文章编号: 1674-7070(2012)02-0180-06

随机滞后微分方程的有界性

郭海军[1] 胡军浩[2]

摘要

研究了随机滞后微分方程的一致有界和一致最终有界. 利用 Lyapunov 函数和 Razumikhin 技巧,得到了一些关于随机滞后微分方程有界性新的 Razumikhin 定理,同时,证明随机滞后微分方程解的存在性,推广了相关的文献. 最后,给出例子证实定理的有效性.

关键词

随机滞后微分方程; 一致有界; 一致最终有界; Razumikhin 技巧

中图分类号 O175.13
文献标志码 A

收稿日期 2012-01-25
资助项目 国家自然科学基金(60904005); 湖北省自然科学基金(2009CDB026)

作者简介

郭海军,男,硕士,主要研究动力系统的稳定性. 35301286@qq.com

胡军浩(通信作者),男,博士,副教授,硕士生导师,主要研究随机系统镇定与控制. junhaohu74@163.com

1 华中科技大学 附属中学,武汉,430074
2 中南民族大学 数学与统计学学院,武汉,430074

0 引言

随机微分方程在研究种群生物模型[1-3]、控制理论[4]、神经网络[5-6]以及经济模型[7]等大量的实际问题中都是十分重要的数学模型. 稳定性和有界性是研究微分方程的两个主要性质[8-14]. 近年来,有大量的文献考虑了随机滞后微分方程的稳定性和有界性. 在稳定性研究方面,Huang 等[8]利用 Razumikhin 技术研究了随机滞后系统的输入状态稳定,随机滞后系统的渐近稳定和指数稳定[9],随机混杂滞后系统的渐近稳定[10]; Cheng 等[11]研究了脉冲随机泛函微分系统的渐近稳定性. 在有界性研究方面,Mao 等[12]给出随机时滞微分方程的 Khasminskii 型存在性条件,同时给出了在一定的条件下系统的渐近有界性; Luo 等[13]研究了随机泛函微分方程的渐近稳定性和有界性; 吴述金等[14]使用了 Razuminkhin 技术讨论了随机脉冲的泛函微分方程的 p 阶距有界性.

文献[15]定理 7.18 考虑了如下特殊的随机滞后微分方程

$$dx(t) = f(x(t),x(t-\delta(t)),t)\,dt + g(x(t),x(t-\delta(t)),t)\,dB(t),\quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

f,g 满足一般性假设条件. 对于系统(1),他们给出如下渐近有界性的判据.

定理 对于系统(1),时滞 $\delta(t)$ 是可微的,且存在 $\bar{\delta} \in [0,1)$,

$$\dot{\delta}(t) \leqslant \bar{\delta}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

同时假设存在函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,以及正数 $p,\alpha_0,c_1,c_2,\lambda_1,\lambda_2$,使得 $\lambda_1 > \lambda_2/(1-\bar{\delta})$,对任意的 $x,y \in \mathbf{R}^n,t \geqslant 0$,都有

$$c_1 |x|^p \leqslant V(x,t) \leqslant c_2 |x|^p,$$

及

$$\mathscr{L} V(x,y,t) \leqslant -\lambda_1 |x|^p + \lambda_2 |y|^p + \alpha_0,$$

则随机滞后微分方程(1)是 p 阶矩渐近有界的.

但是,这个定理及文献[12-14]并没有考虑时滞不可微的随机时滞微分方程或者多时滞的随机微分方程的一致有界性和一致最终有界性. 为此,本文将考虑更一般的随机滞后微分方程的一致有界性和一致最终有界性. 在证明的过程中,实际上也证明了系统解的存在性. 本文并不像文献[12-14]首先考虑解的存在性,然后考虑解的有界性. 这里并不关心界的大小,只是证明系统解的一致有界和一致最终有界. 本文核心思想是把 Hale[16] 经典的泛函微分方程理论中有界

性定理(定理4.3)推广到随机滞后方程来,得到随机滞后系统的有界性定理.最后,举例论证了定理的有效性.

1 预备知识及定义

记$(\Omega,\mathcal{F},P)$是完备的概率空间.$\{\mathcal{F}_t: t\geqslant 0\}$是$(\Omega,\mathcal{F},P)$上给定的完备的右连续增长的子$\sigma$-代数(即$\sigma$-代数流).$x(t):\Omega\to\mathbf{R}^n$是连续的$\mathcal{F}_t$-适定的$\mathbf{R}^n$-值的随机过程.我们假设它依赖于在$S=\{x(t,\omega):\Omega\to\mathbf{R}^n\}$的$\omega\in\Omega$.并且一般用$x(t)$代替$x(t,\omega)$,突出了$x(t)$对$t$的依赖性,将$\omega\in\Omega$视为参数.令$|\cdot|$表示$\mathbf{R}^n$中的Euclidean范数.如果$\boldsymbol{A}$是向量或者矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$表示$\boldsymbol{A}$的转置.如果$\boldsymbol{A}$是矩阵,$\boldsymbol{A}$的迹范数$|\boldsymbol{A}|=[\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})]^{1/2}$.

一般的随机滞后微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f(x_t,t)\,\mathrm{d}t+g(x_t,t)\,\mathrm{d}B(t),\quad t\geqslant 0,\quad (2)$$

其中时滞$\delta(t):\mathbf{R}_+\to[0,\tau]$是Borel可测函数.可测函数$f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}^n$及$g:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\to\boldsymbol{R}^{n\times m}$,初始值$\{x(\theta)=-\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}=\xi\in L^2_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$.这里的$L^2_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$表示所有$\mathcal{F}_0$可测的$C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$值随机变量$\xi=\{\xi(\theta):-\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}$且满足$E\|\xi\|^p<\infty$全体.$\boldsymbol{B}(t)=(B_1(t),\cdots,B_m(t))^{\mathrm{T}}$定义在完备的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}\}_{t\geqslant 0},P)$上的$m$维Brownian运动.

令$C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$表示所有$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+$上非负函数$V(x,t)$,且关于$x$是二次可微,关于$t$是一次可微,对于任意的$0\leqslant T<\infty$都有$V_x(x,t)g(x_t,t)\in L^2([0,T];\mathbf{R}^m)$的全体.定义与系统(2)相关的算子$\mathcal{L}$,作用在$V\in C^{2,1}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$,

$$\mathcal{L}V(x_t,t)=V_t(x,t)+V_x(x,t)f(x_t,t)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}\,[g^{\mathrm{T}}(x_t,t)V_{xx}g(x_t,t)],$$

其中,

$$V_t(x,t)=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t},$$

$$V_x(x,t)=\left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{xx}=\left(\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}.$$

令κ表示所有连续的严格增加函数$u:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$,并且$u(0)=0$全体.令$\kappa_\infty$表示$u\in\kappa$,并且当$r\to\infty$时,$u(r)\to\infty$全体.如果$u\in\kappa$,用$u^{-1}$表示函数$u$的逆.用$VK$表示函数$u\in K$,并且$u$是凸函数,用$CK$表示函数$u\in K$,并且$u$是凹函数,用$VK_\infty$表示$u\in K_\infty$,并且$u$是凸函数,用$CK_\infty$表示函数$u\in K_\infty$,并且$u$是凹函数.

在给出主要结论之前,需要如下定义

定义1 假设$p>0$,系统(2)称为

(B1) p阶矩有界,如果对于任一$B_1>0$,任意的$\sigma>0$,存在$B_2=B_2(\sigma,B_1)>0$,使得$E\|\xi\|^p<B_1$,蕴含$E|x(t;\sigma,\xi)|^p<B_2$,$t\geqslant\sigma$.这里$x(t;\sigma,\xi)$是系统(2)的解;

(B2) p阶矩一致有界,如果(B1)成立,且B_2与σ无关;

(B3) p阶矩最终有界,如果(B1)是成立的,且存在$B>0$,对于任一$B_3>0$,任意的$\sigma>0$,存在$T=T(\sigma,B_3)>0$,使得$E\|\xi\|^p<B_3$,蕴含$E|x(t;\sigma,\xi)|^p<B$,$t\geqslant\sigma+T$.

(B4) p阶矩最终一致有界,如果(B2)是成立的,对于任一$B_3>0$,任意的$\sigma>0$,存在$T=T(B_3)>0$(与σ无关),使得$E\|\xi\|^p<B_3$,蕴含$E|x(t;\sigma,\xi)|^p<B$,$t\geqslant\sigma+T$.

2 主要定理及证明

定理1 令$p>0$,假设存在函数$V(x,t)\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$及常数$H>0$,满足:

ⅰ) $u(|x|^p)\leqslant V(x,t)\leqslant v(|x|^p)$,$u\in VK_\infty$,$v\in CK_\infty$,$\forall(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+$;

ⅱ) 对任意的$\beta>0$,$u(\beta)>v(H)$,$\gamma>0$,及对任意$\theta\in[-\tau,0]$,$\phi\in L^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,存在$\mu=\mu(\beta,\gamma)>0$,当$v(H)\leqslant EV(\phi(0),t)$,$\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}EV(\phi(\theta),t+\theta)\leqslant\mu(\beta)$,$EV(\phi(\theta),t+\theta)<EV(\phi(0),t)+\mu$,蕴含$E\mathcal{L}V(\phi,t)\leqslant-\lambda(t)(w(\phi(0))-\gamma)$.这里$\lambda\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,$\omega\in C(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}_+)$,$\omega(s)>0$,$s>0$.那么,系统(2)是$p$阶矩一致有界的.

证明 令$(\sigma,\xi)\in\mathbf{R}_+\times L^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,设$B_1\geqslant H$且$E\|\xi\|^p\leqslant B_1$,存在$B_2>0$,使得$2v(B_1)\leqslant u(B_2)$(由$v(H)\leqslant v(B_1)\leqslant 2v(B_1)\leqslant u(B_2)\leqslant v(B_2)$可得$H\leqslant B_2$).取$\beta=B_2$,$0<\gamma<\inf_{H\leqslant E|x(t)|^p\leqslant B_2}\omega(|x(t)|)$,存在$\mu=\mu(\beta,\gamma)>0$,且$\mu<\frac{1}{2}\mu(B_2)$.

假设$x(t;\sigma,\xi)$是系统(2)的极大解.解区间为$[\sigma-\tau,\sigma+\alpha)$,若$\alpha<\infty$,则解一定会爆炸,即存在某个$t\in[\sigma-\tau,\sigma+\alpha)$,使得$E|x(t)|^p>B_2$.下面

只证 $E|x(t)|^p \leqslant B_2$，任意的 $t \in [\sigma-\tau,\sigma+\alpha)$. 这实际上证明了 $\alpha=+\infty$，同时，也证明了系统(2)是 p 阶矩一致有界的.

如果上述不成立，那么一定存在 $t \in [\sigma,\sigma+\alpha)$，使得 $E|x(t)|^p > B_2$. 取 $\hat{t}=\inf\{t \in [\sigma,\sigma+\alpha): E|x(t)|^p > B_2\}$，所以，$\hat{t} \in [\sigma,\sigma+\alpha)$.

当 $t \in [\sigma-\tau,\sigma]$，有 $E\|\xi\|^p \leqslant B_1 < B_2$(由 $v(B_1) < 2v(B_1) \leqslant u(B_2) \leqslant v(B_2)$，得到 $B_1 < B_2$)；当 $t \in [\sigma,\hat{t}]$，有 $E|x(t)|^p \leqslant B_2$，且 $E|x(\hat{t})|^p \leqslant B_2$.

在 $t \in [\sigma-\tau,\hat{t}]$ 上定义函数

$$m(t)=EV(x(t),t)$$

并且

$$D^+m(t)=\lim_{h\to 0^+}\frac{m(t+h)-m(t)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{EV(x(t+h),t+h)-EV(x(t),t)}{h}=E\mathscr{L}V(x_t,t).$$

在 $[\sigma-\tau,\sigma]$ 上，$m(t)=EV(x(t),t) \leqslant Ev(|\xi|^p) \leqslant v(B_1) \leqslant \frac{1}{2}u(B_2) < u(B_2)-\mu$. 但是，在 $\hat{t}$ 时刻，$m(\hat{t})=EV(x(\hat{t}),\hat{t}) \geqslant Eu(|x(\hat{t})|^p) \geqslant uE(|x(\hat{t})|^p)=u(B_2)$.

取 $t^*=\inf\{t \in [\sigma,\hat{t}]: m(t) \geqslant u(B_2)\}$，那么 $t^* \in [\sigma,\hat{t}]$，$m(t^*)=u(B_2)$，且 $m(t)<u(B_2)$，$t \in [\sigma-\tau,\hat{t}]$. 再取 $\bar{t}=\sup\{t \in [\sigma,t^*]: m(t) \leqslant u(B_2)-\mu\}$，那么 $\bar{t} \in [\sigma,t^*]$，$m(\bar{t})=u(B_2)-\mu$，且在区间 $[\bar{t},t^*]$ 上，

$$v(B_1) \leqslant \frac{1}{2}u(B_2) < u(B_2)-\mu \leqslant m(t) \leqslant u(B_2). \quad (3)$$

在区间 $[\bar{t},t^*]$ 上，$m(t)=EV(x(t),t) \geqslant v(B_1) \geqslant v(H)$，同时，$\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}EV(x(t+\theta),t+\theta) \leqslant u(B_2)=u(\beta)$. 由式(3)得：$EV(x(t+\theta),t+\theta) \leqslant u(B_2) \leqslant EV(x(t),t)+\mu$，$\theta \in [-\tau,0]$. 考虑到 $u \in VK_\infty$，由 $u(E|x(t)|^p) \leqslant Eu(|x(t)|^p) \leqslant EV(x(t),t)=m(t) \leqslant u(B_2)$ 得到 $E|x(t)|^p \leqslant B_2$. 又，$v \in CK_\infty$，由 $v(B_1) \leqslant m(t)=EV(x(t),t) \leqslant Ev(|x(t)|^p) \leqslant v(E(|x(t)|^p))$ 得到 $E(|x(t)|^p \geqslant B_1 \geqslant H$.

由条件(ⅱ)知，

$$E\mathscr{L}V(x(t),t) \leqslant -\lambda(t)[w(x(t))-\gamma] \leqslant 0.$$

但是，由 Itô 公式，

$$u(B_2)=m(t^*)=EV(x(t^*),t^*)=EV(x(\bar{t}),\bar{t})+\int_{\bar{t}}^{t^*}E\mathscr{L}V(x_s,s)\,\mathrm{d}s \leqslant EV(x(\bar{t}),\bar{t})=m(\bar{t})=u(B_2)-u.$$

产生矛盾. 故，$E|x(t)|^p < B_2$，任意的 $t \in [\sigma-\tau,\sigma+\alpha]$.

综上所述，系统(2)是 p 阶矩一致有界的.

定理 1 证明完毕.

定理 2 令 $p>0$，假设存在函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$ 及常数 $H>0$，满足：

ⅰ) $u(|x|^p) \leqslant V(x,t) \leqslant v(|x|^p)$，$u \in VK_\infty$，$v \in CK_\infty$，$\forall(x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$；

ⅱ) 对任意的 $\beta>0$，$u(\beta)>v(H)$，$\gamma>0$，及对任意 $\theta \in [-\tau,0]$，$\phi \in L^p_{\mathscr{F}_t}([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$，存在 $\mu=\mu(\beta,\gamma)>0$，当 $v(H) \leqslant EV(\phi(0),t)$，$\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}EV(\phi(0),t+\theta) \leqslant u(\beta)$，$EV(\phi(\theta),t+\theta) < EV(\phi(0),t)+\mu$，蕴含 $E\mathscr{L}V(\phi,t) \leqslant -\lambda(t)(w(\phi(0))-\gamma)$. 这里 $w \in C(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+)$，$w(s)>0$，$s>0$，且对任意的 L，存在 $l>0$ 使得 $\int_t^{t+l}\lambda(t)\,\mathrm{d}t > L$，$t \geqslant \sigma$，$\int_0^\infty \lambda(t)\,\mathrm{d}t=\infty$.

那么，系统(2)是 p 阶矩一致最终有界.

证明 显然，定理 1 的条件满足，因此系统(2)是 p 阶矩一致有界.

下面证明系统(2)是 p 阶距一致最终有界.

令 $B=u^{-1}(v(H))$，那么 $u(B)=v(H)$. 由 $v(B) \geqslant u(B)=v(H)$，可知 $B \geqslant H$.

任意给定 $B_3 \geqslant B$，那么对由 p 阶距一致有界的定义可知，存在 $B_4>B_3$，使得对任意的 $\sigma \geqslant 0$，当 $E\|\xi\|^p < B_3$，一定有

$$EV(x(t),t) < u(B_4). \quad (4)$$

这样，由 $u \in VK_\infty$，$u(E|x(t)|^p) \leqslant Eu(|x|^p) \leqslant EV(x(t),t) \leqslant u(B_4)$，所以，$E|x|^p \leqslant B_4$.

令 $\beta=B_4$，由 $B_4>B_3 \geqslant B=u^{-1}(v(H))$，可知 $v(B_4) \geqslant u(B_4) > v(H)$，故可定义 $\gamma=\frac{1}{2}\inf_{H\leqslant E|x|^p\leqslant B_4}w(|x(t)|)>0$. 存在 $\mu:=\mu(\beta,\gamma)>0$，使得 $u(B)+N\mu>u(B_4)$，这里 N 是使得这个不等式成立的最小整数.

令 $T_0=\sigma$，$T_i>T_{i-1}+\tau$，并且 $\int_{T_{i-1}+\tau}^{T_i}\lambda(s)\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{u(B_4)}{\gamma}$，下面证明：

$$EV(x(t),t) \leqslant u(B)+(N-i)\mu, \quad t \geqslant T_i,\quad i=0,1,2,\cdots,N. \quad (5)$$

当 $t \geqslant T_0=\sigma$ 时，由式(4)可知 $EV(x(t),t) <$

$u(B_4) < u(B) + N_\mu$,式(5)成立.

对于式(5),假设对某个 $0 \leqslant i < N$ 成立,考虑:当 $t \geqslant T_{i+1}$ 时,一定有 $EV(x(t),t) \leqslant u(B) + (N - i - 1)\mu$.

令 $t_i^* = \inf\{t \geqslant T_i: EV(x(t),t) \leqslant u(B) + (N - i - 1)\mu\}$,如果 $t_i^* > T_{i+1}$,那么考虑区间 $I_i = [T_i + \tau, T_{i+1}]$,对于任意的 $t \in I_i$,一定有 $EV(x(t),t) > u(B) + (N - i - 1)\mu$.

计算

$$v(H) = u(B) < EV(x(t),t) < u(B_4) = u(\beta), \quad (6)$$

取上确界

$$\sup_{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0} EV(x(t+\theta), t+\theta) < u(B_4) = u(\beta), \quad (7)$$

以及

$$\begin{aligned} EV(x(t+\theta),t+\theta) &< u(B_4) < u(B) + N\mu = \\ & u(B) + (N-i-1)\mu + \mu < \\ & EV(x(t),t) + \mu, \end{aligned} \quad (8)$$

由条件(ⅱ),可知,

$$\begin{aligned} D^+ m(t) &= E\mathscr{L}V(x,t) \leqslant -\lambda(t)[v(x(t)) - \gamma] \leqslant \\ & -\lambda(t)\gamma < 0, \end{aligned} \quad (9)$$

但是,由 Itô 公式,

$$\begin{aligned} EV(x(t),t) &\leqslant EV(x(T_i+\tau), T_i+\tau) - \\ & \gamma\int_{T_i+\tau}^{t} \lambda(s)\,\mathrm{d}s < u(B_4) - \gamma\int_{T_i+\tau}^{t}\lambda(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} EV(x(T_{i+1}),T_{i+1}) &< u(B_4) - \gamma\int_{T_i+\tau}^{t}\lambda(s)\,\mathrm{d} \leqslant \\ & u(B_4) - \gamma\frac{u(B_4)}{\gamma} \leqslant 0. \end{aligned}$$

这与 $EV(x(t),t)$ 本身是正数相矛盾.所以,$t_i^* \leqslant T_{i+1}$.

对于任意的 $t_i^{**} = \{t \geqslant T_i: EV(x(t),t) = u(B) + (N - i - 1)\mu\}$,计算

$$v(H) = u(B) < EV(x(t_i^{**}), t_i^{**}) < u(B_4) = u(\beta),$$

取上确界

$$\sup_{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0} EV(x(t_i^{**}+\theta), t_i^{**}+\theta) < u(B_4) = u(\beta),$$

以及

$$\begin{aligned} EV(x(t_i^{**}+\theta),t_i^{**}+\theta) &< u(B_4) < u(B) + N\mu = \\ & u(B) + (N-i-1)\mu + \mu = EV(x(t_i^{**}),t_i^{**}) + \mu, \end{aligned}$$

所以,由条件(ⅱ)有

$$D^+ m(t_i^{**}) = D^+ EV(x(t_i^{**}), t_i^{**}) \leqslant -\lambda(t)\gamma < 0.$$

对于任意的 $t \geqslant T_{i+1}$,一定有 $EV(x(t),t) \leqslant u(B) + (N - i - 1)\mu$.特别地,当 $i = N$ 时,$t \geqslant T_N$,有 $EV(x(t),t) \leqslant u(B)$.

由 $u \in VK_\infty$,$u(E|x|^p) \leqslant Eu(|x|^p) \leqslant EV(x(t),t) \leqslant u(B)$,$\forall t \in T_N$.

综上所述,当 $t \geqslant T_N$,有 $E(|x|^p) \leqslant B$.即系统(2)是 p 阶矩一致最终有界.

定理2证明完毕.

3 主要推论

推论1 令 $p > 0$,假设存在函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 及常数 $H > 0$,满足:

ⅰ) $u(|x|^p) \leqslant V(x,t) \leqslant v(|x|^p)$,$u \in VK_\infty$,$v \in CK_\infty$,$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$;

ⅱ) 对任意的 $\beta > 0$,$u(\beta) > v(H)$,$\gamma > 0$,及对任意 $\theta \in [-\tau, 0]$,$\phi \in L^p_{\mathscr{F}_t}([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,存在 $\mu = \mu(\beta,\gamma) > 0$,当 $v(H) \leqslant EV(\phi(0),t)$,$\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} EV(\phi(0), t+\theta) \leqslant u(\beta)$,$EV(\phi(\theta), t+\theta) < EV(\phi(0),t) + \mu$,蕴含 $E\mathscr{L}V(\phi,t) \leqslant -w(\phi(0)) + \gamma$.这里 $\omega \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+)$,$\omega(s) > 0$,$s > 0$.

那么,系统(2)是 p 阶矩一致最终有界.

实际上,这里考虑 $\lambda(t) \equiv 1$.由定理2显然成立.

推论2 令 $p > 0$,假设存在函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 及常数 $H > 0$,满足:

ⅰ) $u(|x|^p) \leqslant V(x,t) \leqslant v(|x|^p)$,$u \in VK_\infty$,$v \in CK_\infty$,$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$;

ⅱ) 对任意的 $\gamma > 0$,当 $E|\phi(0)|^p \geqslant H$,$EV(\phi(\theta), t+\theta) < P(EV(\phi(0),t))$,蕴含 $E\mathscr{L}V(\phi, t) \leqslant -w(\phi(0)) + \gamma$.这里 $\omega \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+)$,$\omega(s) > 0$,$s > 0$,$[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续函数,且 $P(s) > s$,$s > 0$.

那么,系统(2)是 p 阶矩一致最终有界.

证明 这里只需要条件(ⅱ)蕴含推论1中的(ⅱ)即可.

事实上,选择 $\beta > 0$,$u(\beta) > v(H)$,$\gamma > 0$,存在 $\mu = \mu(\beta,\gamma) > 0$,使得 $\mu < \inf\{P(s) - s: v(H) \leqslant s \leqslant u(\beta)\}$. 如果当 $\nu(H) \leqslant EV(\phi(0),t)$,$\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} EV(\phi(\theta), t+\theta) \leqslant \mu(\beta)$,$EV(\phi(\theta), t+\theta) < EV(\phi(0),t) + \mu$,那么,$H \leqslant E|x(t)|^p$ 成立,以及

$$\begin{aligned} EV(\phi(\theta),t+\theta) &\leqslant EV(\phi(0),t) + \mu < \\ & EV(\phi(0),t) + P(EV(\phi(0),t)) - \\ & EV(\phi(0),t) = P(EV(\phi(0),t)), \end{aligned}$$

从条件(ⅱ),有 $E\mathscr{L}V(\phi,t) \leqslant -\omega(\phi(0)) + \gamma$,所

以,推论 1 中的条件(ⅱ)成立,也就是推论 2 成立的.

注:推论 2 是文献[17-18]中的有界性定理在随机滞后系统的推广形式.这里只要求函数 ω 是正定连续函数即可.

由推论 2 及定理 2 可知:

推论 3 令 $p>0$,假设存在函数 $V(x,t)\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$ 及常数 $H>0$,满足:

ⅰ) $u(|x|^p)\leqslant V(x,t)\leqslant v(|x|^p)$, $u\in VK_\infty$, $v\in CK_\infty$, $\forall(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+$;

ⅱ) 对任意的 $\gamma>0$,当 $E|\phi(0)|^p\geqslant H$, $EV(\phi(\theta),t+\theta)<P(EV(\phi(0),t))$,蕴含 $E\mathcal{L}V(\phi,t)\leqslant-\lambda(t)(\omega(\phi(0))-\gamma)$.这里 $\omega\in C(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}_+)$, $\omega(s)>0,s>0$, $P:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续函数,且 $P(s)>s,s>0$.对任意的 L,存在 $l>0$ 使得 $\int_t^{t+l}\lambda(t)\,\mathrm{d}t>L,t\geqslant\sigma$, $\int_0^\infty\lambda(t)\,\mathrm{d}t=\infty$.

那么,系统(2)是 p 阶矩一致最终有界.

4 举例

例 考虑下列随机时滞微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1(t)=\dfrac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\Big[-9x_1^3(t)+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}x_1(t)+x_2^{\frac{1}{3}}(t-\tau_2(t))\Big]\mathrm{d}t+\dfrac{x_1(t)+p(t)}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}x_2(t)=\dfrac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\Big[-10x_2^3(t)+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}x_2(t)+\dfrac{1}{2}x_1^{\frac{1}{5}}(t-\tau_1(t))\Big]\mathrm{d}t+\dfrac{x_2(t)}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}\mathrm{d}B_2(t).\end{cases}\tag{10}$$

其中 $t\geqslant0$, $\tau_i(t)\in[0,\tau]$, $i=1,2$. $|p(t)|\leqslant\gamma$, γ 是常数.方程(10)有两个不同的变时滞,这里不需要时滞是可微的,更不用时滞的导数是有界性假设.所以,文献[15]中定理 7.18 根本不能用.

取 Lyapunov 函数

$$V(x(t),t)=|x(t)|^2=x_1^2(t)+x_2^2(t),\tag{11}$$

显然,这个函数满足推论 2 的条件(ⅰ)光滑性假设.

对于任意的 (x,t),计算

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x_t,t)=&\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\Big\{2x_1(t)\Big[-9x_1^3(t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}x_1(t)+x_2^{\frac{1}{3}}(t-\tau_2(t))\Big]+(x_1(t)+p(t))^2\Big\}+\\&\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\Big\{2x_2(t)\Big[-10x_2^3(t)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}x_2(t)+\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{5}}(t-\tau_1(t))\Big]+x_2^2(t)\Big\}\leqslant\\&\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\Big\{-18x_1^4(t)+x_1^2(t)+2\Big|x_1(t)x_2^{\frac{1}{3}}(t-\tau_2(t))\Big|+2x_1^2(t)+2p^2(t)20x_2^4(t)+\frac{2}{3}x_2^2(t)+\\&\Big|x_2(t)x_1^{\frac{1}{5}}(t-\tau_1(t))\Big|+x_2^2(t)\Big\}.\end{aligned}$$

假设函数 $P(s)=1.5s>s$,当

$$x_1^2(t-\tau_1(t))+x_2^2(t-\tau_2(t))\leqslant1.5(x_1^2(t)+x_2^2(t))$$

及由基本不等式 $x^4+y^4\geqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$ 得到:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x_t,t)\leqslant&\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\Big\{-18(x_1^4(t)+x_2^4(t))+3(x_1^2(t)+x_2^2(t))+2p^2(t)+2|x_1(t)x_2^{\frac{1}{3}}(t-\tau_2(t))|+\\&|x_2(t)x_1^{\frac{1}{5}}(t-\tau_1(t))|\Big\}\leqslant\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\Big\{-9(x_1^2(t)+x_2^2(t))^2+3(x_1^2(t)+x_2^2(t))+2\gamma^2+2(1.5)^{\frac{1}{6}}(x_1^2(t)+\\&x_2^2(t))^{\frac{1}{2}}(x_1^2(t)+x_2^2(t))^{\frac{1}{6}}+(1.5)^{\frac{1}{10}}(x_1^2(t)+x_2^2(t))^{\frac{1}{2}}(x_1^2(t)+x_2^2(t))^{\frac{1}{10}}\Big\}.\end{aligned}$$

令 $H=1$,当 $x_1^2(t)+x_2^2(t)\geqslant1$,则

$$\mathcal{L}V(x_t,t)\leqslant-[9-3-2(1.5)^{\frac{1}{6}}-(1.5)^{\frac{1}{10}}]\frac{x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}+2\gamma^2\leqslant-\frac{5(x_1^2+x_2^2)}{1+x_1^2+x_2^2}+2\gamma^2,$$

推论 2 的条件(ⅱ)满足.这里的 $\omega(x)=\dfrac{5|x|^2}{1+|x|^2}$.

由推论 2,系统(10)是二阶矩一致最终有界.

参考文献
References

[1] Bahar A,Mao X R. Stochastic delay Lotka-Volterra model[J]. J Math Anal Appl,2004,292(2):364-380

[2] Bahar A,Mao X R. Stochastic delay population dynamics[J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics,2004,11(4):377-400

[3] Bahar A,Mao X R. Persistence of stochastic power law logistic model[J]. Journal of Applied Probability & Statistics,2008,3(1):37-43

[4] Liu S J,Ge S S,Zhang J F. Adaptive output-feedback control for a class of uncertain stochastic non-linear systems with time delays[J]. International Journal of Control,2008,81(8):1210-1220

[5] Blythe S,Mao X R,Liao X X. Stability of stochastic delay neural networks[J]. Journal of the Franklin Institute,

2001,338(4):481-495
[6] Blythe S,Mao X R,Shah A. Razumikhin-type theorems on stability of stochastic neural networks with delay [J]. Sto Anal Appl,2001,19(1):85-101
[7] Hull J,White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities [J]. The Journal of Finance,1987,42(2):281-300
[8] Huang L R,Mao X R. On input-to-state stability of stochastic retarded systems with Markovian switching [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2009,54(8):1898-1902
[9] Huang L R,Deng F Q. Razumikhin-type theorems on stability of stochastic retarded systems [J]. Int J Systems Science,2009,40(1):73-80
[10] Huang L R,Mao X R,Deng F Q. Stability of hybrid stochastic retarded systems [J]. IEEE Trans On Circuits and Systems,2008,55(11):3413-3420
[11] Cheng P,Deng F Q,Dai X S. Razumikhin-type therems for asymptotic stability of impulsive stochastic functional differential system [J]. J Syst Sci Syst Eng,2010,19(1):72-84
[12] Mao X R,Rassias M J. Khasminskii-type theorems for stochastic differential delay equations [J]. Sto Anal Appl,2005,23(5):1045-1069
[13] Luo Q,Mao X R,Shen Y. Generalised theory on asymptotic stability and boundedness of stochastic functional differential equations [J]. Automatica,2011,47(9):2075-2081
[14] 吴述金,宋琼,郭小林. 随机脉冲泛函微分方程的 p 阶矩有界性 [J]. 数学物理学报,2010,30A(1):126-141
WU Shujin, SONG Qiong, GUO Xiaolin. p-moment boundedness of functional differential equations with random impulses [J]. Acta Mathematica Sinica,2010,30A(1):126-141
[15] Mao X R,Yuan C G. Stochastic differential equations with Markovian switching [M]. London: Imperial College Press,2006
[16] Hale J K. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer Verlag,1977
[17] Stamova I M. Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations [J]. Bull Austral Math Soc,2008,77(2):331-345
[18] Zhang Y,Sun J T. Boundedness of the solutions of impulsive differential systems with time-varying delay [J]. Appl Math Comput,2004,154(1):279-288

Boundedness of stochastic retarded differential equations

GUO Haijun[1] HU Junhao[2]
1 Affiliated High School of Huazhong University of Science and Technology,Wuhan 430074
2 School of Mathematics and Statistics,South-Central University for Nationalities,Wuhan 430074

Abstract In this paper,the uniform boundedness and uniform ultimate boundedness of the stochastic retarded differential equations is investigated. The new Razumikhin theorems of boundedness about these systems are obtained by using the Lyapunove functions and Razumikhin technique. It should be noted that the boundedness criteria prove the global existence of solutions as well as boundedness,thus the available results in references are improved. Finally,an example is illustrated to verify the theorems.

Key words stochastic retarded differential equations; uniform boundedness; uniform ultimate boundedness; Rezumikhin technique