文章编号: 1674-7070(2011)03-0285-04

α-对称环

李丽霞[1]　任艳丽[1,2]

摘要

设 α 是环 R 的自同态,推广对称环的概念,引入 α-对称环,给出 α-对称环的一些性质.

关键词

α-对称环;α-刚性环;α-Armendariz 环

中图分类号 TH71;TG803

文献标志码 A

0 引言

本文中所有的环都是指有单位元的结合环. 在文献[1]中引入了对称环的概念,称环 R 是对称环,对任意的 $a,b,c\in R$,如果 $abc=0$,则 $acb=0$. 文献[2]关于对称环做了系统的研究,给出了大量的对称环的例子和一些很好的结论. 文献[3]指出在有 1 的环中对称环与 ZC_3 等价. 进而与环 $ZC_n(n\geqslant 3)$ 等价. 文献[4]引入了弱对称环的概念,称环 R 是弱对称环,对任意的 $a,b,c\in R$,如果 $abc=0$,则 $bac\in \mathrm{nil}(R)$,其中 $\mathrm{nil}(R)$ 是 R 的幂零元集,同时说明了对称环是弱对称环,弱对称环不一定是对称环. 对 $\forall\alpha\in \mathrm{End}(R)$,文献[5]引入了弱 α-对称环,称环 R 是弱 α-对称环,对任意的 $a,b,c\in R$,如果 $abc\in\mathrm{nil}(R)$,则 $ac\alpha(b)\in \mathrm{nil}(R)$. 庞羽[5]在文献[6]的基础上加强条件引入了新的弱 α-对称环的概念,即对任意的 $a,b,c\in R$,如果 $abc=0$,则 $b\alpha(a)c\in\mathrm{nil}(R)$. 本文进一步加强条件定义 α-对称环,如果对任意的 $a,b,c\in R$,满足 $abc=0$,则有 $ac\alpha(b)=0$,并使用通常的环论方法研究其性质.

1 主要结果

定义 1　设 α 是环 R 的一个自同态. 如果对任意的 $a,b,c\in R$,满足 $abc=0$,则有 $ac\alpha(b)=0$,称环 R 是 α-对称环.

显然 R 是对称环等价于 R 是 I_R-对称环,但一般的,对任意的 $\forall\alpha\in \mathrm{End}(R)$ 且 $\alpha\neq I_R$,若 R 是对称环,R 未必是 α-对称环.

例 1　设 $R=Z_2\oplus Z_2$. 显然 R 是一个交换的约化环.

再设

$$\alpha: R\to R,\alpha((a,b))=(b,a),$$

由文献[6]知 R 是约化环,从而为对称环,然而 R 不是 α-对称环. 事实上,$(1,1)(0,1)(1,0)=0$,但

$$(1,1)(1,0)\alpha((0,1))=(1,1)(1,0)(1,0)\neq 0.$$

设 $\alpha\in \mathrm{End}(R)$,一个环 R 称为 α-Armendariz 环,若对任意的

$$p=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i,q=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x;\alpha],$$

满足 $pq=0$,则有 $a_ib_j=0(\forall i,j\in N)$.

命题 1　R 为 α-Armendariz 环且为 α-对称环,则 R 为对称环.

证明　对任意的 $a,b,r\in R$,满足 $abr=0$,因为 R 为 α-对称环,则 $ar\alpha(b)=0$. 令 $p=arx,q=b\in R[x;\alpha]$,有 $pq=arxb=ar\alpha(b)x$. 因为

收稿日期 2011-01-18

资助项目 江苏省"青蓝工程"中青年学术带头人基金

作者简介

李丽霞,女,硕士生,主要研究方向为一般环论. ehnyjs@163.com

任艳丽(通信作者),女,教授,主要研究方向为环论. renyanli@163.com

1 辽宁师范大学 数学学院,辽宁,116029

2 南京晓庄学院 数学与信息技术学院,南京,210017

$ar\alpha(b)=0$,所以 $pq=0$. 再由 R 为 α-Armendariz 环知 $arb=0$,故 R 是对称环.

命题 2 α-对称环的子环是 α-对称环.

设 $\alpha_i: R_i \to R_i (i \in I)$,若定义 $\bar{\alpha}: \prod_{i\in I} R_i \to \prod_{i\in I} R_i \bar{\alpha}((a_i)) = (\alpha_i(a_i))$. 则有

命题 3 $\prod_{i\in I} R_i$ 是 $\bar{\alpha}$-对称环当且仅当对任意的 $i \in I$,R_i 是 α_i-对称环.

命题 4 对任意的环 R,下列命题等价:

1) R 是 α-对称环;

2) eR 和 $(1-e)R$ 是 α-对称环,其中 e 是 R 的中心幂等元且 $\alpha(e)=e$.

证明 1) $\Rightarrow$ 2).

因为 eR 和 $(1-e)R$ 是 R 的子环,由命题 2 即得结论.

2) $\Rightarrow$ 1).

对任意的 $a,b,c \in R$ 且满足 $abc=0$,有 $e^3abc=0$. 由 e 的可换性知 $eaebec=0$. 又因为 eR 是 α-对称环,则有 $eaec\alpha(eb)=0$,从而 $eac\alpha(b)=0$. 类似的可证 $(1-e)ac\alpha(b)=0$,这样就有 $ac\alpha(b)=0$.

文献[7]给出了 α-刚性环的定义. 设 α 是环 R 的一个自同态,称 α 是环 R 的一个刚性自同态,如果对任意的 $r\in R$,由 $r\alpha(r)=0$ 就有 $r=0$. 称 R 是 α-刚性环,如果 R 存在一个刚性自同态 α. 由文献[7]知 α-刚性环是约化环,但是约化环不一定为 α-刚性环.

命题 5 R 是 α-刚性环 $\Leftrightarrow R$ 为约化的 α-对称环且 α 为 R 上的单同态.

证明 "$\Leftarrow$". 对任意的 $r\in R$ 且 $r\alpha(r)=0$,有 $rr\alpha(r)=0$,由 R 为 α-对称环可得 $r\alpha(r)\alpha(r)=0$,又因为 R 为约化环,所以为对称环,即 $\alpha(r)r\alpha(r)=0$. 因为 R 为 α-对称环,则有 $\alpha(r)\alpha(r)\alpha(r)=0$,即 $(\alpha(r))^3=0$. 再由 R 为约化环可得 $\alpha(r)=0$. 这样由 α 为 R 上的单同态可得 $r=0$,所以 R 是 α-刚性环.

"$\Rightarrow$". 设 R 是 α-刚性环,则 R 为约化环且 α 为 R 上的单同态. 对任意的 $a,b,c\in R$ 且满足 $abc=0$,因为 R 为约化环,所以为对称环,则有 $bac=0$,进而 $ac\alpha(b)\alpha(ac\alpha(b))=0$,再由 α-刚性环的定义可得 $ac\alpha(b)=0$. 综上知 R 为 α-对称环.

设 α 是环 R 的一个自同态,$R_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix} \middle| a, b\in R\right\}$,定义

$$\bar{\alpha}: R_2\to R_2, \bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ 0 & \alpha(a)\end{pmatrix}.$$

命题 6 设 R 是 α-刚性环,则 $R_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix} \middle| a, b\in R\right\}$ 为 $\bar{\alpha}$-对称环.

证明 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & a_3\end{pmatrix}\in R_2$ 且满足

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & a_3\end{pmatrix}=0,$$

即

$$\begin{pmatrix} a_1a_2a_3 & a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3 \\ 0 & a_1a_2a_3\end{pmatrix}=0,$$

则有

$$a_1a_2a_3=0, \tag{1}$$

$$a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3=0. \tag{2}$$

式(2)两边从左侧分别乘以 a_3,有

$$a_3a_1a_2b_3+a_3a_1b_2a_3+a_3b_1a_2a_3=0,$$

即

$$a_3a_1b_2a_3+a_3b_1a_2a_3=0,$$

在上式两边从右侧分别乘以 a_1 有 $a_3a_1b_2a_3a_1=0$,于是有 $b_2a_3a_1b_2a_3a_1=(b_2a_3a_1)^2=0$. 因为 R 是 α-刚性环,进而为约化环,因而 $b_2a_3a_1=0$. 再由 R 为约化环进而为对称环可得 $a_1b_2a_3=0$,

用同样的办法可以得到 $a_1a_2b_3=0$,$b_1a_2a_3=0$. 于是由 $a_1a_2a_3=0$ 可得 $a_1a_3\alpha(a_2)\alpha(a_1a_3\alpha(a_2))=a_1a_3\alpha(a_2a_1a_3)\alpha^2(a_2)=0$,再由 R 是 α-刚性环得 $a_1a_3\alpha(a_2)=0$.

同理由 $a_1a_2b_3=a_1b_2a_3=b_1a_2a_3=0$ 可得

$$a_1b_3\alpha(a_2)=a_1a_3\alpha(b_2)=b_1a_3\alpha(a_2)=0,$$

这样就有

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & a_3\end{pmatrix}\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)=$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(a_2) & \alpha(b_2) \\ 0 & \alpha(a_2)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_1a_3\alpha(a_2) & a_1b_3\alpha(a_2)+a_1a_3\alpha(b_2)+b_1a_3\alpha(a_2) \\ 0 & a_1a_3\alpha(a_2)\end{pmatrix}=0.$$

给定一个环 R 和双模 ${}_RM_R$,R 通过 M 的平凡扩张是环 $T(R,M)=R\oplus M$,其运算是通常的加法和以下定义的乘法:

$$(r_1,m_1)(r_2,m_2)=(r_1r_2, r_1m_2+m_1r_2).$$

$T(R,M)$ 与所有形如 $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r\end{pmatrix}$ 的矩阵构成的环同构,这里 $r\in R$,$m\in M$,运算按通常矩阵运算. 令 α 是

环 R 的自同态,$T(R,R)$ 是平凡扩张,可将 α 扩张成为 $T(R,R)$ 上的自同态.

$\bar{\alpha}$: $T(R,R)\to T(R,R)$,$\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\alpha(r) & \alpha(m)\\ 0 & \alpha(r)\end{pmatrix}$.

命题7 设 R 是 α-刚性环,则 $T(R,R)$ 是 $\bar{\alpha}$-对称环$\Leftrightarrow R$ 是 α-对称环.

由此可以猜测:若 R 是 α-刚性环,则全矩阵环

$$M_2(R)=\begin{pmatrix} R & R\\ 0 & R\end{pmatrix}$$

也为 $\bar{\alpha}$-对称环,但下面的例子否定了这个猜测.

例2 设 R 是 α-刚性环,$0\neq e^2=e\in R$,且 $\alpha(e)=e$. 于是有

$$\begin{pmatrix} e & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0,$$

但是

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ 0 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 & b_3\\ 0 & a_3\end{pmatrix}\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)=$$
$$\begin{pmatrix} e & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e\\ 0 & 0\end{pmatrix}\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}\right)=$$
$$\begin{pmatrix} e & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & \alpha(e)\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} 0 & e\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & e\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0$$

故 $M_2(R)=\begin{pmatrix} R & R\\ 0 & R\end{pmatrix}$不是 $\bar{\alpha}$-对称环.

下面的例子进一步说明,若 R 是 α-刚性环,则

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & a & d\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in R\right\}$$

未必是 $\bar{\alpha}$-对称环.

例3 在例2中特别地取 $e=1$,则有

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0,$$

但是

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)\neq 0,$$

故 S 不是 $\bar{\alpha}$-对称环.

设 R 是交换环,M 是 R-模,σ 是 R 的单同态,则 $R\oplus M=\{(r,m)\mid r\in R,m\in M\}$ 是一个环,其中$(r_1,m_1)+(r_2,m_2)=(r_1+r_2,m_1+m_2)$,$(r_1,m_1)(r_2,m_2)=(r_1r_2,\sigma(r_1)m_2+r_2m_1)$,称这种扩张为 R 通过 M 与 σ 做成的 Nagata 扩张. 由于 R 是自身上的双模,则可令 $\bar{\sigma}$: $R\oplus R\to R\oplus R$,其中 $\bar{\sigma}(r,m)=(\sigma(r),\sigma(m))$ $(r,m\in R)$.

命题8 设 R 是交换整环,σ 是 R 的单同态,则 R 通过 R 与 σ 做成的 Nagata 扩张为 $\bar{\sigma}$-对称环.

证明 对任意的(r_1,r'_1),(r_2,r'_2),$(r_3,r'_3)\in R\oplus R=N$,且$(r_1,r'_1)(r_2,r'_2)(r_3,r'_3)=(r_1r_2r_3,\sigma(r_1r_2)r'_3+r_3\sigma(r_1)r_2'+r_3r_2r_1')=(0,0)$,
即

$$r_1r_2r_3=0, \tag{3}$$
$$\sigma(r_1r_2)r'_3+r_3\sigma(r_1)r_2'+r_3r_2r_1'=0. \tag{4}$$

因为 R 为交换整环,所以在(1)中有 $r_1=0$ 或$r_2=0$ 或 $r_3=0$.

不妨设 $r_1=0$,代入式(4)即有 $r_3r_2r'_1=0$ 则 $r_2=0$ 或 $r_3=0$ 或 $r'_1=0$,无论哪种情况均有 $\sigma(r_2)r_3r'_1=0$.
所以

$$(r_1,r'_1)(r_3,r'_3)\bar{\sigma}((r_2,r'_2))=$$
$$(r_1,r'_1)(r_3,r'_3)(\sigma(r_2),\sigma(r_2'))=$$
$$(r_1r_3\sigma(r_2),\sigma(r_1r_3)\sigma(r_2')+\sigma(r_2)\sigma(r_1)r_3'+$$
$$\sigma(r_2)r_3r_1')=(0,0).$$

若 $r_2=0$,则代入式(4)有 $r_3\sigma(r_1)r'_2=0$,因为 R 是交换整环,所以 $r_3=0$ 或 $r_2'=0$ 或 $\sigma(r_1)=0$,又因为 σ 是 R 的单同态,所以实则为 $r_3=0$ 或 $r_2'=0$ 或 $r_1=0$,不论哪种情况均有

$$(r_1,r'_1)(r_3,r'_3)\bar{\sigma}((r_2,r'_2))=$$
$$(r_1,r'_1)(r_3,r'_3)(\sigma(r_2),\sigma(r_2'))=$$
$$(r_1r_3\sigma(r_2),\sigma(r_1r_3)\sigma(r_2')+\sigma(r_2)\sigma(r_1)r_3'+$$
$$\sigma(r_2)r_3r_1')=(0,0)$$

若 $r_3=0$ 情况类似,可得相同结果. 综上所述,命题得证.

由文献[8]知,整环是约化环,但约化环不一定是整环. 下面说明若 R 是交换的约化环,则 N 不一定是 $\bar{\sigma}$-对称环.

例4 令 D 是特征为0的整环,

$$R=D\oplus D,\quad (d_1,d_2)(d_3,d_4)=(d_1d_3,d_2d_4).$$

显然 R 是交换的约化环,但不是整环.

现在定义:σ: $R\to R$,$\sigma((s,t))=(t,s)$. 则易见 σ 是 R 的自同构. 显然,

$((0,1),(0,1))((1,0),(0,1))((1,1),(0,1))=0$,

但是

$((0,1),(0,1))((1,1),(0,1))\bar{\sigma}(((1,0),(0,1)))=$
$((0,1),(0,1))((1,1),(0,1))((0,1),(1,0))=$
$((0,1),(0,1))((0,1),(1,0))=$

$((0,1),(1,0)+(0,1))=$
$((1,0),(1,1))\neq 0.$
这说明 R Nagata 扩张不是 $\bar{\sigma}$-对称环.

令 α 是环 R 的自同态，定义 $\bar{\alpha}: R[x]\to R[x]$，$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{m} \alpha(a_i) x^i$，则 $\bar{\alpha}$ 是 $R[x]$ 的自同态，此映射仍记做 α. 对 R 的自同态 α，用相同的方法可定义 $R[x,x^{-1}]\to R[x,x^{-1}]$ 上的自同态.

命题 9 $R[x]$ 是 α-对称环当且仅当 $R[x,x^{-1}]$ 是 α-对称环.

证明 “$\Leftarrow$”. 由命题 2 可得.

“$\Rightarrow$”. 对任意的 $f(x), g(x), h(x)\in R[x;x^{-1}]$，且满足 $f(x)g(x)h(x)=0$，则存在正整数 m,p,q 使得

$$f_1(x)=f(x)x^m\in R[x],$$
$$g_1(x)=g(x)x^p\in R[x],$$
$$h_1(x)=h(x)x^q\in R[x],$$

所以 $f_1(x)g_1(x)h_1(x)=f(x)g(x)h(x)x^{m+p+q}=0$，进而 $f_1(x)g_1(x)h_1(x)=0$. 又因为 $R[x]$ 是 α-对称环，所以 $f_1(x)h_1(x)\alpha(g_1(x))=0$. 从而

$$f_1(x)h_1(x)\alpha(g_1(x))=0,$$
$$f(x)h(x)\alpha(g(x))=$$
$$f_1(x)h_1(x)\alpha(g_1(x))x^{-m-p-q}=0,$$

综上，命题得证.

命题 10 设有环及其同态的下列交换图表，若 σ 是单同态且 S 是 β-对称环，则 R 是 α-对称环.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha"'] & S \arrow[d, "\beta"] \\ R \arrow[r, "\sigma"] & S \end{tikzcd}$$

证明 对任意的 $a,b,c\in R$ 且满足 $abc=0$，则 $\sigma(abc)=0$，进而有 $\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)=0$. 因为 S 是 β-对称环，则有 $\sigma(a)\sigma(c)\beta(\sigma(b))=0$. 又因为图表可换所以 $\sigma(a)\sigma(c)\sigma(\alpha(b))=0$，进而 $\sigma(ac\alpha(b))=0$. 再由 σ 是单同态可得 $ac\alpha(b)=0$. 综上知 R 是 α-对称环.

参考文献
References

[1] Kim N K, Lee Y. Extensions of reversible rings [J]. Pure Appl Algebra, 2003, 185: 207-233

[2] Lambek J. On the representation of modules by sheaves of factor modules [J]. Canad Math Bull, 1971, 14: 359-368

[3] Hong C Y, Kim N K, Kwak T K. Extensions of generalized reduced rings [J]. Algebra Colloq, 2005, 12(2): 229-240

[4] 张春霞. 弱对称环 I: [J]. 西北师范大学学报: 自然版, 2006, 42(1): 24-26
ZHANG Chaunxia. Weak symmetric rings I: [J]. Northwest Normal University Journal: Natural Science Forum 2006, 42(1): 24-26.

[5] Ouyang L Q, Chen H Y. On weak symmetric rings [J]. Comm Algebra, 2010, 38(2): 697-713

[6] Anderson D D, Camillo V, Semigroup and rings whose zero products commute [J]. Comm Algebra, 1999: 27(6): 2847-2852

[5] 庞羽. 右可逆环和弱 α-对称环 [D]. 大连: 辽宁师范大学数学学院, 2010
Pang Yu. Right reversible ring and weak α-symmetric ring [D]. Dalian: Liaoning Normal University Mathematics, 2010

[7] Huh C, Kim N K, Lee Y. Basic examples and extensions of symmetric rings [J]. Pure Appl Algebra, 2005, 202: 154-167

[8] Krempa J. Some examples of reduced rings [J]. Algebra Colloq, 1996, 3(4): 289-300

α-symmetric rings

LI Lixia[1] REN Yanli[1,2]

1 College of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029

2 College of Mathematics and Information Technology, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 210017

Abstract For a ring endomorphism α, we generalize the concept of symmetric rings, introduce the notation of α-symmetric rings and investigate some properties of them.

Key words α-symmetric rings; α-rigid rings; α-Armendariz rings