文章编号:1674-7070(2010)06-0538-03

负相依索赔条件下带常数利率的风险模型在随机时间上的破产概率

李明倩[1,2]　王志明[1,2]

摘要

研究了负相依索赔条件下带常数利率的风险模型在随机区间上的破产问题.假设随机理单服从指数分布,通过分析随机时间与有限时间之间的关系,得到了该模型破产概率的渐近表达式.

关键词

负相依;随机时间;破产概率

中图分类号 O211.6

文献标志码 A

0 引言

Introduction

考虑如下的风险模型.设 $X_k, k = 1,2,\cdots,n$ 是一列同分布的非负随机变量,共同分布函数为 F;索赔到达时刻 $\sigma_k, k = 1,2,\cdots,n$ 构成一个强度为 λ 的齐次泊松过程,即

$$N(t) = \operatorname{card}\{k = 1,2,\cdots,n,\sigma_k \leqslant t\},\quad t \geqslant 0.$$

$\{C(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是一个函数,它表示到时刻 t 为止的总保费,假设 $C(0) = 0$,$r > 0$ 是利率,$x \geqslant 0$ 是保险公司最初的资本.那以到时刻 t 为止,公司的盈余 $S_r(t)$ 可以表示为

$$S_r(t) = x\mathrm{e}^{rt} + \int_0^t \mathrm{e}^{r(t-s)} C\mathrm{d}s - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \mathrm{e}^{r(t-\sigma_k)},\quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

假设 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$,$\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ 相互独立.

关于上述模型已有广泛的研究,特别是假设索赔额为重尾分布的情形.文献[1]在假设索赔额为 $R_{-\alpha}$ 类时,研究了最终破产概率的渐近等价式;文献[2]在假设索赔服从另一类重尾索赔分布 S^* 的情形下研究了相同问题;文献[3]研究了索赔额为 S 类情形下有限时间破产概率的渐近表达式;文献[4]推广了文献[3]的结果,研究了索赔为相依重尾索赔情形下的有限时间破产问题.本文在文献[4]的基础上,研究在负相依的重尾索赔下随机区间上的破产问题.

设 T 为一随机变量,分布函数为 G,则定义随机区间上的破产概率 $\Psi_r(x,T) = P(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} S_r(t) < 0 \mid S_r(0) = x)$,则易得

$$\Psi_r(x,T) = \int_0^{\infty} P(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} S_r(s) < 0 \mid S_r(0) = x)\mathrm{d}G(t). \tag{2}$$

1 预备知识

Preliminary knowledge

先介绍一些常用的重尾分布族,设 $\overline{F}$ 表示分布函数 F 的尾分布,即 $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

1) L 类:F 满足 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$,对任何 $y > 0$(或等价于 $y = 1$);

2) D 类:F 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\sup \dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty$,对任何 $0 < y < 1$ (或等价于

收稿日期 2010-06-18

资助项目 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室(武汉科技大学)开放基金(C201006);湖北省教育厅项目(B20091107)

作者简介

李明倩,女,硕士生,研究方向为金融数学.xiaoqian850919@126.com

1 武汉科技大学 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室,武汉,430065

2 武汉科技大学 理学院,武汉,430065

$y = \frac{1}{2}$);

3)S 类:F 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}^{n^*}(x)}{\overline{F}(x)} = n$,对任何 $n \geqslant 2$,其中 F^{n^*} 表示 F 的 n 重卷积;

4)E 类:F 满足 $y^{-\beta} \leqslant \lim\limits_{x\to\infty}\inf\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leqslant \lim\limits_{x\to\infty}\sup\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leqslant y^{-\alpha}$,对任何 $y > 1$,其中,$1 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \infty$ 是任意固定的实数.

且有 $E \subset L \cap D \subset S \subset L$.

定义 对每个 n 和所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,若满足

1)$P(X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n) \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}P(X_k \leqslant x_k)$,则称随机变量序列 $\{X_k, k = 1,2,\cdots,n\}$ 下负相依.

2)$P(X_1 \geqslant x_1, \cdots, X_n \geqslant x_n) \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}P(X_k \geqslant x_k)$,则称随机变量序列 $\{X_k, k = 1,2,\cdots,n\}$ 上负相依.

若上述两个条件都满足,则随机变量序列 $\{X_k, k = 1,2,\cdots,n\}$ 称负相依.

2 主要结果及证明

Main results and demonstration

定理 1 考虑模型(1),若 $\{X_k, k = 1,2,\cdots,n\}$ 是相依的,其分布函数 $F \in L \cap D$,T 是服从参数为 μ 的指数分布,则在随机区间 $(0,T]$ 上破产概率的表达式为

$$\Psi_r(x,T) \sim \frac{\lambda}{r}\int_x^{+\infty}\frac{\overline{F}(y)}{y^{1+\frac{\mu}{r}}}x^{\frac{\mu}{r}}\mathrm{d}y. \tag{3}$$

证明 由式(1)和(2)可得破产概率为

$$\Psi_r(x,T) = \int_0^\infty P(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}S_r(s) < 0 \mid S_r(0) = x)\mathrm{d}G(t),$$

进一步可得

$$\Psi_r(x,T) \leqslant \int_0^\infty P\left(\sum_{k=1}^{N(t)}X_k\mathrm{e}^{-r\sigma_k} > x\right)\mathrm{d}G(t), \tag{4}$$

$$\Psi_r(x,T) \geqslant \int_0^\infty P\left(\sum_{k=1}^{N(t)}X_k\mathrm{e}^{-r\sigma_k} > x + l\right)\mathrm{d}G(t). \tag{5}$$

其中 $l = \int_0^t \mathrm{e}^{-rs}C\mathrm{d}s$.

根据引理,对式(4)右端作如下处理

$$\int_0^\infty P\left(\sum_{k=1}^{N(t)}X_k\mathrm{e}^{-r\sigma_k} > x\right)\mathrm{d}G(t) =$$

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sum_{k=1}^{N(t)}X_k\mathrm{e}^{-r\sigma_k} > x \mid N(t) = n\right)P(N(t)=n)\mathrm{d}G(t) =$$

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\mathrm{e}^{-rtU_{(k,n)}} > x\right)P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) =$$

$$\int_0^\infty \left(\sum_{1\leqslant n<\frac{x}{r}} + \sum_{n\geqslant\frac{x}{r}}\right)P\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\mathrm{e}^{-rtU_{(k,n)}} > x\right)P(N(t)=n)\mathrm{d}G(t) = L_1 + L_2.$$

下面分别计算 L_1 和 L_2.

$$L_2 = \int_0^\infty \sum_{n\geqslant\frac{x}{r}}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\mathrm{e}^{-rtU_{(k,n)}} > x\right)P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) \leqslant$$

$$\int_0^\infty \sum_{n\geqslant\frac{x}{r}}P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) =$$

$$\int_0^\infty P\left(N(t) \geqslant \frac{x}{r}\right)\mathrm{d}G(t) \leqslant$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{sx}{r}}E\mathrm{e}^{sN(t)}\mathrm{d}G(t), \tag{6}$$

这里 $r > EX_1$,r 是常数.易知当 x 趋于 ∞ 时,式(6)右端趋于 0.由于 $P(\mathrm{e}^{-rt} \leqslant \mathrm{e}^{-rtU_{(k,n)}} \leqslant 1) = 1, k = 1,2,\cdots,n$,则有

$$L_1 = \int_0^\infty \sum_{1\leqslant n<x/r}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\mathrm{e}^{-rtU_{(k,n)}} > x\right)P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) \leqslant$$

$$\int_0^\infty \sum_{1\leqslant n<x/r}P(\sum_{k=1}^{n}X_k > x)P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) =$$

$$\int_0^\infty \sum_{1\leqslant n<x/r}P\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) > x - nEx_1\right)P(N(t)=n)\mathrm{d}G(t) \leqslant$$

$$\int_0^\infty \sum_{1\leqslant n\leqslant x/r}C_1 n\overline{F}(x(1 - EX_1/r))P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) \leqslant$$

$$\int_0^\infty \sum_{1\leqslant n<x/r}C_2 n\overline{F}(x)P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) =$$

$$C_2\overline{F}(x)\int_0^\infty EN(t)\mathrm{d}G(t) =$$

$$C_2\overline{F}(x)\int_0^\infty \lambda t\mathrm{d}G(t) = C_2\lambda\overline{F}(x)ET.$$

由此可得 L_1 是有界的.这里 C_1, C_2 都是独立于 r 的常数.由于 $X_k\mathrm{e}^{-rTU_{(k,n)}} \overset{d}{=} X_1\mathrm{e}^{-rTU_{(k,n)}}$,其中 $(U_{(1,n)}, \cdots, U_{(n,n)})$ 独立同分布于区间 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量 $U_1, \cdots, U_n$ 的顺序统计量,由式(6)可将式(4)化为

$$\int_0^\infty P\left(\sum_{k=1}^{N(t)}X_k\mathrm{e}^{-r\sigma_k} > x\right)\mathrm{d}G(t) \sim$$

$$\int_0^\infty P\sum_{1\leqslant n<x/r}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\mathrm{e}^{-rtU_{(k,n)}} > x\right)P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) \sim$$

$$\int_0^\infty \sum_{1\leqslant n<x/r}\sum_{k=1}^{n}P(X_1\mathrm{e}^{-rtU_{(k,n)}} > x)P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) =$$

$$\int_0^\infty \sum_{1\leqslant n<x/r}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 P(X_1\mathrm{e}^{-rtU_{(k,n)}} > x)\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}u^{k-1}\cdot(1-u)^{n-k}\mathrm{d}u\right)P(N(t) = n)\mathrm{d}G(t) =$$

$$\int_0^\infty \sum_{1\leqslant n<x/r}nP(N(t) = n)\int_0^1 P(X_1\mathrm{e}^{-rtu} > x)\mathrm{d}u\mathrm{d}G(t) =$$

$$\int_0^\infty \lambda t \int_0^1 P(X_1 e^{-rtu} > x)\,du\,dG(t) =$$

$$\lambda \int_0^\infty \frac{t}{r} \int_x^{xe^{rt}} \frac{\bar{F}(y)}{y}\,dy\,dG(t) =$$

$$\frac{\lambda}{r} \int_x^{+\infty} \int_{\frac{1}{r}\ln\frac{y}{x}}^\infty \frac{t\bar{F}(y)}{y} g(t)\,dt\,dy,$$

由于 T 服从指数分布,所以上式可化为

$$\frac{\lambda}{r} \int_x^{+\infty} \frac{\bar{F}(y)}{y}\left[1 - G\left(\frac{1}{r}\ln\frac{y}{x}\right)\right]dy =$$

$$\frac{\lambda}{r} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{r}\ln\frac{y}{x}} \frac{\bar{F}(y)}{y}\,dy = \frac{\lambda}{r} \int_x^{+\infty} \frac{\bar{F}(y)}{y^{1+\frac{\mu}{r}}} x^{\frac{\mu}{r}}\,dy.$$

所以

$$\Psi_r(x,T) \leqslant \frac{\lambda}{r} \int_x^{+\infty} \frac{\bar{F}(y)}{y^{1+\frac{\mu}{r}}} x^{\frac{\mu}{r}}\,dy. \qquad (7)$$

函数 $\tilde{G}$ 是 $\sum_{k=1}^{N(T)} X_k e^{-r\sigma_k}$ 的分布函数,$F \in L \cap D$,根据式(7) 可得 $\tilde{G} \in L$, 所以就有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^\infty P\left(\sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-r\sigma_k} > x + l\right) dG(t)}{\int_0^\infty P\left(\sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-r\sigma_k} > x\right) dG(t)} = 1. \qquad (8)$$

由(7)和(8)得定理1得证.

参考文献

References

[1] Klüppelberg C, Stadtmüller U. Ruin probabilities in the presence of heavy-tails and interest rates[J]. Scand Acturial J, 1998(1): 49-58

[2] Asmussen S, Kalashnikov V, Konstantinides D, et al. A local limit theorem for random walk maxima with heavy tails[J]. Statistics & Probability Letters, 2002, 56(4): 399-404

[3] Tang Q H. The finite-time ruin probability of the compound Poisson model with constant interest force[J]. Journal of Applied Probability, 2005, 42(3): 608-619

[4] Kong F C, Zong G F. The finite-time ruin probability for ND claims with constant interest force[J]. Statistics & Probability Letters, 2008, 78(17): 3103-3109

The ruin probability over random intervals for the risk model with ND claims and constant interest force

LI Mingqian[1,2] WANG Zhiming[1,2]

1 Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065

2 College of Sciences, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065

Abstract In this paper, we investigate ruin problem over the random intervals for the risk model with negatively dependent (ND) claims and constant interest force. Suppose the random time obeys exponential distribution, we analyse the relation between random-time and limited-time, and derive the asymptotic formula for the ruin probability.

Key words negatively dependent; random intervals; ruin probability