文章编号:1674-7070(2011)06-0571-03

矩阵论中的图论匹配法

陈丽娟[1]

摘要

G. Birkhoff 用代数的方法证明了如果一个矩阵是双随机矩阵,则它能表示成置换矩阵的凸线性组合.设 G 是具有两分类(X,Y)的二部图,则 G 中含有饱和 X 中的所有顶点的匹配 M 的充分必要条件为:对 $\forall S\subseteq X$,有 $d_G(S)\geqslant |S|$. 文章借助上述二部图的匹配思想,给出这一结论的图论证明.

关键词

双随机矩阵;置换矩阵;二部图;匹配

中图分类号 O157.5

文献标志码 A

0 引言

设 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})_{m\times n}$为一非负矩阵,若它的行和与列和均为 1,则 $\boldsymbol{Q}$ 称为双随机矩阵.令 $\boldsymbol{P}$ 为(0,1)矩阵,如果 $\boldsymbol{P}$ 的每行与每列都恰含有一个"1",则称 $\boldsymbol{P}$ 为置换矩阵.显然,每一个置换矩阵都是双随机矩阵.

在文献[1]中,G. Birkhoff 用代数的方法证明了如果一个矩阵是双随机矩阵,则它能表示成置换矩阵的凸线性组合.文献[2-4]都引用 G. Birkhoff 的这一证法.

图的理论在几乎所有学科领域中都有应用,主要原因在于图论提供了一个自然的结构,由此而产生的数学模型几乎适合于所有科学(自然科学和社会科学)领域.文献[5-7]给出了图的不同应用,而本文则借助图论中二部图的匹配,给出矩阵论中这一结论的图论证明.

1 基本概念和定理

本部分所涉及的相关概念和定理均引自文献[8].

定义 1 一个图 G 是指一个有序三元组$(V(G),E(G),\chi_G)$,其中 $V(G)$是非空的顶点集,$E(G)$是不与 $V(G)$相交的边集,而χ_G 是关联函数,它使 G 的每条边对应 G 的无序顶点对.

有时把 $V(G)$和 $E(G)$分别简记作 V 和 E.

一个图可用平面上的图形来表示,每个顶点用点来表示,每条边用线来表示,此线连接着代表该边端点的点.连接同一条边的两顶点称为相邻.

定义 2 设图 G 和顶点 x,G 中以 x 为端点的边的条数称为顶点 x 在 G 中的度,记作 $d_G(x)$.若 $S\subseteq V$,用 $d_G(S)$表示 S 中所有点在 G 中的度和,$N_G(S)$表示 S 中所有点在 G 中的相邻点的集合.

显然,$d_G(S)=|N_G(S)|$.

设图 G 的顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,令 G 的一个置换为

$$\boldsymbol{\pi}=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ v_{i_1} & v_{i_2} & \cdots & v_{i_n}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}.$$

定义 $\boldsymbol{\pi}$ 的置换矩阵为 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_n$,其中 $p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i=\boldsymbol{\pi}(v_j), \\ 0, & \text{否则 } k\neq i, p_{kj}=0.\end{cases}$

如

收稿日期 2010-11-28

资助项目 教育部科学技术研究重点项目(207047)

作者简介

陈丽娟,女,博士生,副教授,主要研究图论与空间天气动力学模型. clj_qq@sohu.com

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

图 G 中一组无公共点的边的集合称为 G 的一个匹配(也称对集),记作 M. 设 v 是 G 的一个顶点,若 v 是 M 中某条边的一个顶点,则称 v 是 M 和的.

引理 设 G 是具有两分类(X,Y)的二部图,则 G 中含有饱和 X 中的所有顶点的匹配 M 的充分必要条件为:对 $\forall S \subseteq X$,有 $d_G(S) \geqslant |S|$.

2 结论的证明

定理 每一个双随机矩阵都能表示成置换矩阵的凸线性组合. 即若 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{m\times n}$ 为双随机矩阵,则

$$\boldsymbol{Q} = c_1\boldsymbol{P}_1 + c_2\boldsymbol{P}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{P}_k,$$

这里 $\boldsymbol{P}_i$ 是置换矩阵,c_i 是非负实数且 $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$.

证明 显然 $\boldsymbol{Q}$ 是方阵. 因为双随机矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的行和与列和均为 1,所以有

$$n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} q_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\right) = m,$$

从而 $\boldsymbol{Q}$ 为方阵.

构造一个二部图 $\boldsymbol{G}$,其分划为(X,Y),X 中的元素为 $\boldsymbol{Q}$ 中的行,Y 中的元素为 $\boldsymbol{Q}$ 中的列. $x_i \in X, y_j \in Y$,相连以边的充分必要条件是 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{m\times n}$ 中 $q_{ij} \neq 0$. 对 $\forall S \subseteq X$,S 中对应的行中的非零元素之和为$|S|$,而对应的 $N_G(S)$ 中至少含$|S|$列才能覆盖这些 S 中对应行中的非零元素,所以有

$$d_G(S) = |N_G(S)| \geqslant |S|.$$

由引理知,G 中存在匹配 M,使 X 中的点在 M 下均饱和. 又 $\boldsymbol{Q}$ 为方阵,从而$|X| = |Y|$,故 M 为 G 的一个完美匹配. M 中的边对应在 $\boldsymbol{Q}$ 中的元素为

$$q_{1i_1}, q_{2i_2}, \cdots, q_{ni_n} > 0,$$

令

$$c_1 = \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{q_{k,i_k}\} > 0,$$

$\boldsymbol{P}_1$是置换$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$所对应的置换矩阵. 又令

$$\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q} - c_1\boldsymbol{P}_1,$$

若 $\boldsymbol{Q}_1 = 0$,则结论已成立. 若 $\boldsymbol{Q}_1 \neq 0$,则显然 $c_1 < 1$,且 $\boldsymbol{Q}_1$仍为非负矩阵. 于是 $\boldsymbol{Q}_1 / (1 - c_1)$仍为双随机矩阵,从而对 $\boldsymbol{Q}_1 / (1 - c_1)$可重复上述过程.

由于每进行一次,对应矩阵中的元素至少增加一个零元素,从而经过有限次后,不妨设为 k 次后,$\boldsymbol{Q}_k \equiv 0$,所以

$$\boldsymbol{Q} = c_1\boldsymbol{P}_1 + c_2\boldsymbol{P}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{P}_k.$$

又因

$$\sum_{i=1}^{n} q_{i_1} = 1 = c_1\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{P}_{i_1}(1) + c_2\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{P}_{i_1}(2) + \cdots + c_k\sum_{i=1}^{n}P_{i_1}(k) = c_1 + c_2 + \cdots + c_k.$$

故结论成立.

参考文献
References

[1] Birkhoff D. Tres observaciones sobre el algebra lineal [J]. Univsidad Naccional de Tucuman Revista, Serie A, 1946, 5: 147-151

[2] 李乔. 矩阵论八讲[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988
LI Qiao. Eight lectures of matrix theory [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1988

[3] 戴华. 矩阵论[M]. 北京:科学出版社,2001
DAI Hua. Theory of matrix[M]. Beijing: Science Press, 2001

[4] Stuart J L, Weaver J R. Diagonally scaled permutations and circulant matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1994, 212-213: 397-411

[5] 谭尚旺. 矩阵特征多项式的图论计算公式[J]. 纯粹数学与应用数学,2009,25(2):209-216
TAN Shangwang. On formulas calculating the characteristic polynomial of matrices in graph theory[J]. Pure and Applied Mathematics, 2009, 25(2): 209-216

[6] Liu G Z, Zhu B H. Some problems on factorizations with constraints in bipartite graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2003, 128(2): 421-434

[7] 李世群. 简单图的最大匹配的矩阵求法[J]. 数学的实践与认识,2007,37(7):120-124
LI Shiqun. Severy algorith of maximum matching for simple graghs by means matrix[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2007, 37(7): 120-124

[8] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with application [M]. New York: Elsevier Science Press, 1976

Matching method of graph theory in matrix theory

CHEN Lijuan[1]

1 College of Mathematics Physics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

Abstract Let a non-negative real matrix $\boldsymbol{Q}$ be doubly stochastic, and a permutation matrix be a $(0,1)$-matrix which has exactly one 1 in each row and each column, then every permutation matrix will be doubly stochastic matrix. G. Birkhoff proved a conclusion that every doubly stochastic matrix $\boldsymbol{Q}$ can be expressed as a convex linear combination of permutation matrixs using the method of algerbra. Let G be a bipartite graph with bipartition (X, Y), then G contains a matching M that saturates every vertex in X if and only if $d_G(S) \geqslant |S|$ for all $S \subseteq X$. In this paper, we obtain the proof of graph theory on the conclusion using the above matching theorem of bipartite graph.

Key words doubly stochastic matrix; permutation matrix; bipartite graph; matching