文章编号:1674-7070(2011)06-0566-05

# 一类四阶 m 点边值问题的正解

刘佳音[1]　周伟灿[1]　唐飞[1]　魏海宁[1]

**摘要**

利用 Krasnoselskii 不动点定理与不动点指数理论,研究了一类四阶 $m$ 点边值问题正解的存在情况,在适当的条件下,证明了该类边值问题至少存在一个正解或两个正解.

**关键词**

四阶边值问题;存在性;正解;不动点定理

**中图分类号** TH71;TG803

**文献标志码** A

**收稿日期** 2011-03-31

**作者简介**

刘佳音,男,硕士生,主要研究微分方程及其应用. xecd@163.com

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

## 0 引言

考察下列四阶 $m$ 点边值问题正解的存在情况:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,u(t),u''(t)), \quad 0<t<1; \\ u(0)=u(1)=u''(0)=0; \\ u''(1)-\sum_{i=1}^{m-2} a_i u''(\xi_i)=-\lambda. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m-2)$, $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$,且 $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\xi_i<1$, $\lambda>0$ 是参数, $f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,0],[0,+\infty))$. 常微分方程边值问题由于其广泛的应用背景而受到国内外许多学者的广泛关注,特别地,对于二阶边值问题已有大量的研究[1-7]. 对于四阶常微分方程,一些学者对两点、三点甚至四点边值问题做了较多的工作[7-11],然而,对于四阶 $m$ 点边值问题的研究相对较少. 最近,文献[12]利用 Krasnoselskii's 不动点定理对 BVP(1)正解的存在性进行了研究,在超线性和次线性的情形下得到了如下两个定理.

**定理 1**[12]　若 $f$ 超线性,即 $f^0=0$, $f_\infty=+\infty$,则对于足够小的 $\lambda$, BVP(1)至少存在一个正解;而对于充分大的 $\lambda$, BVP(1)无解.

**定理 2**[12]　若 $f$ 次线性,即 $f_0=+\infty$, $f^\infty=0$,则对任意的 $\lambda\in(0,+\infty)$, BVP(1)至少存在一个正解.

其中:

$$f^0=\limsup_{x+|y|\to 0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{x+|y|}, \quad f_0=\liminf_{x+|y|\to 0^+}\min_{t\in\left[\frac14,\frac34\right]}\frac{f(t,x,y)}{x+|y|},$$

$$f^\infty=\limsup_{x+|y|\to +\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{x+|y|}, \quad f_\infty=\liminf_{x+|y|\to +\infty}\min_{t\in\left[\frac14,\frac34\right]}\frac{f(t,x,y)}{x+|y|}.$$

但文献[12]并未对 BVP(1)正解的多重性进行研究,因此,对于适当的 $\lambda$, BVP(1)是否存在多个正解? 且当 $f$ 不是超线性或次线性时, BVP(1) 是否有解? 受以上文献的启发,本文将继续研究 BVP(1),并且对上述问题给予肯定的回答.

本文中,总假设以下条件是恒成立的:

(H1)　$a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m-2)$, $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$, $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\xi_i<1$, $\lambda>0$ 是参数;

(H2) $f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,0],[0,+\infty))$.

## 1 预备知识

令 $\eta=\dfrac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}$，$E=\left\{u\in C^2[0,1]\,\middle|\,u(0)=u(1)\right\}$. 定义 $E$ 的范数为 $\|u\|=\|u''\|_\infty$，则 $E$ 是 Banach 空间.

**引理 1**[10] 若 $u\in E$，则 $\|u\|_\infty\leqslant\|u'\|_\infty\leqslant\|u''\|_\infty$，其中 $\|u\|=\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|$.

**引理 2**[12] 如果 $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i\neq1$，且 $h\in C[0,1]$，则边值问题

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=h(t),\quad 0<t<1,\\ u(0)=u(1)=u''(0)=0,\\ u''(1)-\sum_{i=1}^{m-2}a_iu''(\xi_i)=-\lambda\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)\left[\int_0^1G(s,\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau+\eta s\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1G(\xi_i,\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau+\lambda\eta s\right]\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t),\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant1,\\ t(1-s),\quad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant1.\end{cases}$$

**引理 3**[3] 上述 $G(t,s)$ 有如下性质：

1) $0\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s)$，$(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$；

2) $\frac{1}{4}G(s,s)\leqslant G(t,s)$，$(t,s)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times[0,1]$.

**引理 4**[12] 假设 $a_i\geqslant0$ $(i=1,2,\cdots,m-2)$，$\sum_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i<1$，$h\in C[0,1]$ 且 $h(t)\geqslant0$，$t\in[0,1]$，则 BVP(2) 的唯一解 $u$ 满足：

1) $u(t)\geqslant0$，$t\in[0,1]$；

2) $u''(t)\leqslant0$，$t\in[0,1]$，$\min_{t\in[\frac14,\frac34]}(-u''(t))\geqslant\frac{1}{4}\|u\|$.

记

$$K=\left\{u\in E\,\middle|\,\begin{array}{l}u(t)\geqslant0,u''(t)\leqslant0,t\in[0,1],\\ \min_{t\in[\frac14,\frac34]}(-u''(t))\geqslant\frac{1}{4}\|u\|\end{array}\right\}.$$

易知 $K$ 是 $E$ 中的锥. 若定义

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)\left[\int_0^1G(s,\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau+\eta s\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1G(\xi_i,\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau+\lambda\eta s\right]\mathrm{d}s\triangleq Tu(t),\ t\in[0,1].$$

利用 Arzela-Ascoli 定理，易验证 $T:K\to K$ 是全连续算子，且 $u$ 是 BVP(1) 的正解等价于 $u$ 是算子 $T$ 不动点.

下面将利用两个著名的定理，讨论 BVP(1) 正解的存在性.

**定理 3** (Krasnoselskii 不动点定理)[14] 设 $\Omega_1$，$\Omega_2$ 是 Banach 空间 $E$ 中的有界开集，$K\subset E$ 是锥，$0\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to K$ 全连续，如果满足条件：

1) $\|Tu\|\leqslant\|u\|$，$\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$，$\|Tu\|\geqslant\|u\|$，$\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$；或者

2) $\|Tu\|\geqslant\|u\|$，$\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$，$\|Tu\|\leqslant\|u\|$，$\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$.

则 $T$ 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 中必有不动点.

**定理 4**[14] 设 $E$ 是 Banach 空间，$K\subset E$ 是锥. 对 $\rho>0$，定义 $K_\rho:=\{u\in K:\|u\|\leqslant\rho\}$，设 $T:K_\rho\to K$ 是全连续算子，使得对 $x\in\partial K_\rho=\{u\in K:\|u\|=\rho\}$，有 $Au\neq u$.

1) 如果对 $u\in\partial K_\rho$，成立 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$，则 $i(T,K_\rho,K)=1$.

2) 如果对 $u\in\partial K_\rho$，成立 $\|Tu\|\geqslant\|u\|$，则 $i(T,K_\rho,K)=0$.

## 2 主要结论

**定理 5** 如果下列情形之一成立：

1) $f^0=\alpha$，$f_\infty=\beta$ 且 $\alpha M<1$，$\beta m>1$；

2) $f^0=0$，$f_\infty=\beta$ 且 $\beta m>1$；

3) $f^0=\alpha$，$f_\infty=+\infty$ 且 $\alpha M<1$.

其中，$\alpha,\beta\in(0,+\infty)$，

$$M\triangleq4\int_0^1G(s,s)\mathrm{d}s+4\eta\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1G(\xi_i,s)\mathrm{d}s,$$

$$m\triangleq\frac{1}{4}\int_{\frac14}^{\frac34}G\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s+\frac{\eta}{8}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\frac14}^{\frac34}G(\xi_i,s)\mathrm{d}s.$$

则对于足够小的 $\lambda$，BVP(1) 至少有一个正解，而对于足够大的 $\lambda$，BVP(1) 没有正解.

**证明** 1) 先证对于足够小的 $\lambda$，BVP(1) 至少有一个正解.

因为 $\alpha M<1$，$\beta m>1$，选取 $\varepsilon>0$ 使得

$$(\alpha+\varepsilon)M\leqslant1,\quad(\beta-\varepsilon)m\geqslant1.\tag{3}$$

由于 $f^0=\alpha$，则存在 $\rho_1>0$ 满足

$$f(t,x,y)\leqslant(\alpha+\varepsilon)(x+|y|),\quad t\in[0,1],$$
$$(x+|y|)\in[0,\rho_1].\tag{4}$$

对于 $u\in K\cap\partial\Omega_1$, $\Omega_1=\left\{u\in E\ \middle|\ \|u\|<\frac{1}{2}\rho_1\right\}$, 且 $0<\lambda\leqslant\frac{\rho_1}{4\eta}$, 由引理 3 及式(3)和(4)有

$$-(Tu)''(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s+\eta t\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1 G(\xi_i,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s+\lambda\eta t\leqslant$$
$$(\alpha+\varepsilon)\int_0^1 G(s,s)(u(s)+|u''(s)|)\mathrm{d}s+\eta(\alpha+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1 G(\xi_i,s)(u(s)+|u''(s)|)\mathrm{d}s+\frac{1}{4}\rho_1\leqslant$$
$$2(\alpha+\varepsilon)\left[\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s+\eta\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1 G(\xi_i,s)\mathrm{d}s\right]\|u''\|_\infty+\frac{1}{4}\rho_1=2(\alpha+\varepsilon)\frac{M}{4}\|u\|+\frac{1}{4}\rho_1\leqslant\|u\|.$$

表明

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1.\tag{5}$$

因 $f_\infty=\beta$, 则存在 $\rho_2>\rho_1$ 满足

$$f(t,x,y)\geqslant(\beta-\varepsilon)(x+|y|),t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right],且$$
$$(x+|y|)\in[\rho_2,+\infty].\tag{6}$$

设 $\Omega_2=\left\{u\in E\ \middle|\ \|u\|<4\rho_2\right\}$, 则对于 $u\in K\cap\partial\Omega_2$, 由引理 3、引理 4、式(3)与(6), 有

$$-(Tu)''\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s+\frac{\eta}{2}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1 G(\xi_i,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda\eta}{2}\geqslant$$
$$(\beta-\varepsilon)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G\left(\frac{1}{2},s\right)(u(s)+|u''(s)|)\mathrm{d}s+\frac{\eta}{2}(\beta-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\xi_i,s)(u(s)+|u''(s)|)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$(\beta-\varepsilon)\left[\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s+\frac{\eta}{8}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\xi_i,s)\mathrm{d}s\right]\|u''\|_\infty=(\beta-\varepsilon)m\|u\|\geqslant\|u\|.$$

即

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,\quad u\in K\cap\partial\Omega_2.\tag{7}$$

因此, 由式(5), (7)及定理 3, $T$ 有一个不动点 $u\in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$, 即 BVP(1) 至少有一个正解.

下面利用反证法证明对于足够大的 $\lambda$, BVP(1) 没有正解.

假设存在 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$, 使得对于任意的正整数 $n$, BVP

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=f(t,u(t),u''(t)),\quad 0<t<1,\\ u(0)=u(1)=u''(0)=0,\\ u''(1)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_iu''(\xi_i)=-\lambda_n\end{cases}$$

有一个正解 $u_n$. 则

$$-u''_n\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s+\frac{\eta}{2}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1 G(\xi_i,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda_n\eta}{2}\geqslant\frac{\lambda_n\eta}{2}\to+\infty\ (n\to\infty).$$

因此

$$\|u_n\|\to+\infty\ (n\to\infty).$$

利用定理 5 条件 1), 选取 $\varepsilon>0$ 使得

$$(\beta-\varepsilon)m>1,(\beta-\varepsilon)m>1\tag{8}$$

由 $f_\infty=\beta$ 知存在 $\rho>0$ 使得

$$f(t,x,y)\geqslant(\beta-\varepsilon)(x+|y|),\quad t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right],$$
$$x+|y|\in[\rho,+\infty).\tag{9}$$

让 $n$ 足够大使得 $\|u_n\|\geqslant4\rho$. 由引理 4 知

$$\min\nolimits_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}(-u''_n(t))\geqslant\frac{1}{4}\|u_n\|\geqslant\rho.\tag{10}$$

由式(8), (9)和(10)可知

$$\|u_n\|\geqslant-u''_n\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant$$
$$(\beta-\varepsilon)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G\left(\frac{1}{2},s\right)(u_n(s)+|u''_n(s)|)\mathrm{d}s+\frac{\eta}{2}(\beta-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\xi_i,s)(u_n(s)+|u''_n(s)|)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$(\beta-\varepsilon)\left[\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s+\frac{\eta}{8}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\xi_i,s)\mathrm{d}s\right]\|u''_n\|=(\beta-\varepsilon)m\|u_n\|>\|u_n\|.$$

这是矛盾的.

定理 5 情形 2), 3)类似可证, 至此完成了定理 5 的证明.

**定理 6** 如果下列情形之一成立:

1) $f_0=\alpha, f^\infty=\beta$ 且 $\alpha m>1, \beta M<1$;

2) $f_0=\alpha, f^\infty=0$ 且 $\alpha m>1$;

3) $f_0=+\infty, f^\infty=\beta$ 且 $\beta M<1$.

其中, $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$,

$$M\triangleq4\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s+4\eta\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^1 G(\xi_i,s)\mathrm{d}s,$$

$$m \triangleq \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s + \frac{\eta}{8}\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\xi_i,s)\,\mathrm{d}s.$$

则对于任意的 $\lambda \in (0, +\infty)$,BVP(1)至少有一个正解.

**证明** 1)由于 $\alpha m > 1$,$\beta M < 1$,则存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$(\alpha-\varepsilon)m \geqslant 1,\quad (\beta+\varepsilon)M \leqslant 1. \tag{11}$$

因 $f_0 = \alpha$,则存在 $\rho_3 > 0$ 满足

$$f(t,x,y) \geqslant (\alpha-\varepsilon)(x+|y|), \tag{12}$$

$$t \in \left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right],(x+|y|) \in [0,\rho_3].$$

令 $\Omega_3 = \left\{u \in E \,\middle|\, \|u\| < \frac{1}{2}\rho_3\right\}$,对于 $u \in K \cap \partial\Omega_3$,有

$$-(Tu)''\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s + \frac{\eta}{2}\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\xi_i,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s + \frac{\lambda\eta}{2} \geqslant$$
$$(\alpha-\varepsilon)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{2},s\right)(u(s) + |u''(s)|)\mathrm{d}s + \frac{\eta}{2}(\alpha-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\xi_i,s)(u(s) + |u''(s)|)\mathrm{d}s \geqslant$$
$$(\alpha-\varepsilon)\left[\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s + \frac{\eta}{8}\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\xi_i,s)\mathrm{d}s\right]\|u''\|_\infty =$$
$$(\alpha-\varepsilon)m\|u\| \geqslant \|u\|.$$

也就是

$$\|Tu\| \geqslant \|u\| \text{ for } u \in K \cap \partial\Omega_3. \tag{13}$$

另一方面,因为 $f^\infty = \beta$,可以选取 $D > 0$ 使得

$$f(t,x,y) \leqslant (\beta+\varepsilon)(x+|y|), \tag{14}$$

其中 $t \in [0,1]$,$(x+|y|) \in [D,+\infty)$. 令

$M^* = \max\{f(t,x,y): t \in [0,1], x \in [0,D], y \in [-D,0]\}$ 则有

$$f(t,x,y) \leqslant (\beta+\varepsilon)(x+|y|) + M^*. \tag{15}$$

其中 $t \in [0,1]$,$x \in [0,+\infty)$,$y \in (-\infty,0]$.

令 $\rho_4 \geqslant \max\left\{2\rho_3,\frac{M^*}{\beta+\varepsilon},4\lambda\eta\right\}$,$u \in K \cap \partial\Omega_4$,$\Omega_4 = \{u \in E \mid \|u\| < \rho_4\}$,则有

$$-(Tu)''(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s + \eta t\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\xi_i,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s + \lambda\eta t \leqslant$$
$$\int_0^1 G(s,s)((\beta+\varepsilon)(u(s) + |u''(s)|) + M^*)\mathrm{d}s + \eta\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\xi_i,s)((\beta+\varepsilon)(u(s) + |u''(s)|) + M^*)\mathrm{d}s +$$
$$\lambda\eta \leqslant (2(\beta+\varepsilon)\|u''\|_\infty + M^*)\left[\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s + \eta\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\xi_i,s)\mathrm{d}s\right] + \frac{\rho_4}{4} =$$
$$(2(\beta+\varepsilon)\|u\| + M^*)\frac{M}{4} + \frac{\rho_4}{4} \leqslant$$
$$\frac{(\beta+\varepsilon)M}{2}\|u\| + \frac{1}{4}\frac{M^*}{\beta+\varepsilon} + \frac{\rho_4}{4} \leqslant \|u\|.$$

表明

$$\|Tu\| \leqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_4. \tag{16}$$

由定理3,$T$ 有一个不动点 $u$,即 BVP(1)至少有个一正解.

类似于1)的证明可证2),3).

**注1** 显然定理5和定理6中的条件不同于文献[12]中给出的条件,也就是说,本文的结果拓展了文献[12]的结论.

**定理7** 假设 $f$ 满足以下条件:

(H2) $f^0 = f^\infty = 0$,且存在 $r_1 > 0$ 使得当 $\frac{1}{4}r_1 \leqslant u(t) \leqslant r_1$ 时 $f(t,u,u'') \geqslant (4m)^{-1}r_1$ 成立,则对于任意的 $\lambda \in (0,+\infty)$,BVP(1)至少存在两个正解.

**证明** 由 $f^0 = 0$ 知存在 $\rho_1 \in (0,r_1)$ 使得 $f(t,u,u'') \leqslant \Lambda_1(u+|u''|)$,$0 < u + |u''| \leqslant \rho_1$,其中 $\Lambda_1 > 0$ 满足 $\Lambda_1 M \leqslant 1$,令 $H_1 = \frac{1}{2}\rho_1$,$\Omega_1 = \{u \in E \mid \|u\| < H_1\}$,类似于定理5的证明,易得 $\|Tu\| \leqslant \|u\|$,因此

$$i(T,K_{H_1},K) = 1. \tag{17}$$

因 $f^\infty = 0$,利用证明定理6的方法,可选择 $H_2 = \rho_4 > r_1$,则对于 $u \in K \cap \partial\Omega_2$,

$$\Omega_2 = \{u \in E \mid \|u\| < H_2\},\text{有}\|Tu\| \leqslant \|u\|.$$

因此

$$i(T,K_{H_2},K) = 1. \tag{18}$$

如果 $u \in K \cap \partial\Omega_3$,$\Omega_3 = \{u \in E \mid \|u\| < r_1\}$,则

$$-(Tu)''\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s + \frac{\eta}{2}\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\xi_i,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s + \frac{\lambda\eta}{2} \geqslant$$
$$\frac{1}{4m}r_1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s + \frac{\eta}{2}4m^{-1}r_1\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\xi_i,s)\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\frac{1}{4m}r_1\left[\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s + \frac{\eta}{2}\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\xi_i,s)\mathrm{d}s\right] =$$

$\frac{1}{4m}r_1 \cdot 4m = \|u\|.$

因此

$$i(T,K_{r_1},K)=0. \qquad (19)$$

所以有

$$i(T,K_{H_2}\backslash\bar{K}_{r1},K)=1, i(T,K_{r1}\backslash\bar{K}_{H_1},K)=-1.$$

因而,利用定理 4 知,BVP(1)在 $K$ 中有两个正解 $u_1$ 和 $u_2$,且满足

$$0<\|u_1\|<r_1<\|u_2\|.$$

证毕.

## 参考文献

References

[1] Il'in V A,Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator[J]. Differential Equations,1987,23(8):979-987

[2] Gupta C P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1992,16(8):540-551

[3] Erbe L H,Wang H Y. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1994, 120(3): 743-748

[4] Ma R Y. Positive solutions for second order three-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics Letters,2001,14(1):1-5

[5] Gupta C P,Trofimchuk S I. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1997,205(2):586-597

[6] Guo Y P,Shan W R,Ge W G. Positive solutions for second order m-point boundary value problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(2):415-424

[7] Jiang W H,Guo Y P. Multiple positive solutions for second-order m-point boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 327(1):415-424

[8] 李迈龙.一类四阶微分方程三点边值问题的正解[J].四川师范大学学报:自然科学版,2005,28(5):556-559
LI Mailong. Positive solutions of a class of three-point boundary value problems for the fourth-order differential equation[J]. Journal of Sichuan Normal University:Natural Science Edition,2005,28(5):556-559

[9] 姚庆六.非线性四阶三点边值问题的正解存在性与多解性[J].浙江大学学报:理学版,2008,35(4):377-380
YAO Qingliu. Existence and multiplicity of positive solutions to nonlinear fourth-order three-point boundary value problems[J]. Journal of Zhejiang University:Science Edition,2008,35(4):377-380

[10] Zhong Y L,Chen S H,Wang C P. Existence results for a fourth-order ordinary differential equation with a four-point boundary condition[J]. Applied Mathematics Letters,2008,21(5):465-470

[11] 闫东明.一类四阶两点边值问题多个正解的存在性[J].工程数学学报,2010,27(1):133-138
YAN Dongming. Existence of multiple positive solutions for a class of fourth-order two-point boundary value problems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2010,27(1):133-138

[12] Pei H R,Sun J P. Positive solution for fourth-order m-point nonhomogeneous boundary value problems[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing,2010,32(2):443-452

[13] Krasnoselskii M A. Positive solutions of operator equations[M]. Groningen:P Noordhoff,1964

[14] Guo D J,Lakshmikantam V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. Boston:Academic Press,1988

[15] Wang Z Y,Zhang J H. Positive solutions for one-dimensional p-Laplacian boudary value problems with depence on the first order derivative[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2006,314(2):618-630

# Multiple positive solutions for a class of fourth-order m-point boundary value problems

LIU Jiayin[1] ZHOU Weican[1] TANG Fei[1] WEI Haining[1]

1 College of Mathematics and Physics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

**Abstract** This paper is concerned with a class of fourth-order m-point nonhomogenous boundary value problems. We show that it has at least one or two positive solutions under some assumptions by applying the Guo-Krasnoselskii fixed point theorem and fixed point index theory.

**Key words** fourth-order boundary value problem;existence;positive solutions;fixed point theorem