文章编号:1674-7070(2011)02-0190-03

一类线性方程组解的条件数估计

孙苏亚[1] 杨兴东[1] 张佳静[1] 陈成[1]

摘要

利用矩阵范数的性质,给出了一类特殊线性方程组条件数估计,这有助于判别方程组解的灵敏度.

关键词

条件数;线性方程组;谱范数;谱半径

中图分类号 O151.21

文献标志码 A

0 引言

本文所用记号如下:集合 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 复矩阵集合;设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置;$|\lambda_1(\boldsymbol{A})|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(\boldsymbol{A})|$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的复特征值模的递降排序;$\sigma_1(\boldsymbol{A})\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值的递降排序;特别地,当 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵时,$\lambda_1(\boldsymbol{A})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{A})$;$|\boldsymbol{A}|\in\mathbf{C}_{n\times n}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有元素取绝对值,即 $|\boldsymbol{A}|=(|a_{ij}|)$;$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\lambda_1(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱范数;$\rho(\boldsymbol{A})(=|\lambda_1(\boldsymbol{A})|)$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径;设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,记 $|\boldsymbol{\alpha}|=(|a_1|,\cdots,|a_n|)^{\mathrm{T}}$,则 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 的递降排序记作 $|\boldsymbol{\alpha}|\downarrow=(|a|_{[1]},\cdots,|a|_{[n]})^{\mathrm{T}}$,其中 $|a|_{[1]}\geqslant\cdots\geqslant|a|_{[n]}\geqslant 0$;如无特殊说明,向量范数与矩阵范数统一记为 $\|.\|$,则由向量范数诱导的矩阵范数定义为 $\|\boldsymbol{A}\|=\max\limits_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|\neq 0\\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^{n\times n}}}\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$.

矩阵条件数在数值分析中起着十分重要的作用,它反映方程组的病态程度,直接影响算法的稳定性. 国内外学者[1-6]对此研究十分活跃. 早在 1982 年,Geurts[2]就给出线性方程组条件数的定义:

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\substack{\|\Delta\boldsymbol{A}\|\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{A}\|\\ \|\Delta\boldsymbol{b}\|\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{b}\|}}\frac{\left\|(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\right\|}{\varepsilon\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\|}.\tag{1}$$

同时,当范数为向量诱导的矩阵范数时,给出线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的条件数的表达式:

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{A}\|\ \|\boldsymbol{A}^{-1}\|+\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\ \|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\|}.\tag{2}$$

由于矩阵谱范数 $\|.\|_2$ 是向量诱导的矩阵范数[5],因而有

$$\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2+\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{b}\|_2}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\|_2}.\tag{3}$$

本文所讨论的线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\tag{4}$$

为特殊方程组,其对应的系数矩阵为如下双对角矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} d & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d & a & \cdots & 0\\ 0 & 0 & d & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d\end{pmatrix},\quad 0<\left|\frac{d}{a}\right|<1.\tag{5}$$

收稿日期 2010-09-01

资助项目 国家自然科学基金(40975037)

作者简介

孙苏亚,女,硕士生,研究方向为矩阵理论与应用. sunsuya. student@ sina. com

杨兴东(通信作者),男,教授,研究方向为矩阵理论与应用. xingdongy@ hotmail. com

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

本文利用矩阵范数的性质,得到线性方程组(4)的条件数估计式.这样可不必求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其逆矩阵的范数,仅通过系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及向量 $\boldsymbol{b}$ 自身的元素即可得到式(4)的条件数估计,使计算简捷方便.

下面是本文需要的引理,这在文献[7]中可以找到.

引理[7] 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 Hermite 半正定矩阵,则 $\lambda_i(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B})\leqslant\lambda_i(\boldsymbol{AB})\leqslant\lambda_i(\boldsymbol{A})\lambda_1(\boldsymbol{B}),i=1,2,\cdots,n.$ 其中 $\lambda_1(\boldsymbol{A})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{A})$.

1 主要结论

定理 设 $a,d\in\mathbf{C},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^n$, $|\boldsymbol{b}|\downarrow=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{b}|_{[1]}\\ \vdots\\ |\boldsymbol{b}|_{[n]}\end{pmatrix}$, $0\leqslant\left|\dfrac{d}{a}\right|<1$,那么

$$\left|\frac{a}{d}\right|^{n-1}\left(1+\left|\frac{a}{d}\right|\right)\alpha_n+\frac{|\boldsymbol{b}|_{[n]}}{|\boldsymbol{b}|_{[1]}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{\alpha_n}{\beta_n}\leqslant$$
$$\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant2\left|\frac{a}{d}\right|^{n-1}\left(1+\left|\frac{a}{d}\right|\right)\beta_n.\tag{6}$$

这里 $\alpha_n=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left|\dfrac{d}{a}\right|^{2i}}\Leftrightarrow\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left|\dfrac{d}{a}\right|^{2i}}=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\alpha_n,\beta_n=\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(i+1)\left|\dfrac{d}{a}\right|^{2i}}$.

证明 首先,经过简单的计算得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}d^{-1}&-ad^{-2}&(-a)^2d^{-3}\cdots&(-a)^{n-1}d^{-n}\\0&d^{-1}&-ad^{-2}&\cdots(-a)^{n-2}d^{-(n-1)}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots\quad d^{-1}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bar dd&\bar da&0&\cdots&0\\ \bar ad&\bar aa+\bar dd&\bar da&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&\bar aa+\bar dd\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\bar aa+\bar dd&\bar da&0&\cdots&0\\ \bar ad&\bar aa+\bar dd&\bar da&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&\bar aa+\bar dd\end{pmatrix}$,则

$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}|\leqslant|\boldsymbol{H}|$,

这里 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\leqslant\boldsymbol{B}=(b_{ij})\Leftrightarrow a_{ij}\leqslant b_{ij},\forall i,j.$

设 $f(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{H}|)$,则

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}l&-|\bar da|&0&\cdots&0\\-|\bar ad|&l&-|\bar da|&\cdots&0\\0&-|\bar ad|&l&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&l\end{vmatrix}=$$
$$\frac{\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-4|ad|^2}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{m-\sqrt{m^2-4|ad|^2}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{m^2-4|ad|^2}}.$$

其中 $l=\lambda-\bar aa-\bar dd,m=\lambda-|a|^2-|d|^2$,于是,令 $f(\lambda)=0$,有 $\dfrac{(m+\sqrt{m^2-4|ad|^2})^{n+1}}{(m-\sqrt{m^2-4|ad|^2})^{n+1}}=1$.

因而

$$\frac{m+\sqrt{m^2-4|ad|^2}}{m-\sqrt{m^2-4|ad|^2}}=\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right),\tag{7}$$

$$\frac{m-\sqrt{m^2-4|ad|^2}}{m+\sqrt{m^2-4|ad|^2}}=\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right).\tag{8}$$

将式(7)、(8)左边分母有理化再相加得,

$\lambda_k=|a|^2+|d|^2+2|ad|\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right),k=1,2,\cdots,n.$

因而有

$$(|a|-|d|)^2\leqslant\lambda_n(\boldsymbol{H})\leqslant$$
$$\lambda_1(\boldsymbol{H})=\rho(\boldsymbol{H})\leqslant(|a|+|d|)^2.$$

其次,令 $\boldsymbol{u}=(d^{-1},-a^{-1},a^{-2}d,\cdots,(-a)^{-(n-2)}d^{n-3},(-a)^{-(n-1)}d^{n-2})^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{Au}=(0,0,,\cdots,0,(-a)^{-(n-1)}d^{n-1})^{\mathrm{T}}\equiv\boldsymbol{v},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$,于是,

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\geqslant\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2}=\frac{\|\boldsymbol{u}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2}=\frac{|a|^{n-1}}{|d|^n}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{d}{a}\right|^{2i}}.\tag{9}$$

另一方面,设 $\boldsymbol{w}=(d^{-1},d^{-1}a^{-1}|a|,d^{-1}a^{-2}|a|^2,\cdots,d^{-1}a^{-(n-1)}|a|^{n-1})^{\mathrm{T}}$,则 $\|\boldsymbol{w}\|_2=\sqrt{n}|d|^{-1}$,且

$$\|\boldsymbol{A}\|_2\geqslant\frac{\|\boldsymbol{Aw}\|_2}{\|\boldsymbol{w}\|_2}=$$
$$\frac{|d|\sqrt{(n-1)(1+d^{-1}|a|)^2+1}}{\sqrt{n}}>$$
$$(|d|+|a|)\sqrt{\frac{n-1}{n}}.\tag{10}$$

由 Perron-Frobenius 理论[1],对任何 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,有 $\rho(\boldsymbol{B})<\rho(|\boldsymbol{B}|)$.故有

$$\|\boldsymbol{A}\|_2^2=\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\leqslant\rho(|\boldsymbol{A}|)<\rho(\boldsymbol{H})\leqslant$$
$$(|a|+|d|)^2\Rightarrow\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant|a|+|d|.\tag{11}$$

又由 $\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$ 得,

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_{\mathrm{F}}=$$
$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)|a|^{2(n-i-1)}|d|^{-2(n-i)}}=$$

$$\frac{|a|^{n-1}}{|d|^{n}}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\left|\frac{d}{a}\right|^{2i}}. \tag{12}$$

由引理以及式(11),有

$$\|A^{-1}b\|_2^2=\lambda_1(b^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}})^{-1}b)=$$

$$\lambda_1((AA^{\mathrm{H}})^{-1}bb^{\mathrm{H}})\geqslant\lambda_1(bb^{\mathrm{H}})\lambda_n((AA^{\mathrm{H}})^{-1})=$$

$$\lambda_1(bb^{\mathrm{H}})\lambda_1^{-1}(AA^{\mathrm{H}})=\frac{\|b\|_2^2}{\|A\|_2^2}\Rightarrow$$

$$\|A^{-1}b\|_2\geqslant\frac{\|b\|_2}{|a|+|d|}. \tag{13}$$

于是由式(3)与式(11)—(13)得

$$\mathrm{cond}_2(A,b)=$$

$$\|A\|_2\|A^{-1}\|_2+\frac{\|A^{-1}\|_2\|b\|_2}{\|A^{-1}b\|_2}\leqslant$$

$$2\frac{|a|^{n-1}}{|d|^{n}}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\left|\frac{d}{a}\right|^{2i}}(|a|+|d|)=$$

$$2\left|\frac{a}{d}\right|^{n-1}\left(1+\left|\frac{a}{d}\right|\right)\beta_n.$$

此即证明了式(6)右边不等式.

最后,由式(12)以及 $\|b\|_2\leqslant\sqrt{n}\,|b|_{[1]}$ 得,

$$\|A^{-1}b\|_2\leqslant\|A^{-1}\|_F\|b\|_2\leqslant$$

$$|b|_{[1]}\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)|a|^{2(n-i-1)}|d|^{-2(n-i)}}=$$

$$\frac{|a|^{n-1}|b|_{[1]}\sqrt{n}}{|d|^{n}}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\left|\frac{d}{a}\right|^{2i}}=$$

$$\frac{|a|^{n-1}|b|_{[1]}\sqrt{n}}{|d|^{n}}\beta_n.$$

再由式(3)、式(9)与式(10)以及 $\|b\|_2\geqslant\sqrt{n}\,|b|_{[n]}$ 得,

$$\mathrm{cond}_2(A,b)=$$

$$\|A\|_2\|A^{-1}\|_2+\frac{\|A^{-1}\|_2\|b\|_2}{\|A^{-1}b\|_2}\geqslant$$

$$\left|\frac{a}{d}\right|^{n-1}\left(1+\left|\frac{a}{d}\right|\right)\alpha_n+\frac{|b|_{[n]}}{|b|_{[1]}}\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{d}{a}\right|^{2i}}{\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\left|\frac{d}{a}\right|^{2i}}}=$$

$$\left|\frac{a}{d}\right|^{n-1}\left(1+\left|\frac{a}{d}\right|\right)\alpha_n+\frac{|b|_{[n]}}{|b|_{[1]}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{\alpha_n}{\beta_n}.$$

即式(6)左边不等式获证. 证毕.

2 数值例子

设 $A=\begin{pmatrix}4&5&0&0&0\\0&4&5&0&0\\0&0&4&5&0\\0&0&0&4&5\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$,则 $|b|_{[1]}=3$, $|b|_{[2]}=2$, $|b|_{[3]}=|b|_{[4]}=|b|_{[5]}=1$,因而 $\alpha_n=1.048$, $\beta_n=2.174$, $7.971\leqslant\mathrm{cond}_2(A,b)\leqslant 23.870$.

参考文献
References

[1] Higham D J. Condition numbers and their condition numbers[J]. Linear Algebra Appl,1995,214:193-213

[2] Geurts A J. A contribution to the theory of condition[J]. Numerische Mathematik,1982,39(1):85-96

[3] Demmel J W. On condition numbers and the distance to the nearest ill-posed problem[J]. Numerische Mathematik,1987,51(3):251-289

[4] 杨兴东,黄卫红. Sylvester 与 Lyapunov 方程向后误差分析[J]. 系统科学与数学,2008,28(5):524-534
YANG Xingdong, HUANG Weihong. Backward error analysis of the matrix equations for Sylvester and Lyapunov[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences,2008,28(5):524-534

[5] 杨兴东,戴华. 矩阵方程 $A^{\mathrm{T}}XA=D$ 的条件数与向后扰动分析[J]. 应用数学学报,2007,30(6):1086-1096
YANG Xingdong, DAI Hua. Condition numberers and backward perturbation analysis for the matrix equation $A^{\mathrm{T}}XA=D$[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2007,30(6):1086-1096

[6] Wei Y M, Zhang N M. Condition number related with generalized inverse $A_{\mathrm{T,S}}^{(2)}$ and constrained linear systems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2003,157(1):57-72

[7] Marshall A W, Olkin I. Inequalities: Theory of majorization and its applications[M]. New York: Academic Press,1979

The condition number estimation for a class of linear systems

SUN Suya[1] YANG Xingdong[1] ZHANG Jiajing[1] CHEN Cheng[1]

1 School of Mathematics & Physics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

Abstract In this paper, by the nature of matrix norm, we give the estimation of spectral norm condition number of the linear systems. The estimation can be used to measure the sensitivity of the solution of linear systems.

Key words condition number; linear systems; spectral norm; spectral radius