文章编号: 1674-7070(2011)03-0280-05

具有分布时滞的高阶中立型双曲偏微分方程的振动准则

吕银平[1]　林诗仲[1]　丁朝刚[1]

摘要

考虑了一类具有分布时滞的高阶中立型双曲泛函偏微分方程. 利用 Green 公式、Jensen 不等式,通过特征值的方法,获得了方程解在两类边值条件下振动的新的准则,所得结果推广和改进了若干文献中已有准则.

关键词

中立型方程; 连续分布时滞; 振动准则

中图分类号 O175.27

文献标识码 A

收稿日期 2010-04-13

资助项目 国家自然科学数学天元基金项目(1026033)

作者简介

吕银平,男,硕士,助教,主要从事微分方程理论研究. lvyinping@foxmail.com

林诗仲(通信作者),男,教授,主要从事微分方程理论研究. szlin@hainnu.edu.cn

1 海南师范大学 数学与统计学院,海口,571158

0 引言

具有连续分布滞量的泛函偏微分方程的振动理论是泛函偏微分方程振动理论的进一步发展,它能更精确地揭示实物的本质,并极大地丰富了泛函偏微分方程理论. 到目前为止,具有连续分布滞量的泛函偏微分方程振动理论已有不少成果[1-7],但对于具有连续分布时滞的泛函偏微分方程的边值问题的振动性的讨论,现有的文献大多使用对空间变量 x 在有界区域 Ω 内直接积分的方法,对调和项 Δu 加上某些限制性条件,再利用 Green 公式在处理不等式的时候将其舍去,这样的处理方法较粗糙,不能得出由调和项 Δu 的系数发生扰动而使解产生振动的条件.

本文采用特征值的方法,与其他文献[1-6]不同的是在处理不等式的时候,保留了调和项,从而得出了由调和项的扰动而使方程解产生振动的充分条件.

研究如下形式的高阶(其中 $n\geqslant 2$ 为偶数)中立型双曲偏微分方程(E):

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Big[u(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)u(x,\sigma_i(t))\Big]=$$

$$a(t)\Delta u(x,t)+\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\Delta u(x,\tau_j(t))-p(x,t)u(x,t)-$$

$$\int_a^b q(x,t,\xi)f(u(x,g(t,\xi)))\,\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

在 2 种不同边值条件下

$$(\mathrm{B1})\quad \frac{\partial\mu}{\partial\nu}+\psi(x,t)\mu=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+,$$

$$(\mathrm{B2})\quad u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$$

解的振动性. 其中 Δ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的 Laplace 算子,Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的具有连续分片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域. ν 是边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量,$\mathbf{R}_+=[0,+\infty)$. 方程(E)中的积分是 Stieltjes 积分. $\psi(x,t)\in C(\partial\Omega\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$.

假设下列条件(H)成立:

(H1) $a(t),b_j(t),\sigma_i(t),\tau_j(t)\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$; $\sigma_i(t)\leqslant t,\tau_j(t)\leqslant t$

和 $\sigma_i(t)$,$\tau_j(t)$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上的单调不减函数;$\lim_{t\to\infty}\sigma_i(t)=\lim_{t\to\infty}\tau_j(t)=+\infty$,$i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,m$.

(H2) $p(x,t)\in C(\bar{\Omega}\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,$q(x,t,\xi)\in C(\bar{\Omega}\times\mathbf{R}_+\times[a,b],\mathbf{R}_+)$;如果存在一个正数 c,使得 $f(u)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上的正的凸函数,且满足 $f(-u)=-f(u)$;$\frac{f(u)}{u}\geqslant c>0$,$u\neq 0$,$p(t)=\min_{x\in\Omega}\{p(x,t)\}$,$Q(t,\xi)=\min_{x\in\Omega}\{q(x,t,\xi)\}$.

(H3) $\sigma(\xi)\in C([a,b],\mathbf{R})$ 且单调不减,$g(t,\xi)\in C(\mathbf{R}_+\times[a,b],\mathbf{R})$,$g(t,\xi)\leqslant t$,$\xi\in[a,b]$,$g(t,\xi)$ 分别对 t 和 ξ 而言单调不减,且满足 $\lim_{t\to+\infty}\min_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=+\infty$.

(H4) $\lambda_i(t)\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,$i=1,2,\cdots,n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\leqslant 1$,且存在一个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,使得 $\lim_{t\to\infty}\lambda_k(t)=\lambda_0>0$.

引理1[1] 设 λ_1 是 Robin 边值问题

$$\begin{cases}\Delta\varphi+\lambda\varphi=0, & x\in\Omega,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\psi(x,t)\varphi=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的第1特征值,$\varphi_1(x)$ 是 λ_1 所对应的特征函数,则 $\lambda_1>0$,且 $\varphi_1(x)>0$,$x\in\Omega$.

引理2[1] 设 λ_2 是 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}\Delta\varphi+\lambda\varphi=0, & x\in\Omega,\\ \varphi=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的第1特征值,$\varphi_2(x)$ 是 λ_2 所对应的特征函数,则 $\lambda_2>0$,且 $\varphi_2(x)>0$,$x\in\Omega$.

引理3[7] 假设 $G(t)$,$G_i(t)\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R}_+)$,$g_i(t)\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R})$ 且单调不减,满足 $g_i(t)\leqslant t$,$\lim_{t\to\infty}g_i(t)=+\infty$,$i=1,2,\cdots,m$,若存在某一个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$,满足

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{g_i(t)}^{t}\left[G_i(s)\exp\int_{g_i(s)}^{s}G(r)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s>\frac{1}{e},$$

那么如下的微分不等式

$$y'(t)+G(t)y(t)+\sum_{i=1}^{m}G_i(t)y(g_i(t))\leqslant 0,\ t\geqslant t_0$$

没有最终正解.

引理4[8] 设一个函数 $v(t)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上 n 次连续可微,若 $v(t)>0$,$v^{(n)}(t)\leqslant 0$,n 为偶数,则存在 $t_1\geqslant t_0$,对任意的 $\theta\in(0,1)$,有

$$v(t)\geqslant\theta t^{n-2}v^{(n-1)}(t),\quad t\geqslant t_1.$$

定义1 设 $u(x,t)$ 是边值问题(E)(B1)或(E)(B2)的一个非零解,若存在正数 $t_0>0$,当 $(x,t)\in\Omega\times[t_0,\infty)$ 时,使得 $u(x,t)$ 不变号,则称 $u(x,t)$ 在区域 $G\equiv\Omega\times\mathbf{R}_+$ 上是非振动的,否则就称为是振动的.

定义2 设 $u(x,t)$ 是边值问题(E)(B1)或(E)(B2)的一个非零解,若存在正数 $t_0>0$,当 $(x,t)\in\Omega\times[t_0,\infty)$ 时,使得 $u(x,t)>0$(或 $u(x,t)<0$),则称 $u(x,t)$ 是方程(E)的最终正解(或最终负解).

1 主要结果

1.1 *Robin* 边值问题的振动性

首先考虑(E)(B1)的解的振动性.

定理1 假设(H)成立,且存在 $t_1>0$,当 $t>t_1$ 时,使得微分不等式

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[z(t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)z(\sigma_i(t))\right]+(\lambda_1 a(t)+p(t))z(t)+\lambda_1\sum_{j=1}^{m}b_j(t)z(\tau_i(t))+\int_a^b Q(t,\xi)f[z(g(t,\xi))]\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0 \tag{1}$$

没有最终正解,那么 Robin 边值(E)(B1)的所有非零解在 G 上是振动的.

证明 使用反证法,假设边值问题(E)(B1)存在一个非振动解.不失一般性,设 $u(x,t)$ 是 Robin 边值问题(E)(B1)在 $\Omega\times[t_0,+\infty)$ 上的一个最终正解(最终负解可类似证明),$t_0\geqslant 0$,由 $u(x,t)$ 的最终正性可知,存在一个 $t_1\geqslant t_0$,使得

$$\sigma_i(t)\geqslant t_0,\quad \tau_j(t)\geqslant t_0,\quad t\geqslant t_1,$$
$$i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m$$

且 $g(t,\xi)\geqslant t_0$,$(t,\xi)\in[t_1,+\infty)\times[a,b]$,那么

$u(x,\sigma_i(t))>0$,$u(x,\tau_i(t))>0$,

$(x,t)\in\Omega\times[t_1,+\infty)$,$i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,m$

$u(x,g(t,\xi))>0$,$(x,t,\xi)\in\Omega\times[t_1,+\infty)\times[a,b]$.

对方程(E)的两边乘以 Robin 边值问题(B1)的特征函数 $\varphi_1(x)$,然后在方程两边对 x 在 Ω 上积分,得

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\int_\Omega u(x,t)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\int_\Omega u(x,\sigma_i(t))\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x\right]=$$
$$a(t)\int_\Omega\varphi_1(x)\Delta u(x,t)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\int_\Omega\varphi_1(x)\Delta u(x,\tau_j(t))\,\mathrm{d}x-\int_\Omega p(x,t)u(x,t)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x-$$

$$\int_\Omega \int_a^b \varphi_1(x)\, q(x,t,\xi) f[u(x,g(t,\xi))]\, d\sigma(\xi)\, dx. \quad (2)$$

由 Green 公式及边界条件(B1)，有

$$\int_\Omega \varphi_1(x)\, \Delta u(x,t)\, dx =$$
$$\int_{\partial\Omega}\left(\varphi_1(s)\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial \varphi_1(s)}{\partial \nu}\right) ds + \int_\Omega u(x,t)\,\Delta\varphi_1(x)\, dx =$$
$$\int_{\partial\Omega}(-\varphi_1(s)\, u\psi(x,t) + u\psi(x,t)\,\varphi_1(s))\, ds -$$
$$\lambda_1 \int_\Omega u(x,t)\,\varphi_1(x)\, dx =$$
$$-\lambda_1 \int_\Omega u(x,t)\,\varphi_1(x)\, dx, \quad t \geqslant t_1. \quad (3)$$

$$\int_\Omega \varphi_1(x)\, \Delta u(x,\tau_j(t))\, dx =$$
$$-\lambda_1 \int_\Omega u(x,\tau_j(t))\,\varphi_1(x)\, dx, \quad t \geqslant t_1. \quad (4)$$

那么由式(3)和(4)，及 Jensen 不等式，有

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\int_\Omega u(x,t)\,\varphi_1(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\int_\Omega u\left(x,\sigma_i(t)\,\varphi_1(x)\, dx\right]\right. \leqslant$$
$$-\lambda_1 a(t)\int_\Omega \varphi_1(x)\, u(x,t)\, dx -$$
$$\lambda_1 \sum_{j=1}^m b_j(t)\int_\Omega \varphi_1(x)\, u(x,\tau_j(t))\, dx -$$
$$\int_\Omega p(x,t)\, u(x,t)\,\varphi_1(x)\, dx -$$
$$\int_a^b Q(t,\xi) f\left[\left(\int_\Omega \varphi_1(x)\, dx\right)^{-1}\int_\Omega u(x,g(t,\xi))\,\varphi_1(x)\, dx\right] \cdot$$
$$d\sigma(\xi)\cdot\int_\Omega \varphi_1(x)\, dx, \quad t > t_1. \quad (5)$$

令 $z(t) = \left(\int_\Omega \varphi_1(x)\, dx\right)^{-1}\int_\Omega u(x,t)\,\varphi_1(x)\, dx$ 及不等式(5)，有

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[z(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\, z(\sigma_i(t))\right] +$$
$$[\lambda_1 a(t) + p(t)]\, z(t) + \lambda_1 \sum_{j=1}^n b_j(t)\, z(\tau_j(t)) +$$
$$\int_a^b Q(t,\xi) f[z(g(t,\xi))]\, d\sigma(\xi) \leqslant 0. \quad (6)$$

显然 $z(t)$ 是问题(6)的一个最终正解，这与本文定理的条件矛盾，因此 Robin 边值问题(E)(B1)不存在非振动的正解，即系统的所有非零解都在区域 G 上振动.

定理 2 假设(H)成立，如果 $g_0(t) = g(t,\xi)$，$\xi \in [a,b]$ 且下面不等式成立

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{g_0(t)}^t \left[c\theta Q(s)\, g_0^{n-2}(s)\, J(g_0(s))\cdot \exp\int_{g_0(s)}^s \theta r^{n-2} p(r)\, J(r)\, dr\right] ds > \frac{1}{e}. \quad (7)$$

则 Robin 边值问题(E)(B1)的所有解在 $G \equiv \Omega \times R^+$ 上振动.

证明 反设 Robin 边值问题(E)(B1)存在一个非振动解. 不失一般性，设 $u(x,t)$ 是 Robin 边值问题(E)(B1)在 $\Omega\times[t_0,+\infty)$ 上的一个最终正解(最终负解可类似证明)，$t_0 \geqslant 0$，由 $u(x,t)$ 的最终正性可知，存在一个 $t_1 \geqslant t_0$，使得 $\sigma_i(t) \geqslant t_0$，$\tau_j(t) \geqslant t_0$，$t \geqslant t_1$，$i = 1,2,\cdots,n$；$j = 1,2,\cdots,m$ 且 $g(t,\xi) \geqslant t_0$，$(t,\xi) \in [t_1,+\infty)\times[a,b]$，那么 $u(x,\sigma_i(t)) > 0$，$u(x,\tau_i(t)) > 0$，$u(x,g(t,\xi)) > 0$，对方程(E)在 Ω 上积分，再由 Green 公式和边界条件，得到

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\int_\Omega u(x,t)\, dx + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\int_\Omega u\left(x,\sigma_i(t)\, dx\right]\right. =$$
$$-a(t)\int_{\partial\Omega}\psi(x,t)\, u(x,t)\, dx - \int_\Omega p(x,t)\, u(x,t)\, dx -$$
$$\sum_{j=1}^m b_j(t)\int_{\partial\Omega}\psi(x,\tau_j(t))\, u(x,\tau_j(t))\, dx -$$
$$\int_\Omega\int_a^b q(x,t,\xi) f(u(x,g(t,\xi)))\, d\sigma(\xi)\, dx, t > t_1. \quad (8)$$

令 $z(t) = \int_\Omega u(x,t)\, dx$，得到

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}[z(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\, z(\sigma_i(t))] \leqslant$$
$$-\sum_{j=1}^m b_j(t)\int_{\partial\Omega}\psi(x,\tau_j(t))\, u(x,\tau_j(t))\, dx - p(t)\, z(t) -$$
$$c\int_\Omega\left(\int_a^b q(x,t,\xi)\, d\sigma(\xi)\right) u(x,g_0(t))\, dx, t > t_1. \quad (9)$$

进一步得到

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}[z(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\, z(\sigma_i(t))] \leqslant$$
$$-\sum_{j=1}^m b_j(t)\int_{\partial\Omega}\psi(x,\tau_j(t))\, u(x,\tau_j(t))\, dx - p(t)\, z(t) -$$
$$c\int_\Omega\left(\int_a^b Q(t,\xi)\, d\sigma(\xi)\right) u(x,g_0(t))\, dx, t > t_1.$$

在上式中，$Q(t) = \int_a^b Q(t,\xi)\, d\sigma(\xi)$，得到

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}[z(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\, z(\sigma_i(t))] \leqslant$$
$$-p(t)\, z(t) - cQ(t)\, z(g_0(t)).$$

令 $v(t) = z(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\, z(\sigma_i(t))$，有

$$v^{(n)}(t) + p(t)\, z(t) + cQ(t)\, z(g_0(t)) \leqslant 0, \ t > t_1. \quad (10)$$

当 $t > t_1$,由 $v(t) > 0$ 和 $v^{(n)}(t) < 0$ 可得,$v^{(n-1)}(t) \geqslant 0$. 证明如下:

假设 $v^{(n)}(t) < 0$,那么一定存在某一个 $T > t_1$,使得 $v^{(n-1)}(T) < 0$,所以当 $t > T$ 时,有 $v^{(n-1)}(t) < v^{(n-1)}(T)$. 对此式从 T 到 t 积分,得到

$$v^{(n-2)}(t) \leqslant v^{(n-2)}(T) + v^{(n-1)}(T)(t-T),$$

当 $t\to\infty$ 时,有 $v^{(n-2)}(t)\to-\infty$,因此 $z(t)$ 最终为负,此与 $z(t)>0$ 矛盾. 故假设 $v^{(n-1)}(t)<0$ 不成立,即得到 $v^{(n-1)}(t)\geqslant 0$.

由式(10)知,当 $t>t_1$ 时,有

$$v^{(n)}(t) + p(t)\left[v(t) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)z(\sigma_i(t))\right] + cQ(t)\left[v(g_0(t)) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_0(t))z(\sigma_i(g_0(t)))\right] \leqslant 0.$$

又由 $v'(t)\geqslant 0$ 有

$$v(t) \geqslant v(\sigma_i(t)) > z(\sigma_i(t)),\ v(g_0(t)) \geqslant v(\sigma_i(g_0(t))) > z(\sigma_i(g_0(t))),$$

那么,当 $t>t_1$ 时,得到

$$v^{(n)}(t) + p(t)\left[v(t) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)v(t)\right] + cQ(t)\left[v(g_0(t)) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_0(t))v(g_0(t))\right] \leqslant 0.$$

令 $J(t)=1-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\geqslant 0$,进一步有

$$v^{(n)}(t) + p(t)v(t)J(t) + cQ(t)v(g_0(t))J(g_0(t)) \leqslant 0. \tag{11}$$

因为 $v^{(n)}(t)<0$,$v^{(n-1)}(t)>0$ 和 $v(t)>0$,那么由引理4知,存在 $t_2>t_1$,对任意的 $\theta\in(0,1)$,使得 $v(t)\geqslant\theta t^{n-2}v^{(n-1)}(t)$,$t>t_2$.

设 $w(t)=v^{(n-1)}(t)$,当 $t\geqslant t_2$ 时,由式(11)得

$$w'(t) + \theta t^{n-2}p(t)J(t)w(t) + c\theta Q(t)g_0^{n-2}(t)J(g_0(t))w(t) \leqslant 0. \tag{12}$$

那么 $w(t)$ 是微分不等式(12)的一个最终正解. 另一方面,由引理3可得微分不等式(12)不可能有最终正解矛盾. 因此,Robin 边值问题(E)(B1)没有最终正解,即所有解都在 G 上振动.

1.2 *Dirichlet* 边值问题的振动性

下面考虑(E)($B2$)的解的振动性.

定理3 令 $h(t)=\lambda_2 a(t)+p(t)$,假设(H)成立,如果

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t-\eta}^{t}\left[\theta\lambda_2\tau_j^{n-2}(s)b_0(s)J(\tau_j(s))\cdot\exp\int_{s-\eta}^{s}\theta r^{n-2}h(r)J(r)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s > \frac{1}{e}$$

或

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{g_0(t)}^{t}\left[c\theta g_0^{(n-2)}(s)Q(s)J(g_0(s))\cdot\exp\int_{g_0(s)}^{s}\theta r^{n-2}h(r)J(r)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s > \frac{1}{e} \tag{13}$$

成立,则 Dirichlet 边值问题的所有解在 $G\equiv\Omega\times\mathbf{R}_+$ 上振动.

证明 反设 Dirichlet 边值问题(E)(B2)存在一个非振动解 $u(x,t)$. 不失一般性,设 $u(x,t)>0$,$t_0\geqslant 0$,由 $u(x,t)$ 的最终正性可知,存在一个 $t_1\geqslant t_0$,使得

$$\sigma_i(t)\geqslant t_0,\quad \tau_j(t)\geqslant t_0,$$
$$t\geqslant t_1,\quad i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m.$$

且 $g(t,\xi)\geqslant t_0$,$(t,\xi)\in[t_1,+\infty)\times[a,b]$,那么

$$u(x,\sigma_i(t))>0,\ u(x,\tau_i(t))>0,$$
$$u(x,g(t,\xi))>0.$$

对方程(E)的两边同时乘以 $\varphi_2(x)$,再在 Ω 上积分,

令 $y(x,t)=\varphi_2(x)u(x,t)$ 得到

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\int_\Omega y(x,t)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\int_\Omega y(x,\sigma_i(t))\,\mathrm{d}x\right] = -\lambda_2 a(t)\int_\Omega y(x,t)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p(x,t)y(x,t)\,\mathrm{d}x - \lambda_2\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\int_\Omega y(x,\tau_j(t))\,\mathrm{d}x - \int_\Omega\int_a^b [q(x,t,\xi)f(u(x,g(t,\xi)))]\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\varphi_2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{14}$$

令 $z(t)=\int_\Omega y(x,t)\,\mathrm{d}x$,

当 $t>t_1$ 时,令 $b_0=\sum\limits_{j=1}^{m}b_j(t)$,得到

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[z(t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)z(\sigma_i(t))\right]\leqslant -(\lambda_2 a(t)+p(t))z(t) - \lambda_2\sum_{j=1}^{m}b_j(t)z(\tau_j(t)) - cQ(t)z(g_0(t)) = -h(t)z(t) - \lambda_2 b_0(t)z(\tau_j(t)) - cQ(t)z(g_0(t)). \tag{15}$$

那么,令 $v(t)=z(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(t)z(\sigma_i(t))$,有

$$v^{(n)}(t)+h(t)z(t)+\lambda_2 b_0(t)z(\tau_j(t))\leqslant 0,\quad t>t_1. \tag{16}$$

类似于定理2的式(11)、(12),易得

$$v^{(n)}(t)+h(t)J(t)v(t)+\lambda_2 b_0(t)J(\tau_j(t))v(\tau_j(t))\leqslant 0,\quad t>t_1. \tag{17}$$

$$w'(t)+\theta t^{n-2}h(t)J(t)w(t)+\theta\lambda_2 b_0(t)\tau_j^{n-2}(t)J(\tau_j(t))w(\tau_j(t))\leqslant 0. \tag{18}$$

那么 $w(t)$ 是微分不等式(18)的一个最终正解. 另

一方面，由引理 3 及定理的条件可得微分不等式(18)不可能有最终正解，矛盾. 因此，Dirichlet 边值问题(E)(B2)没有最终正解. 即所有解都在 G 上振动.

参考文献
References

[1] Wang P G，WU Y H. Oscillation of solutions for systems of hyperbolic equations of neutral type [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2004(80)：1-8

[2] 林诗仲，周正新，俞元洪. 一类具有连续分布的偏差变元的双曲型方程的振动准则[J]. 数学杂志，2005，25(5)：521-526
LIN Shizhong，ZHOU Zhengxin，YU Yuanhong. Oscillation criteria for a class of hyperbolic equations with continuous distributed deviating arguments [J]. Journal of Mathematics，2005，25(5)：521-526

[3] 罗李平，欧阳自根. 非线性时滞双曲型偏微分方程解的振动性质[J]. 湖南师范大学自然科学学报，2007，30(1)：13-16
LUO Liping，OUYANG Zigen. Oscillatory properties of solutions for nonlinear delay hyperbolic partial differential equations [J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University，2007，30(1)：13-16

[4] 王悠悠，毛梁成，林诗仲. 非线性中立型时滞偏微分方程的振动原理[J]. 数学的实践与认识，2007，37(21)：198-202
WANG Youyou，MAO Liangcheng，LIN Shizhong. Osillation theorems for nonlinear neutral delay partial differential equations [J]. Mathematics in Practice and Theory，2007，37(21)：198-202

[5] 段惠，林诗仲. 非线性中立型时滞偏微分方程的振动性[J]. 数学的实践与认识，2007，37(22)：197-202
DUAN Hui，LIN Shizhong. Oscillation of nonlinear even order delay partial differential equations of neutral type [J]. Mathematics in Practice and Theory，2007，37(22)：197-202

[6] 李爱霞，任洪善，俞元洪. 高阶非线性中立型偏泛函微分方程的振动性[J]. 徐州师范大学学报：自然科学版，2008，26(2)：41-44
LI Aixia，REN Hongshan，YU Yuanhong. On the oscillation for higher-order nonlinear partial functional differential equation of neutral type [J]. Journal of Xuzhou Normal University：Natural Science Edition，2008，26(2)：41-44

[7] Ladde G S，Lakshmikantham V，Zhang B G. Oscillation theory of differential equations with deviating arguments [M]. New York：Macel Dekker Inc，1987：87-98

[8] Philos Ch G. A new criterion for the oscillatory and asymptotic behavior of delay differential equations [J]. Bull Acad Pol Sci Mat，1981，39：61-64

Oscillation criteria for high-order neutral hyperbolic partial differential equation with continuously distributed time delay

LÜ Yinping[1] LIN Shizhong[1] DING Chaogang[1]
1 College of Mathematics and Statistics，Hainan Normal University，Haikou 571158

Abstract In this article，the oscillation of certain high-order neutral hyperbolic functional partial differential equation is considered. By using Green formula，Jensen inequlity，and eigenvalue method，we obtain some new oscillatory criteria on two boundary conditions that ensure the oscillation of solutions. The results obtained extend and improve a number of existing criteria in the literature.

Key words neutral equation；continuously distributed time delay；oscillation criteria