文章编号: 1674-7070(2012)01-0087-05

一类三阶微分方程组边值问题特殊正解的存在性

唐玉莲[1]　夏大峰[1]

摘要

利用锥拉伸锥压缩不动点定理,研究了微分方程组

$$\begin{cases}-u''' = f(t,u,v,w),\\ -v''' = g(t,u,v,w),\\ -w''' = h(t,u,v),\\ u(0) = u'(0) = u''(1) = 0,\\ v(0) = v'(0) = v''(1) = 0,\\ w(0) = w'(0) = w''(1) = 0\end{cases}$$

边值问题在某些条件下特殊正解的存在性.

关键词

三阶微分方程组; 边值问题; 正解

中图分类号 O175.8

文献标志码 A

收稿日期 2011-04-19

资助项目 国家自然科学基金(60904028)

作者简介

唐玉莲,女,硕士生,主要研究方向为常微分方程及其应用. xbd2002cn@yahoo.com.cn

1 南京信息工程大学 数学与统计学院,南京,210044

0 引言

二阶微分方程边值问题和二阶微分方程组边值问题正解的存在性研究已有许多丰富的结果[1-6]. 关于三阶微分方程边值问题正解的存在性研究也有一些结果[7-9],但三阶微分方程组边值问题正解的存在性研究较少. 本文利用锥拉伸锥压缩不动点定理,研究了下列三阶微分方程组边值问题在满足某些条件下特殊正解的存在性.

$$\begin{cases}-u''' = f(t,u,v,w),\\ -v''' = g(t,u,v,w),\\ -w''' = h(t,u,v),\\ u(0) = u'(0) = u''(1) = 0,\\ v(0) = v'(0) = v''(1) = 0,\\ w(0) = w'(0) = w''(1) = 0.\end{cases} \tag{1}$$

其中:

1) $f,g \in C([0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,+\infty),(-\infty,+\infty))$ 且满足条件 $f(t,u,u,w) = g(t,u,u,w) = a(t,w)b(u)$;

2) $b \in C([0,+\infty),[0,+\infty))$,且当 $u>0$ 时,$b(u)>0$;

3) $a \in C((0,1) \times [0,+\infty),[0,+\infty))$,$0 < \int_0^1 a(t,w) < +\infty$ 并存在 $c \in C([0,1],[0,+\infty))$,满足 $\int_0^1 c(s)\mathrm{d}s > 0$,使得 $c(t) \leqslant a(t,w)$,$\forall (t,w) \in [0,1] \times [0,+\infty)$;

4) $h \in C([0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty),(-\infty,+\infty))$,且当 $u>0$ 时有 $h(t,u,u)>0$.

1 预备知识与引理

首先给出在本文中起关键作用的锥拉伸锥压缩不动点定理.

引理 1 设 B 是 Banach 空间,$K \subset B$ 是 B 中的锥,Ω_1 及 Ω_2 是 B 中的开子集,$0 \in \Omega_1$ 且 $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$,$T: K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to K$ 是全连续算子. 如果以下两条件之一成立:

1) $\|Tu\| \leqslant \|u\|$,$\forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\| \geqslant \|u\|$,$\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$;

2) $\|Tu\| \geqslant \|u\|$,$\forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\| \leqslant \|u\|$,$\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$.

那么 T 在 $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

令 $G(t,s)$ 是三阶微分方程 $u'''(t) = F(t)$ 满足边值条件 $u(0) =$

$u'(0)=u''(1)=0$ 的 Green 函数:

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(t-s)^2=ts-\frac{1}{2}s^2, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ \frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

易见

$$\begin{cases}G(t,s)\geqslant 0, & 0\leqslant t,s\leqslant 1;\\ G(t,s)>0, & 0<t,s\leqslant 1;\\ G(t,s)\leqslant G(1,s)=s-\frac{1}{2}s^2\leqslant\frac{1}{2}, & 0\leqslant t,s\leqslant 1.\end{cases}\quad(2)$$

设 $X=C[0,1]$，$\|u\|=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$，此时，$X$ 是 Banach 空间

$$P=\left\{u\in X\,\middle|\,u(t)\geqslant 0, t\in[0,1]\right\}.$$

由 $\int_0^1 c(s)\,\mathrm{d}s>0$ 知：存在 $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $\int_\alpha^{1-\alpha}c(s)\,\mathrm{d}s>0$. 定义 $K=\left\{u\in P\,\middle|\,u(t)\geqslant 0, \min_{t\in[\alpha,1-\alpha]}u(t)\geqslant\frac{\alpha^2}{2}\|u\|\right\}\subset P$. 显见，$K$ 是 X 中的锥. 记

$$\Omega_l=\left\{u\in X\,\middle|\,\|u\|<l\right\}, \bar{\Omega}_l=\left\{u\in X\,\middle|\,\|u\|\leqslant l\right\},$$

$$\partial\Omega_l=\left\{u\in X\,\middle|\,\|u\|=l\right\}.$$

定义积分算子 $T: K\to P$:

$$T(u)(t)=\int_0^1 G(t,s)\,a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

引理 2 $T(K)\subset K$.

证明 对任意的 $u\in K$，由不等式(2)有

$$T(u)(t)=\int_0^1 G(t,s)\,a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1 G(1,s)\,a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s.\quad(3)$$

另外，对前面给定的 $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 及 $\forall t\in[\alpha,1-\alpha]$，由 $2s-s^2\leqslant 1(0<s\leqslant 1)$，有

$$\frac{G(t,s)}{G(1,s)}=\begin{cases}\frac{2ts-s^2}{2s-s^2}, s\leqslant t\\ \frac{t^2}{2s-s^2}, t\leqslant s\end{cases}\geqslant\begin{cases}\frac{2t-s}{2-s}, s\leqslant t\\ t^2, \quad t\leqslant s\end{cases}\geqslant\begin{cases}\frac{t}{2}, s\leqslant t\\ t^2, \quad t\leqslant s\end{cases}\geqslant\frac{\alpha^2}{2},$$

$$G(t,s)\geqslant\frac{\alpha^2}{2}G(1,s),\quad \alpha\leqslant t\leqslant 1-\alpha,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

于是对任意 $t\in[\alpha,1-\alpha]$，

$$T(u)(t)=\int_0^1 G(t,s)\,a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac{\alpha^2}{2}\int_0^1 G(1,s)\,a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s.\quad(4)$$

综合式(3)、(4)有:

$$\min_{t\in[\alpha,1-\alpha]}T(u)(t)\geqslant\frac{\alpha^2}{2}\|T(u)\|.$$

故 $T(K)\subset K$.

引理 3 算子 $T: K\to K$ 是全连续的.

证明 显然算子 $T: K\to K$ 是连续的，且对任意有界集 B，$\{Tu(t): u\in B\}$ 是一致有界的.

$$T(u)(t)=\int_0^1 G(t,s)\,a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

$$(Tu)'(t)=$$
$$\int_0^t sa\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s+$$
$$t\int_t^1 a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1 a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)b(u(s))\,\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|b(u)\|\int_0^1 a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s<+\infty.$$

由积分的绝对连续性知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$，当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，对 $\forall u\in B$，有

$$\|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)\|=\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}Tu(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$
$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\|b(u)\|\int_0^1 a\left(s,\int_0^1 G(s,x)\,h(x,u(x),u(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

故 $T(B)$ 是等度连续的.

因此 $T: K\to K$ 是全连续算子.

2 主要定理

定理 1 若函数 a 有界，且函数 b 满足下列两个条件之一:

1) $\lim_{u\to+\infty}\frac{b(u)}{u}=0$，$\lim_{u\to 0^+}\frac{b(u)}{u}=+\infty$；

2) $\lim_{u\to+\infty}\frac{b(u)}{u}=+\infty$，$\lim_{u\to 0^+}\frac{b(u)}{u}=0$.

则边值问题(1)至少有一个正解(u^*,u^*,w^*)，其中

$$w^*(t)=\int_0^1 G(t,s)\,h(s,u^*(s),u^*(s))\,\mathrm{d}s.$$

证明　由 $a(t,w)$ 的有界性知，$\exists M>1$，使得对 $\forall(t,w)\in(0,1)\times[0,+\infty)$，有 $a(t,w)\leqslant M$.

设条件 1) 成立，即 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{b(u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to0^+}\frac{b(u)}{u}=+\infty$. 因为 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{b(u)}{u}=0$，那么对 $\varepsilon=\frac{1}{2M}$，存在 $r>0$，当 $u\geqslant r$ 时，都有 $b(u)<\frac{u}{2M}$.

由 b 的连续性知 $b(u)$ 在 $[0,r]$ 上有界，即存在 $N>0$，使得对 $\forall u\in[0,r]$，都有 $b(u)\leqslant N$.

取 $R=M(r+N)$，对 $\forall u\in[0,R]$，当 $0\leqslant u\leqslant r$ 时，有

$$a(t,w)b(u)\leqslant MN<R \tag{5}$$

关于 $(t,w)\in(0,1)\times[0,+\infty)$ 一致成立；当 $r<u\leqslant R$ 时，

$$a(t,w)b(u)\leqslant M\frac{u}{2M}=\frac{u}{2}<R \tag{6}$$

关于 $(t,w)\in(0,1)\times[0,+\infty)$ 一致成立.

由于 $G(t,s)\leqslant1$，所以对任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_R$，由式(5)、(6)得

$$T(u)(t)=\int_0^1G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),u(x))\mathrm{d}x\right)b(u(s))\mathrm{d}s.$$

所以对任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_R$，都有 $\|T(u)\|<R=\|u\|$.

由 $\lim\limits_{u\to0^+}\frac{b(u)}{u}=+\infty$，对 $\forall H>0$，存在 $\delta>0(\delta<r)$，当 $0<u<2\delta$ 时，都有 $b(u)\geqslant Hu$.

对 $\forall u\in K\cap\partial\Omega_\delta$，由于 $c(t)\leqslant a(t,w)$，$\forall(t,w)\in[0,1]\times[0,+\infty)$，故对 $\forall t\in[\alpha,1-\alpha]$，有

$$\begin{aligned}&T(u)(t)=\\&\int_0^1G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),u(x))\mathrm{d}x\right)b(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\int_\alpha^{1-\alpha}G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),u(x))\mathrm{d}x\right)b(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\alpha^2}{2}\int_\alpha^{1-\alpha}G(1,s)c(s)b(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\alpha^2}{2}H\int_\alpha^{1-\alpha}G(1,s)c(s)u(s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\alpha^4}{4}H\|u\|\int_\alpha^{1-\alpha}G(1,s)c(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

取 $H\geqslant\dfrac{5}{\alpha^4\int_\alpha^{1-\alpha}G(1,s)c(s)\mathrm{d}s}$，则对 $\forall u\in K\cap\partial\Omega_\delta$，都有 $T(u)(t)>\|u\|$，$t\in[\alpha,1-\alpha]$. 所以对 $\forall u\in K\cap\partial\Omega_\delta$，都有 $\|T(u)\|>\|u\|$.

由引理 1，T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_R\setminus\Omega_\delta)$ 中至少有一个不动点 u^*. 令

$$w^*(t)=\int_0^1G(t,s)h(s,u^*(s),u^*(s))\mathrm{d}s,$$

则

$$u^*(t)=\int_0^1G(t,s)a(s,w^*(s))b(u^*(s))\mathrm{d}s=\int_0^1G(t,s)f(s,u^*(s),u^*(s),w^*(s))\mathrm{d}s.$$

易验证 (u^*,u^*,w^*) 是边值问题(1)的一个正解.

如果条件 2) 成立，即 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{b(u)}{u}=+\infty$，$\lim\limits_{u\to0^+}\frac{b(u)}{u}=0$. 由 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{b(u)}{u}=+\infty$，那么对任意的 $H>0$，存在 $r>0$，当 $u\geqslant r$ 时，都有 $b(u)>Hu$. 取 $R=\frac{2r}{\alpha^2}$，对任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_R$，由于 $c(t)\leqslant a(t,w)$，$\forall(t,w)\in[0,1]\times[0,+\infty)$，所以对 $\forall t\in[\alpha,1-\alpha]$，有

$$\begin{aligned}&T(u)(t)=\\&\int_0^1G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),u(x))\mathrm{d}x\right)b(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\int_\alpha^{1-\alpha}G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),u(x))\mathrm{d}x\right)b(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\alpha^2}{2}\int_\alpha^{1-\alpha}G(1,s)c(s)b(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\alpha^2}{2}H\int_\alpha^{1-\alpha}G(1,s)c(s)u(s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\alpha^4}{4}H\|u\|\int_\alpha^{1-\alpha}G(1,s)c(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

取 $H\geqslant\dfrac{5}{\alpha^4\int_\alpha^{1-\alpha}G(1,s)c(s)\mathrm{d}s}$，则对 $\forall u\in K\cap\partial\Omega_R$，都有 $T(u)(t)>\|u\|$，$t\in[\alpha,1-\alpha]$. 所以对 $\forall u\in K\cap\partial\Omega_R$，都有 $\|T(u)\|>\|u\|$.

另外，由 $\lim\limits_{u\to0^+}\frac{b(u)}{u}=0$，取 $\varepsilon=\frac{1}{2M}$，存在 $\delta>0$，当 $0<u<2\delta$ 时，有 $b(u)<\varepsilon u$. 于是对 $\forall u\in K\cap\partial\Omega_\delta$

$$T(u)(t)=\int_0^1G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),u(x))\mathrm{d}x\right)b(u(s))\mathrm{d}s<\frac{1}{2}\int_0^1u(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2}\|u\|.$$

所以，对 $\forall u\in K\cap\partial\Omega_\delta$，都有 $\|T(u)\|<\|u\|$.

由引理 1，T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_R\setminus\Omega_\delta)$ 中至少有一个不动点 u^*. 令

$$w^*(t)=\int_0^1G(t,s)h(s,u^*(s),u^*(s))\mathrm{d}s,$$

则

$$u^*(t) = \int_0^1 G(t,s)\,a(s,w^*(s))\,b(u^*(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^1 G(t,s)\,f(s,u^*(s),u^*(s),w^*(s))\,\mathrm{d}s.$$

易验证(u^*, u^*, w^*)是边值问题(1)的一个正解.

定理 2 若二元函数 $h(t,u,u)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上有界，且函数 b 满足下列两个条件之一：

1) $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{b(u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{b(u)}{u}=+\infty$；

2) $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{b(u)}{u}=+\infty$，$\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{b(u)}{u}=0$.

则边值问题(1)至少有一个正解(u^*, u^*, w^*)，其中

$$w^*(t) = \int_0^1 G(t,s)\,h(s,u^*(s),u^*(s))\,\mathrm{d}s.$$

证明 由 $h(t,u,u)$ 的有界性知，存在 $L>0$，使得对 $\forall(t,u)\in[0,1]\times[0,+\infty)$，都有 $h(t,u,u)\leqslant L$. 又由二元函数 $a(t,w)$ 的连续性知 $a(t,w)$ 在 $(0,1)\times[0,L]$ 上有界，即存在常数 $M>1$，使得当 $(t,w)\in(0,1)\times[0,L]$ 有 $a(t,w)\leqslant M$，对任意的 $u\in P$，由于

$$\int_0^1 G(t,s)\,h(s,u(s),u(s))\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 h(s,u(s),u(s))\,\mathrm{d}s \leqslant L,$$

所以 $a\left(t,\int_0^1 G(t,s)\,h(s,u(s),u(s))\,\mathrm{d}s\right)\leqslant M$ 一致成立. 下面的证明基本上是重复定理 1 的证明过程，故略证.

3 应用举例

例 1 考虑下列三阶微分方程组边值问题

$$\begin{cases} -u''' = (3u^2-v^2)\ln\left(1+t+\dfrac{1+t}{1+w^2}\mathrm{e}^{u-v}\right), \\ -v''' = u(u+v)\ln\left(1+t+\dfrac{1+t}{1+w^2}\right)+(u-v^2)\sin(u-v), \\ -w''' = (1+t^2)(u-v)+(u+v)^2\mathrm{e}^t, \\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0, \\ v(0)=v'(0)=v''(1)=0, \\ w(0)=w'(0)=w''(1)=0. \end{cases}$$

由于函数

$$f(t,u,v,w) = (3u^2-v^2)\ln\left(1+t+\frac{1+t}{1+w^2}\mathrm{e}^{u-v}\right),$$

$$g(t,u,v,w) = u(u+v)\ln\left(1+t+\frac{1+t}{1+w^2}\right)+(u-v^2)\sin(u-v),$$

$$h(t,u,v) = (1+t^2)(u-v)+(u+v)^2\mathrm{e}^t$$

满足条件：

$$f(t,u,u,w) = g(t,u,u,w) = 2u^2\ln\left(1+t+\frac{1+t}{1+w^2}\right),$$

$$h(t,u,u) = 4u^2\mathrm{e}^t\geqslant 0.$$

而函数 $a(t,w)=\ln\left(1+t+\dfrac{1+t}{1+w^2}\right)$，$b(u)=2u^2$ 满足定理 1 的条件 1)，根据定理 1 知该三阶微分方程组边值问题至少存在一个形如(u^*, u^*, w^*)的正解.

例 2 考虑下列三阶微分方程组边值问题

$$\begin{cases} -u''' = (\sqrt{u}+\sqrt{v})\left[\mathrm{e}^{u-v}+(u-v)(u^2-v)+t(1+w)\right], \\ -v''' = \dfrac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{1+(u-v)^2}\left[1+u-v+t(1+w)\mathrm{e}^{u-v}\right], \\ -w''' = t^2(u^2-v^2)\mathrm{e}^{uv}+\arctan(1+u+v^2), \\ u(0)=u'(0)=u''(1)=v(0)=v'(0)=v''(1)= \\ \qquad w(0)=w'(0)=w''(1)=0 \end{cases}$$

由于函数

$$f(t,u,v,w) = (\sqrt{u}+\sqrt{v})\left[\mathrm{e}^{u-v}+(u-v)(u^2-v)+t(1+w)\right],$$

$$g(t,u,v,w) = \frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{1+(u-v)^2}\left[1+u-v+t(1+w)\mathrm{e}^{u-v}\right],$$

$$h(t,u,v) = t^2(u^2-v^2)\mathrm{e}^{uv}+\arctan(1+u+v^2)$$

满足条件：$h(t,u,u)=\arctan(1+u+u^2)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上有界，且

$$f(t,u,u,w) = g(t,u,u,w) = 2\sqrt{u}\left[1+t(1+w)\right].$$

其中函数 $b(u)=2\sqrt{u}$ 满足定理 2 的条件 2)，根据定理 2 知该三阶微分方程组边值问题至少存在一个形如(u^*, u^*, w^*)的正解.

参考文献

References

[1] Fink A M, Gatica J A. Positive solutions of second order systems of boundary value problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1993, 180(1): 93-108

[2] 马如云. 奇异二阶边值问题的正解 [J]. 数学学报, 1998, 41(6): 1225-1230
MA Ruyun. Positive solutions of singular second order boundary value problems [J]. Acta Mathematica Sinica, 1998, 41(6): 1225-1230

[3] 李仁贵，刘立山. 二阶奇异非线性微分方程边值问题的正解 [J]. 应用数学和力学, 2001, 22(4): 435-440
LI Rengui, LIU Lishan. Positive solutions of boundary value problems for second order singular nonlinear differential equations [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(4): 435-440

[4] 程建纲. 二阶边值问题的正解 [J]. 数学学报, 2001, 44(3): 429-436

CHENG Jiangang. Positive solutions of second order boundary value problems [J]. Acta Mathematica Sinica, 2001,44(3):429-436

[5] 孙伟平,葛渭高. 一类非线性边值问题正解的存在性[J]. 数学学报,2001,44(4):577-580
SUN Weiping,GE Weigao. The existence of positive solutions for a class of nonlinear boundary value problems [J]. Acta Mathematica Sinica,2001,44(4):577-580

[6] 杨志林,孙经先. 非线性二阶常微分方程组边值问题正解[J]. 数学学报,2004,47(1):111-118
YANG Zhilin,SUN Jingxian. Positive solutions of boundary value problems for systems of nonlinear second order ordinary differential equtions [J]. Acta Mathematica Sinica,2004,47(1):111-118

[7] Yao Q. The existence and multiplicity of positive solution for a third-order boundary value problem [J]. Acta Math Appl,2003,19(1):117-122

[8] Anderson D,Avery R I. Multiple positive solutions to a third-order discrete focal boundary value problem [J]. Computers & Mathematics with Applications,2001,42(3/4/5):333-340

[9] 姚庆六. 三阶常微分方程的某些非线性特征值问题正解[J]. 数学物理学报,2003,23A(5):513-519
YAO Qingliu. Positive solutions to some nonlinear eigenvalue problems of third-order ordinary differential equations [J]. Acta Mathematicea Scientia,2003,23A(5):513-519

[10] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 2版. 济南:山东科学技术出版社,2001:314
GUO Dajun. Nonlinear functional analysis [M]. 2nd ed. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2001:314

The existence of special positive solutions of a class of boundary value problems for systems of third order differential equations

TANG Yulian[1] XIA Dafeng[1]

1 College of Mathematics & Statistics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract This paper is concerned with the existence of special positive solutions of a class of boundary value problems for systems of third order differential equations:

$$\begin{cases} -u''' = f(t,u,v,w), \\ -v''' = g(t,u,v,w), \\ -w''' = h(t,u,v), \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = v(0) = v'(0) = v''(1) = w(0) = w'(0) = w''(1) = 0 \end{cases}$$

under the suitable conditions,the existence of special positive solutions is established by using the Krasnonel´skii´s fixed point theorem.

Key words systems of third order differential equations; boundary value problems; positive solutions