文章编号:1674-7070(2011)06-0556-04

广义解析函数关于区域边界摄动的稳定性

刘红爱[1]　尚林[2]　王传荣[3]　舒志彪[3]

摘要

讨论广义解析函数关于区域边界曲线摄动的稳定性,把它化为一类 Fredholm 积分方程的解一致收敛性的问题,然后利用上述 Fredholm 积分方程预解核性质成功地解决了问题.

关键词

广义解析函数;Fredholm 积分方程;摄动;稳定性

中图分类号 0175.5
文献标志码 A

收稿日期 2011-05-04
资助项目 国家自然科学基金(10271098);福建省教育厅科研基金(JB00076;JA02146);南京信息工程大学科研基金(Y522)

作者简介

刘红爱,女,博士生,讲师,研究方向为复分析(奇异积分、奇异积分方程和边值问题等). slhy620@sohu.com

1 南京信息工程大学 滨江学院,南京,210044
2 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044
3 福州大学 数学与计算机科学学院,福州,350002

0　引言

奇异积分、奇异积分方程、Cauchy 型积分和解析函数的边值问题的解关于边界曲线摄动稳定性的研究是近年来才开始活跃的一个很有意义的研究课题. 这方面的研究最早可追溯到 Keldysh[1-2]及后来的 Hedberg[3]对 Dirichlet 问题稳定性的研究. 近年来,文献[4-9]等均讨论了相关问题,而由苏联著名数学家维库阿院士[10]开辟的广义解析函数理论成功地推广了解析函数一系列基本性质,同时对广义解析函数及椭圆型微分方程组边值问题[11]也有一系列的研究. 广义解析函数及其边值问题不但在理论上有重要意义,并且在物理学、力学和工程技术中也得到了有效的应用,故将解析函数边值问题的解的稳定性推广到广义解析函数的边值问题的解稳定性当然也是很有意义的. 文献[12]讨论了广义 Cauchy 型积分关于边界曲线摄动的稳定性,文献[13]讨论了在广义解析函数论中起重要作用的三类奇异积分关于积分区域边界摄动的稳定性. 本文讨论一类广义解析函数关于区域边界曲线摄动的稳定性,讨论的是用核表示的两个分别在摄动前、后区域内的广义解析函数的稳定性. 因区域边界摄动时核会随之变化,而直接讨论核的稳定性遇到了困难,本文解决的方法是化原问题为关于摄动前、后区域内的两个广义解析函数的差满足的一类 Fredholm 积分方程的解当区域边界摄动非常小时一致收敛的问题,然后利用上述 Fredholm 积分方程预解核性质成功地解决了问题.

1　问题的提法

设 D 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的有界单连通区域,$L \subset D$ 是一条正向光滑封闭曲线(以逆时针方向为正向),对 $\rho_0 > 0$,记 $B_1(\rho_0) = \{\omega \in C^1(L): \|\omega\|_1 < \rho_0\}$,其中 $C^1(L)$ 为曲线 L 上可导且导函数连续的函数类. $\|\omega\|_L = \max\limits_{t \in L} |\omega(t)|$, $\|\omega\|_1 = \|\omega'\|_L + \|\omega\|_L$. 若 L 经过摄动 $\omega(t)$ 后得到曲线 $L_\omega = \{\xi : \xi = t + \omega(t), t \in L\}$. 由文献[4]知,当 ρ_0 充分小,$\omega \in B_1(\rho_0)$ 且 L 为光滑曲线时,$L_\omega(L_\omega \subset D)$ 亦为光滑曲线. 下文总设 ρ_0 充分小,现记 L 所界定的内、外部区域分别为 G, G^-;记 G_ω, G_ω^-分别为 L_ω 所围内、外部区域,$\Omega^+ = G_\omega \cap G, E_1 = G_\omega \cap G^-, E_2 = G_\omega^- \cap G$, $E_3 = E_1 \cap \left\{\zeta : |\zeta - z| \geqslant \|\omega\|_L^{\frac{1}{2}}\right\}, E_4 = E_1 \cap \left\{\zeta : |\zeta - z| \leqslant \|\omega\|_L^{\frac{1}{2}}\right\}$.

若 $f \in L_p(D)$,$(p>1)$,记 $L_p(f,D)=\left(\iint_D |f(z)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}(z=x+iy)$.

若 $f \in L_{p,2}(\mathbf{C})$,$(p>2)$,$f_2(z)=z^{-2}f\left(\frac{1}{z}\right)$,记 $L_{p,2}(f)=L_p(f,U)+L_p(f_2,U)$,其中 U 为单位圆.

记 $A^*_{p,2}(A,B,G)[A_{p,2}(A,B,G)]$ 表示 $A,B \in L_{p,2}(\mathbf{C})(p>2)$ 时,方程

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}+AW+B\overline{W}=0.$$

在域 G 内的广义解(正则解)类,由文献[10-11]知,函数类 $A^*_{p,2}(A,B,G)$ 为广义解析函数类.

设 $\Phi(z)$ 在 D 内解析且连续到边界,由文献[10-11]知,积分方程

$$W(z)-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{A(\zeta)W(\zeta)+B(\zeta)\overline{W(\zeta)}}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\Phi(z),$$
$$\zeta=\xi+i\eta,\quad z\in G \tag{1}$$

与

$$W_\omega(z)-\frac{1}{\pi}\iint_{G_\omega} \frac{A(\zeta)W_\omega(\zeta)+B(\zeta)\overline{W_\omega(\zeta)}}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\Phi(z),$$
$$\zeta=\xi+i\eta,\quad z\in G_\omega \tag{2}$$

分别有唯一连续解 $W(z)\in A_{p,2}(A,B,G)$ 与 $W_\omega(z)\in A_{p,2}(A,B,G_\omega)$.

本文讨论当 $\Phi(z)$ 在 D 内解析且连续到边界时 $W(z)$ 与 $W_\omega(z)$ 之间的关系.

定义1 设 $\Phi(z)$ 在 D 内解析且连续到边界,$W(z)$,$W_\omega(z)$ 分别为积分方程(1)、(2)的解,若

$$\lim_{\|\omega\|_L\to 0}\|W_\omega-W\|_{\overline{\Omega^+}}=0,$$

则称广义解析函数 $W(z)$ 关于区域边界摄动是稳定的.

2 广义解析函数的稳定性

引理1[12] 若 $f\in L_{p,2}(C)$,$p>2$,$\omega\in B_1(\rho_0)$,则当 ρ_0 充分小时,

$$\frac{1}{\pi}\left|\iint_{E_i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right|\leqslant\frac{1}{2}M(l,p)L_{p,2}(f)\|\omega\|_L^{\frac{p-2}{2p}},$$

式中 $M(l,p)=\dfrac{2}{\pi^{\frac{1}{p}}}\left\{(16l)^{\frac{1}{q}}+\left(\dfrac{2}{2-q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad i=1,2.$$

引理2[10-11] 设 $A(z)$,$B(z)\in L_{p,2}(C)(p>2)$,$\Phi(z)$ 在 D 内解析且连续到边界,则非线性积分方程(1)与(2)分别有唯一解 $W(z)\in A_{p,2}(A,B,G)$ 与 $W_\omega(z)\in A_{p,2}(A,B,G_\omega)$,且 $W(z)$ 与 $W_\omega(z)$ 分别由如下两式给出:

$$W(z)=\Phi(z)+\iint_G \Gamma_1(z,\zeta,G)\Phi(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\iint_G \Gamma_2(z,\zeta,G)\overline{\Phi(\zeta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\quad z\in G;\tag{3}$$

及

$$W_\omega(z)=\Phi(z)+\iint_{G_\omega} \Gamma_{1\omega}(z,\zeta,G_\omega)\Phi(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\iint_{G_\omega} \Gamma_{2\omega}(z,\zeta,G_\omega)\overline{\Phi(\zeta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\quad z\in G_\omega.\tag{4}$$

其中 $\Gamma_1(z,\zeta,G)$,$\Gamma_2(z,\zeta,G)$ 为积分方程(1)的预解核[10-11],$\Gamma_{1\omega}(z,\zeta,G_\omega)$,$\Gamma_{2\omega}(z,\zeta,G_\omega)$ 为积分方程(2)的预解核[10-11],且

$$\Gamma_1(z,\zeta,G)=\frac{1}{\pi}[A(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,G)+\overline{B(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,G)],$$
$$\Gamma_2(z,\zeta,G)=\frac{1}{\pi}[B(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,G)+\overline{A(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,G)],$$
$$\Gamma_{1\omega}(z,\zeta,G_\omega)=\frac{1}{\pi}[A(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,G_\omega)+\overline{B(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,G_\omega)],$$
$$\Gamma_{2\omega}(z,\zeta,G_\omega)=\frac{1}{\pi}[B(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,G_\omega)+\overline{A(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,G_\omega)].$$

这里 Ω_1,Ω_2 为广义解析函数类 $A^*_{p,2}(A,B,G)$ 的基本核,即

$$\Omega_1(z,\zeta)=\frac{\mathrm{e}^{\omega_1(z,\zeta)}+\mathrm{e}^{\omega_2(z,\zeta)}}{2(\zeta-z)},$$
$$\Omega_2(z,\zeta)=\frac{\mathrm{e}^{\omega_1(z,\zeta)}-\mathrm{e}^{\omega_2(z,\zeta)}}{2(\zeta-z)}.\tag{5}$$

$$\omega_i(z,\zeta)=\frac{z-\zeta}{\pi}\iint_C\frac{A(t)X_i(t,\zeta)+B(t)\overline{X_i(t,\zeta)}}{t(t-z)(t-\zeta)X_i(t,\zeta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$
$$X_i(z,\zeta)=\Phi_i(z)\mathrm{e}^{\omega_i(z,\zeta)},\quad i=1,2,$$
$$\Phi_1(z)=1\big/2(\zeta-z),\quad \Phi_2(z)=1\big/2i(\zeta-z),$$
$$|\omega_i(z,\zeta)|\leqslant M'_p.$$

其中 $M'_p=M_pL_{p,2}(|A|+|B|)$,M_p 为常数. (6)

令

$$g(z,\zeta)=\mathrm{e}^{\omega_1(z,\zeta)}+\mathrm{e}^{\omega_2(z,\zeta)},h(z,\zeta)=\mathrm{e}^{\omega_1(z,\zeta)}-\mathrm{e}^{\omega_2(z,\zeta)},$$

则有

$$|g(z,\zeta)|\leqslant 2\mathrm{e}^{M'_p},\ |h(z,\zeta)|\leqslant 2\mathrm{e}^{M'_p}.\tag{7}$$

特别若在有界区域 G 外 $A=B=0$,则记由式(5)给出的 $\Omega_i(z,\zeta)$ 为 $\Omega_i(z,\zeta,G)$,$i=1,2$.

定理1 设 $W(z)$,$W_\omega(z)$ 分别是积分中方程(1)、(2)的解,则当 $\omega\in B_1(\rho_0)$,ρ_0 充分小时,有

$$\|W_\omega(z)-W(z)\|_{\overline{\Omega^+}}\leqslant$$
$$M(p,l)(1+2M'_p\mathrm{e}^{M'_p})^2L_{p,2}(|A|+|B|)\|\Phi\|_{\bar{D}}\|\omega\|_L^{\frac{p-2}{2p}}.$$

其中 $M(l,p) = \frac{4}{\pi^{\frac{1}{p}}}\left\{(16l)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2}{2-q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$.

证明 设 $\forall z \in \Omega^+, H(z) = W_\omega(z) - W(z)$, 由方程(1)与方程(2)有

$$H(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega^+}\frac{A(\zeta)H(z) + B(\zeta)\overline{H(z)}}{\zeta - z}d\xi d\eta =$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{A(\zeta)W_\omega(\zeta) + B(\zeta)\overline{W_\omega(\zeta)}}{\zeta - z}d\xi d\eta -$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{E_2}\frac{A(\zeta)W(\zeta) + B(\zeta)\overline{W(\zeta)}}{\zeta - z}d\xi d\eta. \quad (8)$$

令

$$g(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{A(\zeta)W_\omega(\zeta) + B(\zeta)\overline{W_\omega(\zeta)}}{\zeta - z}d\xi d\eta -$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{E_2}\frac{A(\zeta)W(\zeta) + B(\zeta)\overline{W(\zeta)}}{\zeta - z}d\xi d\eta,$$

因为

$A(z), B(z) \in L_{p,2}(C), W(z) \in C(\overline{G}), W_\omega(z) \in C(\overline{G}_\omega)$,

所以

$$A(z)W(z), B(z)\overline{W(z)} \in L_p(G),$$

$$A(z)W_\omega(z), B(z)\overline{W_\omega(z)} \in L_p(G_\omega).$$

所以由引理 1 知

$|g| \leqslant$

$$M(p,l)L_{p,2}(|A|+|B|)(\|W\|_{\overline{G}}+\|W\|_{\overline{G}_\omega})\|\omega\|_L^{\frac{p-2}{2p}}. \quad (9)$$

则由引理 2,关于 $W_\omega(z) - W(z)$ 的方程(8)的预解式为

$$H(z) = g(z) + \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega^+}[A(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,\Omega^+) +$$

$$\overline{B(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,\Omega^+)]g(\zeta)d\xi d\eta +$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega^+}[B(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,\Omega^+) + \overline{A(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,\Omega^+)]\overline{g(\zeta)}d\xi d\eta =$$

$$g(z) + \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega^+}\frac{A(\zeta)g(z,\zeta) + \overline{B(\zeta)}h(z,\zeta)}{2(\zeta - z)}g(\zeta)d\xi d\eta +$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega^+}\frac{B(\zeta)g(z,\zeta) + \overline{A(\zeta)}h(z,\zeta)}{2(\zeta - z)}\overline{g(\zeta)}d\xi d\eta. \quad (10)$$

由对 g 的估计及式(6)和(7)知

$|H(z)| \leqslant$

$$M(p,l)[1 + 2M'_p e^{M'_p}]L_{p,2}(|A| + |B|)(\|W\|_{\overline{G}} + \|W_\omega\|_{\overline{G}_\omega})\|\omega\|_L^{\frac{p-2}{2p}}.$$

由引理 2 中式(3)—(7)知

$$\|W\|_{\overline{G}} \leqslant \|\Phi\|_{\overline{D}}(1 + 2M'_p e^{M'_p}),$$

$$\|W_\omega\|_{\overline{G}_\omega} \leqslant \|\Phi\|_{\overline{D}}(1 + 2M'_p e^{M'_p}).$$

所以

$|W_\omega(z) - W(z)| \leqslant$

$$M(p,l)(1 + 2M'_p e^{M'_p})^2 L_{p,2}(|A| + |B|)\|\Phi\|_{\overline{D}}\|\omega\|_L^{\frac{p-2}{2p}},$$

由 $z \in \Omega^+$ 的任意性知定理成立.

推论 1 设 $A(z), B(z) \in L_{p,2}(C)(p > 2)$, $\Phi(z)$ 在 D 内解析且连续到边界,则广义解析函数 $W(z)$ 关于区域边界摄动是稳定的.

证明 由定理 1 及定义 1,易知.

参考文献
References

[1] Keldysh M V. On the solvability and stability of the Dirichlet problem [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1938, 18: 315-318 (In Russian)

[2] Keldysh MV. On the stability of the Dirichlet problem [J]. Uspekshi Mat Nauk, 1941, 8: 171-231 (In Russian)

[3] Hedberg L I. Approximation by harmonic functions and stability of the Dirichlet problem [J]. Exposition Math, 1993, 11: 193-259

[4] 王小林,龚亚方. 一类奇异积分和 Cauchy 型积分关于积分曲线的稳定性[J]. 数学学报, 1999, 42(2): 343-350
WANG Xiaolin, GONG Yafang. On stability of a class of singular integral and Cauchy type integral with respect to path of integration[J]. Acta Mathematic Sinica, 1999, 42(2): 343-350

[5] 王小林,龚亚方. Cauchy 核奇异积分方程关于积分曲线的稳定性[J]. 数学年刊, 2001, 22A(4): 447-452
WANG Xiaolin, GONG Yafang. On stability of Cauchy kernel singular integral equation with Respect to Path of Integration[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2001, 22A(4): 447-452

[6] 章红梅,王传荣. Riemann 边值问题关于边界曲线的稳定性[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2001, 29(1): 1-4
ZHANG Hongmei, WANG Chuanrong. On stability of Riemann boundary value problem with respect to path of boundary[J]. Journal of Fuzhou University: Natural Sciences Edition, 2001, 29(1): 1-4

[7] 章红梅. 周期 Riemann 边值问题的解关于边界曲线摄动的稳定性[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2002, 30(2): 162-166
ZHANG Hongmei. On stability of the solution of periodic Riemann boundary value problem with respect to path of boundary[J]. Journal of Fuzhou University: Natural Sciences Edition, 2002, 30(2): 162-166

[8] Wang C R, Zhang H M, Zhu Y C. The Riemann boundary value problem with respect to the perturbation of boundary curve[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2006, 51(8/9/10/11): 631-845

[9] Zhang H M,Wang C R,Zhu Y C. Stability of solutions to Hilbert boundary value problem under perturbation of the boundary curve[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2003,284(2):601-617

[10] 依.涅.维库阿.广义解析函数[M].北京:人民教育出版社,1960:1-160
Векуа,ИН. Generalized analytic functions[M]. Beijing: People's Education Press,1960:1-160

[11] 李明忠,侯宗义,徐振远.椭圆型方程组理论和边值问题[M].上海:复旦大学出版社,1990:1-223
LI Mingzhong,HOU Zongyi,XU Zhenyuan. Theories and boundary problems of Elliptic equations[M]. Shanghai: Fudan University Press,1990:1-223

[12] 刘红爱,尚林,王传荣.广义 Cauchy 型积分的稳定性[J].宁夏大学学报:自然科学版,2008,29(2):116-119
LIU Hongai,SHANG Lin,WANG Chuanrong. The stability of generalized Cauchy type integral[J]. Journal of Ningxia University: Natural Sciences Edition,2008,29(2):116-119

[13] 刘红爱,尚林,王传荣.三类奇异积分关于积分区域边界摄动的稳定性[J].河南大学学报:自然科学版,2009,39(1):1-5
LIU Hongai,SHANG Lin,WANG Chuanrong. The stability of singular integral when the boundary curve of domain of integration perturbs[J]. Journal of Henan University: Natural Sciences Edition,2009,39(1):1-5

The stability of generalized analytic function when the boundary curve of domain of integration perturbs

LIU Hongai[1] SHANG Lin[2] WANG Chuanrong[3] SHU Zhibiao[3]

1 Binjiang College,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

2 College of Mathematics & Physics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

3 College of Mathematics and Computer Science,Fuzhou University,Fuzhou 350002

Abstract We discuss the stability of generalized analytic function when the boundary curve of domain of integration perturbs. The problem of stability is converted into the uniform convergence of the Fredholm singular integral equation,and then resolved by using the properties of the resolvent kernel of Freholm integral equation.

Key words generalized analytic function;Fredholm integral equation;perturbation;stability