理1结论成立.

推论2 设A是一个自内射代数，则Gorenstein投射猜想成立.

证明 因为自内射代数都是Gorenstein代数，由定理2可得结论.

最后，不是所有代数的Gorenstein投射猜想的证明都依赖于广义Nakayama猜想的证明.

致谢 感谢南京大学黄兆泳教授对本文的有用建议.

参考文献
References

[1] Auslander M，Reiten I. On a generalized version of the Nakayama conjecture [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1975，52(1)：69-74
[2] Auslander M，Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories [J]. Advances in Mathematics，1991，86(1)：111-152
[3] Yamagata K. Frobineus algebras [J]. Handbook of Algebra，1996，1：841-887

[4] Fuller K R, Zimmermann-Huisgen B. On the generalied Nakayama conjecture and the Cartan determinant problem [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1986, 294(2): 679-691
[5] Maroti A. A proof of a generalized Nakayama conjecture [J]. Bulletin of London Mathematical Society, 2006, 38(5): 777-785
[6] Wilson G V. The Cartan map on categories of graded modules [J]. Journal of Algebra, 1983, 85(2): 390-398
[7] Luo R, Huang Z Y. When are torsionless modules projective? [J]. Journal of Algebra, 2008, 320(5): 2156-2164
[8] Bass H. Injective dimension in Noetherian rings [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1962, 102(1): 18-29
[9] Igusa K, Todorov G G. On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras [J]. Fields Institute Communications, 2005, 45: 201-204

A note on Gorenstein projective conjecture

ZHANG Xiaojin[1]

1 School of Mathematics & Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

Abstract In this paper, we prove that an Artinian algera A satisfies the Gorenstein projective conjecture if the left finistic dimension or the right finistic dimension of A is finite. As a result, the Gorenstein projective conjecture is proved to be true for Gorenstein algebras and algebras with representation dimension less than or equal to 3.

Key words finistic dimension; Gorenstein algebras; Gorenstein projective conjecture