文章编号: 1674-7070(2012)01-0029-05

基于 LMI 的不确定时滞非线性系统鲁棒镇定研究

刘继清[1]　黄金花[1]

摘要

研究了一类不确定时滞非线性系统的鲁棒镇定问题. 不确定参数是时变未知有界的,但不一定满足所谓的匹配条件. 利用线性矩阵不等式,一些充分条件被获得,保证了相应闭环系统的鲁棒稳定性,并在此基础上得出了相应的状态反馈控制器. 最后,通过一个数值例子说明了该方法的有效性.

关键词

状态反馈; 镇定; 不确定非线性系统; 线性矩阵不等式

中图分类号 TP13; TP271^{+}.9

文献标志码 A

收稿日期 2011-11-22

资助项目 国家自然科学基金(60974012)

作者简介

刘继清,男,副教授,主要从事算法研究、控制理论及系统软件开发等工作. ljq6521@public.wh.hb.cn

黄金花(通信作者),女,教授,主要从事控制理论及系统开发工作. angela_icec@yahoo.com.cn

1 武汉船舶职业技术学院 电气与电子工程系,武汉,430050

0 引言

系统的鲁棒性是控制系统设计中的一个重要问题[1],其关注的是系统在具有未知扰动的情况下其一些相应的定性特征能否得到保持,例如系统稳定性. 这种特性通常也被称为结构稳定性. 因此,鲁棒控制的研究在控制系统的综合设计中具有重要研究意义.

时滞系统(也称为遗传性或具有记忆,偏离参数,后效应,滞后行为,死区时间,或时间延迟)表示的一类无穷维系统[2]主要是用来表示传播,运输或种群动态(生殖,发育或灭绝)等现象. 在经济系统中,由于决策和影响(投资政策,商品市场的演变:价格波动及贸易周期)被一些间隔的时间分离(如必要的分析),时滞现象通常以一个自然的方式出现. 在通信中,数据传输总是在信息或信号的启动和交互时间之间存在一个非零的时间间隔. 在其他情形下,系统相应的模型在一些必要的简化下可能导致时滞行为出现.

在实际的控制系统中,时滞和不确定性经常能够遇到,且往往是系统无法稳定的重要来源[3]. 因此具有时滞行为的系统的稳定性分析和相应控制器的设计具有重要的理论意义和实际价值[4-7]. 近年来,有关时滞系统的稳定性分析及相应控制器的设计已经吸引了人们的大量关注. 特别是,伴随着鲁棒控制理论的发展,一系列有关不确定时滞系统的鲁棒镇定方法已经相继提出. 现有的时滞系统的鲁棒镇定方法通常可分为两类:时滞独立和时滞依赖[8]. 时滞独立的镇定方法给出了一个与时滞大小无关的控制器[9-12]. 另一方面,时滞依赖的镇定方法通常有赖于时滞的大小且通常相应的时滞大小往往有一个上界[13],在这种情况下,相应的控制器能够保证在时滞小于上界的情况下相应的闭环系统能够渐近稳定. 虽然有关时滞独立的稳定性在过去几十年已被大量研究人员广泛地研究,但时滞依赖的稳定性的研究依旧相对较新且在不断发展. 一般来说,时滞依赖的稳定的条件较时滞独立的稳定性条件具有更强的保守性,特别是当时滞相对小的情况下.

本文讨论了一类由状态方程描述的时滞不确定非线性系统,其不确定参数是时变未知但有界的. 通过线性矩阵不等式给出了具有时滞独立的标称线性系统稳定的相关判据,并在此基础上,得出了相应的状态反馈控制器,保证了相应闭环系统的鲁棒稳定性,最后,通过一个数值例子说明了该方法的有效性.

1 问题描述

$\mathbf{R}$ 表示实数集合，$C_{n,\tau}$ 表示从区间 $[-\tau,0]$ 映射到 $\mathbf{R}^n$ 的具有一致拓扑收敛性的连续向量函数的 Banach 空间，$\|\cdot\|$ 指的是欧氏向量范数，$\|\varphi\|_C = \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|\varphi(s)\|$ 表示函数 $\varphi\in C_{n,\tau}$ 的范数.

考虑如下的不确定时变时滞线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Af(x(t)) + (A_\tau + \Delta A_\tau(t))f(x(t-\tau)) + \\ \quad (B+\Delta B(t))u(t), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t\in[-\bar{\tau},0].\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbf{R}^n$ 表示状态，$u(t)\in\mathbf{R}^m$ 表示控制输入，τ 是一个时滞，$\varphi(t)$ 是一个连续的初始函数，A，A_τ 和 B 是具有适当维数的常数矩阵，ΔA_τ，ΔB 是具有范数有界性的未知的时变参数矩阵，其表达满足：

$$|\Delta A_\tau(t)| < \bar{A}_\tau, \quad |\Delta B(t)| < \bar{B}. \tag{2}$$

其中 $\bar{A}_\tau = (\bar{a}_{ij}^\tau)_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $\bar{B} = (\bar{b}_{ij}^\tau)_{n\times m}\in\mathbf{R}^{n\times m}$ 是已知的实常数矩阵，$|\Delta A_\tau(t)| < \bar{A}_\tau$ 的含义是 $|\Delta a_{ij}^\tau(t)| < \bar{a}_{ij}^\tau$，这里 $\Delta a_{ij}^\tau(t)$ 和 $\bar{a}_{ij}^\tau$ 分别为矩阵 $\Delta A_\tau(t)$ 和 $\bar{A}_\tau$ 的第 i 行和 j 列所对应的元素. 本文总假设非线性函数 $f(x) = (f_1(x_1),f_2(x_2),\cdots,f_n(x_n))^{\mathrm{T}}$ 属于如下的函数集合空间：

$$\{f(\cdot)\mid 0<\delta_i\leqslant\frac{f_i(x)-f_i(y)}{x-y}\leqslant\ell_i, \\ \forall x,y\in\mathbf{R}, f_i(0)=0, i=1,\cdots,n\}, \tag{3}$$

这里 δ_i，$\ell_i(i\in\{1,2,\cdots,n\})$ 是常数. 记 $I_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 阶单位矩阵，$L = \mathrm{diag}\{\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_n\}$，$\delta_{ij} = \begin{cases}0, i\neq j,\\ 1, i=j.\end{cases}$ 为了镇定系统(1)，我们设计一个线性无记忆状态反馈控制律为 $u(t) = Kx(t)$，其中 $K\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 是相应闭环系统的鲁棒稳定性决定的常数矩阵，相应的闭环系统具有如下表达式：

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = (BK+\Delta B(t)K)x(t) + Af(x(t)) + \\ \quad (A_\tau+\Delta A_\tau(t))f(x(t-\tau)), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t\in[-\bar{\tau},0].\end{cases} \tag{4}$$

假设 $V:\mathbf{R}\times C_{n,\tau}\to\mathbf{R}$ 是连续的且 $x(t_0,\varphi)$ 是(5)的解，定义如下的一个右上 Dini 导数：

$$\dot{V}(t,\varphi) = \limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(t+h,x_{t+h}(t_0,\varphi)) - V(t,\varphi)].$$

定义 1 对于不确定线性系统(1)，若存在线性状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$，正定矩阵 $P,Q\in\mathbf{R}^{n\times n}$，及一个连续的，非负且非增的函数 $w(s)$ 使得如下条件成立：对于容许的不确定性 $F(\cdot)$ 及所有 $(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$，相应闭环系统的 Lyapunov 泛函

$$V(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\,\mathrm{d}s$$

的导数满足如下的表达式

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),t)}{\mathrm{d}t}\leqslant -w(\|x(t)\|), \tag{5}$$

则系统(1)称为是“二次可镇定”的.

若不等式(5)成立，由 Krasovskii 稳定性定理得相应的闭环系统(4)是一致渐近稳定的.

2 主要结果

本节将给出不确定线性系统(1)的镇定方法及相关结论.

定理 1 对 $i=1,2,\cdots,n$，假设 $a_{ii}+\bar{a}_{ii}<0$，$i=1,2,\cdots,\nu$；$a_{jj}+\bar{a}_{jj}\geqslant 0$，$j=v+1,\cdots,n$，这里 $v\in\{1,2,\cdots,n\}$. 如果存在矩阵 $K\in\mathbf{R}^{m\times n}$，正定矩阵 $P=\mathrm{diag}\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 和正定矩阵 Q 使得矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 是负定的，则不确定非线性系统(1)是二次可镇定的，且有一个适当的镇定反馈控制律为 $u(t) = Kx(t)$，这里

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12} & \boldsymbol{\Omega}_{13}\\ \boldsymbol{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_{22} & 0\\ \boldsymbol{\Omega}_{13}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{\Omega}_{33}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{11} = (P(BK+|\bar{B}K|) + (K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + (|\bar{B}K|)^{\mathrm{T}})P + L^{\mathrm{T}}QL + PP) + \\ \mathrm{diag}\left(0,\cdots,0,\frac{4p_{\nu+1}a_{\nu+1,\nu+1}}{\delta_{\nu+1}}\ell_{\nu+1}^2,\cdots,\frac{4p_n a_{nn}}{\delta_n}\ell_n^2\right);$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{12} = ((1-\delta_{ij})p_i a_{ij})_{n\times n};$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{22} = \mathrm{diag}\left(\frac{2p_1a_{11}}{\ell_1},\cdots,\frac{2p_\nu a_{\nu\nu}}{\ell_\nu},-\frac{2p_{\nu+1}a_{\nu+1,\nu+1}}{\delta_{\nu+1}},\cdots,-\frac{2p_na_{nn}}{\delta_n}\right)_{n\times n};$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{13} = PA_\tau;$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{33} = \bar{A}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{A}_\tau - Q.$$

证明 取如下的 Lyapunov 泛函

$$V(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\,\mathrm{d}s,$$

对其沿着闭环系统(4)的解的轨迹求导可得：

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),t)}{\mathrm{d}t} = \\ \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) + (f(x(t)))^{\mathrm{T}}Qf(x(t)) - \\ (f(x(t-\tau)))^{\mathrm{T}}Qf(x(t-\tau)) = \\ x^{\mathrm{T}}(t)(P(BK+\Delta B(t)K) + (K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}}(\Delta B(t))^{\mathrm{T}})P)x(t) + \\ 2x^{\mathrm{T}}(t)PAf(x(t)) + 2x^{\mathrm{T}}(t)P(A_\tau+\Delta A_\tau(t))f(x(t-\tau)) + \\ (f(x(t)))^{\mathrm{T}}Qf(x(t)) - (f(x(t-\tau)))^{\mathrm{T}}Qf(x(t-\tau)) \leqslant \\ x^{\mathrm{T}}(t)(P(BK+|\bar{B}K|) + (K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + (|\bar{B}K|)^{\mathrm{T}})P)x(t) + \\ 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_i a_{ij}x_i(t)f(x_j(t)) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_\tau f(x(t-\tau)) +$$

南京信息工程大学学报:自然科学版,2012,4(1):29-33
Journal of Nanjing University of Information Science and Technology: Natural Science Edition,2012,4(1):29-33

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PPx}(t)+(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\pi}f(\boldsymbol{x}(t-\tau))+\\
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QLx}(t)-(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{x}(t-\tau))=\\
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{BK}+|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)+(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+(|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}+\\
&\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QL}+\boldsymbol{PP})\boldsymbol{x}(t)+2\sum_{i=1}^{v}p_ia_{ii}x_i(t)f_i(x_i(t))+\\
&2\sum_{i=1}^{n}p_ia_{il}x_i(t)f(x_j(t))+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1,j\neq i}^{n}p_ia_{ij}x_i(t)f(x_j(t))+\\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PA}_{\pi}f(\boldsymbol{x}(t-\tau))+\\
&(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}-\boldsymbol{Q})f(\boldsymbol{x}(t-\tau))\leqslant\\
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{BK}+|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)+(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+(|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}+\\
&\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QL}+\boldsymbol{PP})\boldsymbol{x}(t)+2\sum_{i=1}^{v}\frac{p_ia_{ii}}{\ell_i}f_i^2(x_i(t))+\\
&2\sum_{i=v+1}^{n}\frac{p_ia_{ii}}{\delta_i}f_i^2(x_i(t))+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_ia_{ij}x_i(t)f_j(x_j(t))+\\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PA}_{\pi}f(\boldsymbol{x}(t-\tau))+\\
&(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}-\boldsymbol{Q})f(\boldsymbol{x}(t-\tau))=\\
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{BK}+|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)+(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+(|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}+\\
&\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QL}+\boldsymbol{PP})\boldsymbol{x}(t)+4\sum_{i=v+1}^{n}\frac{p_ia_{ii}}{\delta_i}\ell_1^2x_i^2(t)+\\
&2\sum_{i=1}^{v}\frac{p_ia_{ii}}{\ell_i}f_i^2(x_i(t))-2\sum_{i=v+1}^{n}\frac{p_ia_{ii}}{\delta}f_i^2(x_i(t))+\\
&2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq1}^{n}p_ia_{ij}x_i(t)f_j(x_j(t))+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PA}_{\pi}f(\boldsymbol{x}(t-\tau))+\\
&(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}-\boldsymbol{Q})f(\boldsymbol{x}(t-\tau))\leqslant\\
&\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ f(\boldsymbol{x}(t))\\ f(\boldsymbol{x}(t-\tau))\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ f(\boldsymbol{x}(t))\\ f(\boldsymbol{x}(t-\tau))\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{6}
$$

因为$\boldsymbol{\Omega}_1$是负定的,由(6)知(5)成立.根据定义1,不确定非线性系统(1)是二次可镇定的,且有一个适当的镇定反馈控制律为$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{Kx}(t)$.

推论1 对$i=1,2,\cdots,n$,假设$a_{ii}+\bar{a}_{ii}<0$,$i=1,2,\cdots,\nu$;$a_{jj}+\bar{a}_{jj}\geqslant0$,$j=\nu+1,\cdots,n$,这里$\nu\in\{1,2,\cdots,n\}$.**如果矩阵$\boldsymbol{\Omega}_2$是负定的,则不确定非线性系统(1)是二次可镇定的,且有一个适当的镇定反馈控制律为$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{x}(t)$,这里**

$$
\boldsymbol{\Omega}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11}&\boldsymbol{\Omega}_{12}&\boldsymbol{\Omega}_{13}\\ \boldsymbol{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\Omega}_{22}&0\\ \boldsymbol{\Omega}_{13}^{\mathrm{T}}&0&\boldsymbol{\Omega}_{33}\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}_{11}&=(-\boldsymbol{B}+|\overline{\boldsymbol{B}}|-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+|\overline{\boldsymbol{B}}|^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{I})+\\
&\quad\mathrm{diag}\left(0,\cdots,0,\frac{4a_{\nu+1,\nu+1}}{\delta_{\nu+1}}\ell_{\nu+1}^2,\cdots,\frac{4a_{nn}}{\delta_n}\ell_n^2\right);\\
\boldsymbol{\Omega}_{12}&=((1-\delta_{ij})a_{ij})_{n\times n};\\
\boldsymbol{\Omega}_{22}&=\mathrm{diag}\left(\frac{2a_{11}}{\ell_1},\cdots,\frac{2a_{\nu\nu}}{\ell_\nu},-\frac{2a_{\nu+1,\nu+1}}{\delta_{\nu+1}},\cdots,-\frac{2a_{nn}}{\delta_n}\right)_{n\times n};\\
\boldsymbol{\Omega}_{13}&=\boldsymbol{A}_{\tau};\\
\boldsymbol{\Omega}_{33}&=\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}-\boldsymbol{I}_{n\times n}.
\end{aligned}
$$

证明 取$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{K}=\boldsymbol{I}_{n\times n}$,由定理1知结论成立.

定理2 对$i=1,2,\cdots,n$,假设$a_{ii}+\bar{a}_{ii}<0$,$i=1,2,\cdots,\nu$;$a_{jj}+\bar{a}_{jj}\geqslant0$,$j=\nu+1,\cdots,n$,这里$\nu\in\{1,2,\cdots,n\}$.**如果存在矩阵$\boldsymbol{K}\in\mathbf{R}^{m\times n}$,正定矩阵$\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$和正定矩阵$\boldsymbol{Q}$使得矩阵$\boldsymbol{\Omega}_{33}=\boldsymbol{A}_{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau}+\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}-\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{\Omega}_3$是负定的,则不确定非线性系统(1)是二次可镇定的,且有一个适当的镇定反馈控制律为$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{Kx}(t)$,这里**

$$
\boldsymbol{\Omega}_3=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11}&\boldsymbol{\Omega}_{12}\\ \boldsymbol{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\Omega}_{22}\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}_{11}&=(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{BK}+|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)+(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+(|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QL}+2\boldsymbol{PP})+\\
&\quad\mathrm{diag}\left(0,\cdots,0,\frac{4p_{\nu+1}a_{\nu+1,\nu+1}}{\delta_{\nu+1}}\ell_{\nu+1}^2,\cdots,\frac{4p_na_{nn}}{\delta_n}\ell_n^2\right);\\
\boldsymbol{\Omega}_{12}&=((1-\delta_{ij})p_ia_{ij})_{n\times n};\\
\boldsymbol{\Omega}_{22}&=\mathrm{diag}\left(\frac{2p_1a_{11}}{\ell_1},\cdots,\frac{2p_\nu a_{\nu\nu}}{\ell_\nu},-\frac{2p_{\nu+1}a_{\nu+1,\nu+1}}{\delta_{\nu+1}},\cdots,-\frac{2p_na_{nn}}{\delta_n}\right)_{n\times n}.
\end{aligned}
$$

证明 取如下的 Lyapunov 泛函

$$
V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Px}(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Qx}(s)\,\mathrm{d}s
$$

对其沿着闭环系统(4)的解的轨迹求导可得:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t),t)}{\mathrm{d}t}=\\
&\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Px}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+(f(\boldsymbol{x}(t)))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{x}(t))-\\
&(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{x}(t-\tau))\leqslant\\
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{BK}+|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)+(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+(|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}+\\
&\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QL}+\boldsymbol{PP})\boldsymbol{x}(t)+4\sum_{i=v+1}^{n}\frac{p_ia_{ii}}{\delta_i}\ell_i^2x_i^2(t)+\\
&2\sum_{i=1}^{v}\frac{p_ia_{ii}}{\ell_i}f_1^2(x_i(t))-2\sum_{i=v+1}^{n}\frac{p_ia_{ii}}{\delta_i}f_1^2(x_i(t))+\\
&2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_ia_{ij}x_i(t)f_j(x_j(t))+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PA}_{\pi}f(\boldsymbol{x}(t-\tau))+\\
&(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}-\boldsymbol{Q})f(\boldsymbol{x}(t-\tau))\leqslant\\
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{BK}+|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)+(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+(|\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}|)^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}+\\
&\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QL}+\boldsymbol{PP})\boldsymbol{x}(t)+4\sum_{i=v+1}^{n}\frac{p_ia_{ii}}{\delta_i}\ell_i^2x_i^2(t)+\\
&2\sum_{i=1}^{v}\frac{p_ia_{ii}}{\ell_i}f_i^2(x_i(t))-2\sum_{i=v+1}^{n}\frac{p_ia_{ii}}{\delta_i}f_i^2(x_i(t))+\\
&2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq1}^{n}p_ia_{ij}x_j(t)f_j(\boldsymbol{x}_j(t))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PPx}(t)+\\
&(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\pi}f(\boldsymbol{x}(t-\tau))+\\
&(f(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\tau}-\boldsymbol{Q})f(\boldsymbol{x}(t-\tau))=
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \\ f(x(t-\tau)) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12} & 0 \\ \boldsymbol{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \\ f(x(t-\tau)) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

因为 $\boldsymbol{\Omega}_{33} = \boldsymbol{A}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_\tau + \overline{\boldsymbol{A}}_\tau^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_\tau - \boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_2$ 是负定的，由(7)知(5)成立. 根据定义 1，不确定非线性系统(1)是二次可镇定的，且有一个适当的镇定反馈控制律为 $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{Kx}(t)$.

推论 2 对 $i = 1,2,\cdots,n$，假设 $a_{ii} + \bar{a}_{ii} < 0$，$i = 1,2,\cdots,\nu$；$a_{jj} + \bar{a}_{jj} \geqslant 0$，$j = \nu+1,\cdots,n$，这里 $\nu \in \{1,2,\cdots,n\}$. 如果矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{33} = \boldsymbol{A}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_\tau + \overline{\boldsymbol{A}}_\tau^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_\tau - \boldsymbol{I}_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_4$ 是负定的，则不确定非线性系统(1)是二次可镇定的，且有一个适当的镇定反馈控制律为 $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{x}(t)$，这里

$$\boldsymbol{\Omega}_4 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12} \\ \boldsymbol{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{11} = (-\boldsymbol{B} + |\overline{\boldsymbol{B}}| - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + |\overline{\boldsymbol{B}}|^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{I}_{n\times n}) + \mathrm{diag}\left(0,\cdots,0,\frac{4a_{\nu+1,\nu+1}}{\delta_{\nu+1}}\ell_{\nu+1}^2,\cdots,\frac{4a_{nn}}{\delta_n}\ell_n^2\right);$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{12} = ((1-\delta_{ij})a_{ij})_{n\times n};$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{22} = \mathrm{diag}\left(\frac{2a_{11}}{\ell_1},\cdots,\frac{2a_{\nu\nu}}{\ell_\nu},-\frac{2a_{\nu+1,\nu+1}}{\delta_{\nu+1}},\cdots,-\frac{2a_{nn}}{\delta_n}\right)_{n\times n}.$$

证明 取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}_{n\times n}$，由定理 2 知结论成立.

3 数值算例

考虑不确定时滞非线性系统(1)，其中 $\delta_1 = \delta_2 = 1$，$\ell_1 = \ell_2 = 2$，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{A}}_\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4.1 & 1 \\ 1 & 4.6 \end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此，可得下列矩阵

$$\boldsymbol{\Omega}_{33} = \boldsymbol{A}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_\tau + \overline{\boldsymbol{A}}_\tau^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_\tau - \boldsymbol{I}_{n\times n} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}-\frac{7}{8} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{9}-\frac{7}{8} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{11} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Omega}_{12} = (0)_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{22} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

从而矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{33} = \boldsymbol{A}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_\tau + \overline{\boldsymbol{A}}_\tau^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_\tau - \boldsymbol{I}_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_4$ 是负定的，根据推论 2 可得，所给的系统是二次可镇定的，且有一个适当的镇定反馈控制器为 $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{x}(t)$. 因此可知这个时滞独立的反馈控制器能够在不考虑时滞大小的情况下镇定例子中的不确定系统.

4 结论

在本文中，基于线性矩阵不等式方法，对于时滞不确定非线性系统，得到了一些关于时滞独立的鲁棒镇定判据. 系统中的不确定项具有数值界而不需满足匹配条件，消除了应用其他不确定项表达式所带来的约束. 最后的数值算例表明了方法的有效性.

参考文献
References

[1] Willems J L，Williems J C. Robust stabilization of uncertain systems [J]. SIAM Journal on Control and Optimization，1983，21(3)：352-375

[2] Bensoussan A，Da Prato G，Defour M C，et al. Representation and control of infinite dimensional systems [M]. Boston：Birkhäuser，1993

[3] Niculescu S I. Delay effects on stability：A robust control approach [M]. London：Springer-Verlag，2001

[4] Fridman E，Shaked U. Delay-dependent Stability and H∞ control：Constant and time-varying delays [J]. International Journal of Control，2003，76(1)：48-60

[5] Fridman E，Shaked U. An improved stabilization method for linear time-delay systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2002，47(11)：1931-1937

[6] Moon Y S，Park P，Kwon W H，et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems [J]. International Journal of Control，2001，74(14)：1447-1455

[7] Li X，de Souza C E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay [J]. Automatica，1997，33(9)：1657-1662

[8] Li X，de Souza C E. Delay-dependent robust stability and stabilization for uncertain linear delay systems：A linear matrix inequality approach [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，1997，42(8)：1144-1148

[9] Wu M，He Y，She J H，et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems [J]. Automatica，2004，40(8)：1435-1439

[10] He Y，Wang Q G，Lin C，et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay [J]. Automatica，2007，43(2)：371-376

[11] Zhu X L，Yang G H. Delay-dependent stability criteria for systems with differentiable time delays [J]. Acta Automatica Sinica，2008，34(7)：765-771

[12] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. Systems & Control Letters，1987，8(4)：351-357

[13] 高会军，王常虹. 不确定离散多时滞系统的时滞相关鲁棒镇定 [J]. 自动化学报，2004，30(5)：789-795
GAO HuiJun，WANG Changhong. Delay-dependent robust stabilization for uncertain discrete-time systems with multiple state delays [J]. Acta Automatica Sinica，2004，30(5)：789-795

Robust stabilization for uncertain nonlinear systems with delay based on linear matrix inequality

LIU Jiqing[1] HUANG Jinhua[1]
1 Department of Electric and Electronic Engineering, Wuhan Institute of Shipbuilding Technology, Wuhan 430050

Abstract This paper presents the stabilization of a class of uncertain nonlinear systems with delays. The uncertainty is bounded and may not satisfy the so-called matching conditions. Some sufficient conditions are derived to guarantee the resultant closed-loop system to be robustly stable. Those conditions are expressed as the solvability problem of linear matrix inequalities. Based on these criteria, the problem is solved via state feedback controller. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words state feedback; stabilization; uncertain nonlinear system; linear matrix inequality (LMI)