文章编号:1674-7070(2010)06-0503-07

# 二阶 p-Laplacian 方程多点边值问题正解的存在性与拟线性迭代

仓曰华[1]　肖建中[1]　刘勤凤[1]

**摘要**

利用上下解构造辅助方程,结合 Leray-Schauder 度理论研究二阶 p-Laplacian 方程多点边值问题正解的存在性,并用单调迭代技巧与拟线性化方法讨论了正解迭代序列的收敛性.

**关键词**

p-Laplacian 方程;拟线性化;上下解;单调迭代;Leray-Schauder 度

**中图分类号** O175.8
**文献标志码** A

## 0　引言
Introduction

本文考虑如下 p-Laplacian 方程多点边值问题(BVP)

$$\begin{cases}\left(\Phi_p(u')\right)'+f(t,u,u')=0, & t\in[0,1],\\ u(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\,u(\xi_i), & u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}b_i\,u(\xi_i)\end{cases}\tag{1}$$

正解的存在性与迭代序列的收敛性,其中 $\Phi_p(s)=|s|^{p-2}s(p>1)$, $\xi_i\in[0,1]$ 且 $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$.

带有 p-Laplacian 算子的边值问题起源于不同的应用数学和物理领域,近年来受到人们普遍关注. 如纪德红等[1]运用 Krasnosel'skii 不动点定理研究了具有 p-Laplacian 算子多点边值问题正解的存在性;赵俊芳等[2]运用 Avery-Peterson 不动点定理研究了此类方程的 3 个对称正解的存在性;文献[3]运用不动点指数理论,给出了多点边值问题正解的存在性条件;孙博等[4]运用锥上凹泛函及单调迭代技巧,在研究正解存在性的同时给出了迭代序列来逼近此解;文献[5-6]运用单调迭代技巧及推广的 Mawhin 定理,研究了多点边值问题迭代解的收敛性问题;文献[7-8]应用拟线性方法,得到通常二阶常微分方程三点四点边值问题的迭代收敛解. 本文将综合运用拟线性方法、上下解方法及 Leray-Schauder 度理论来研究带有p-Laplacian算子的方程多点边值问题,得到式(1)正解存在性的充分条件和拟线性迭代解逼近序列的收敛性定理.

## 1　几个引理
Several Lemmas

为方便起见,本节先给出一些记号:$\mathbf{R}$ 表示实数集;$C^1[0,1]$ 为定义在$[0,1]$上具有一阶连续可导函数的全体;$I$ 表示恒等算子;$\deg(I-T,\Omega,0)$ 指全连续算子 $T$ 在 $C^1[0,1]$ 的有界开集 $\Omega$ 上关于0的 Leray-Schauder 度. 本文总假设:

(H$_1$)　$0<a_i,b_i<1(i=1,2,\cdots,m-2)$ 满足 $0<\sum_{i=1}^{m-2}a_i,\sum_{i=1}^{m-2}b_i\leqslant 1$;

(H$_2$)　$f(t,u,v)$ 在$[0,1]\times\mathbf{R}^2$上连续.

**定义 1**　称 $\alpha,\beta\in C^1[0,1]$ 且 $\Phi_p(\alpha'),\Phi_p(\beta')\in C^1[0,1]$ 分

**收稿日期** 2010-02-06
**资助项目** 国家自然科学基金(10671094)

**作者简介**

仓曰华,女,硕士生,主要研究方向为泛函分析及其应用. cangyuehua0515@163.com

肖建中(通讯作者),男,教授,主要从事泛函分析、常微分方程及模糊数学的研究. xiaojz@nuist.edu.cn

1　南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

别是式(1)的下、上解,若它们分别满足

$$\begin{cases}-\left(\Phi_p(\alpha')\right)'\leqslant f(t,\alpha,\alpha'),\quad t\in[0,1],\\ \alpha(0)\leqslant\sum_{i=1}^{m-2}a_i\,\alpha(\xi_i),\quad \alpha(1)\leqslant\sum_{i=1}^{m-2}b_i\,\alpha(\xi_i);\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\left(\Phi_p(\beta')\right)'\geqslant f(t,\beta,\beta'),\quad t\in[0,1],\\ \beta(0)\geqslant\sum_{i=1}^{m-2}a_i\,\beta(\xi_i),\quad \beta(1)\geqslant\sum_{i=1}^{m-2}b_i\,\beta(\xi_i).\end{cases}$$

**引理 1** 若式(1)满足条件($H_1$)、($H_2$),且满足:

1) $\alpha(t)$,$\beta(t)$分别是式(1)的下、上解;

2) $f(t,u,v)$ 在 $D=\left\{(t,u,v)\in[0,1]\times\mathbf{R}^2:\min\left\{\alpha(t),\beta(t)\right\}\leqslant u\leqslant\max\left\{\alpha(t),\beta(t)\right\}\right.$ 上关于 $u$ 严格递减.

则对任意 $t\in[0,1]$,有 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$.

**证明** 假设结论不成立,那么必存在 $t_0\in[0,1]$,使得 $\alpha(t_0)-\beta(t_0)\triangleq\max_{t\in[0,1]}\left(\alpha(t)-\beta(t)\right)>0$.

1) 情形 1,当 $t_0\in(0,1)$ 时.

因 $t_0$ 是极值点,有 $\alpha'(t_0)-\beta'(t_0)=0$. 由条件 2) 及上下解的定义知

$$\left(\Phi_p(\alpha')\right)'(t_0)-\left(\Phi_p(\beta')\right)'(t_0)\geqslant -f\left(t_0,\alpha(t_0),\alpha'(t_0)\right)+f\left(t_0,\beta(t_0),\beta'(t_0)\right)= f\left(t_0,\beta(t_0),\alpha'(t_0)\right)-f\left(t_0,\alpha(t_0),\alpha'(t_0)\right)>0.$$

于是有

$$\left(\Phi_p(\alpha')\right)'(t_0)-\left(\Phi_p(\beta')\right)'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\Phi_p\left(\alpha'(t)\right)-\Phi_p\left(\alpha'(t_0)\right)}{t-t_0}-\lim_{t\to t_0}\frac{\Phi_p\left(\beta'(t)\right)-\Phi_p\left(\beta'(t_0)\right)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\Phi_p\left(\alpha'(t)\right)-\Phi_p\left(\beta'(t)\right)}{t-t_0}>0,$$

由极限的局部保号性,在 $t_0$ 的右邻域 $U_+^0(t_0)$ 和左邻域 $U_-^0(t_0)$ 内必有

$$\Phi_p\left(\alpha'(t)\right)>\Phi_p\left(\beta'(t)\right),\quad t\in U_+^0(t_0);$$

$$\Phi_p\left(\alpha'(t)\right)<\Phi_p\left(\beta'(t)\right),\quad t\in U_-^0(t_0).$$

利用 $\Phi_p$ 的递增性得到

$\alpha'(t)>\beta'(t),t\in U_+^0(t_0)$;$\alpha'(t)<\beta'(t),t\in U_-^0(t_0)$.

故 $t_0$ 是 $\alpha(t)-\beta(t)$ 的极小值点,与 $\alpha(t_0)-\beta(t_0)$ 的定义矛盾!

2) 情形 2,当 $t_0=0$ 时.

此时有 $\alpha(0)-\beta(0)\triangleq\max_{t\in[0,1]}\left(\alpha(t)-\beta(t)\right)>0$. 注意到

$$\alpha(0)-\beta(0)\leqslant\sum_{i=1}^{m-2}a_i\,\alpha(\xi_i)-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\,\beta(\xi_i)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\left(\alpha(\xi_i)-\beta(\xi_i)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{m-2}a_i\left(\alpha(0)-\beta(0)\right).$$

于是 $\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\right)\left(\alpha(0)-\beta(0)\right)\leqslant 0$, 由此得 $\alpha(0)-\beta(0)\leqslant 0$,矛盾!

3) 情形 3,当 $t_0=1$ 时.

此时有 $\alpha(1)-\beta(1)\triangleq\max_{t\in[0,1]}\left(\alpha(t)-\beta(t)\right)>0$,类似于情形 2 可导出矛盾.

综上所述,对 $t\in[0,1]$,必有 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$.

**定义 2** 设 $E$ 是$[0,1]\times\mathbf{R}^2$ 的一个子集,称 $f(t,u,v)$ 满足 H 条件,若存在连续函数 $h:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 使得对$(t,u,v)\in E$ 有

$$\left|f(t,u,v)\right|\leqslant h\left(|v|\right)\text{ 且}\int_0^{+\infty}\frac{s^{p-1}}{h(s)}\mathrm{d}s=+\infty.$$

**引理 2** 若 $h:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是连续函数,那么

$$\begin{cases}\left(\Phi_p(u')\right)'=uh\left(|u'|\right),\quad t\in[0,1];\\ u(0)=0,\quad u(1)=0\end{cases}\tag{2}$$

只有平凡解.

**证明** 假设 $u_0(t)$ 是式(2) 的非平凡解,那么必存在 $t_0\in(0,1)$,使得 $u_0(t_0)>0$ 或者 $u_0(t_0)<0$.

不妨假设 $u_0(t_0)>0$, 且不访设 $u_0(t_0)\triangleq\max_{t\in[0,1]}u_0(t)>0$. 因 $t_0$ 是极值点,有 $u'_0(t_0)=0$. 由于

$$\left(\Phi_p(u'_0)\right)'(t_0)=u_0(t_0)h\left(\left|u'_0(t_0)\right|\right)>0,$$

于是有

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Phi_p\left(u'_0(t)\right)-\Phi_p\left(u'_0(t_0)\right)}{t-t_0}=\left(\Phi_p(u'_0)\right)'(t_0)>0,$$

注意到 $\Phi_p\left(u'_0(t_0)\right)=0$,根据极限的局部保号性可得 $\Phi_p\left(u'_0(t)\right)>0,\quad t\in U_+^0(t_0)$;$\Phi_p\left(u'_0(t)\right)<0,\quad t\in U_-^0(t_0)$.

由 $\Phi_p$ 的递增性知 $u'_0(t)>0,t\in U_+^0(t_0)$;$u'_0(t)<0,t\in U_-^0(t_0)$.

这表明 $t_0$ 是 $u_0(t)$ 的极小值点,与 $u_0(t_0)$ 的定义矛盾!故式(2)只有平凡解.

**引理 3** 设式(1)满足条件($H_2$),且 $\gamma(t)$,$\Gamma(t):[0,1]\to\mathbf{R}$ 都是连续函数,对所有 $t\in[0,1]$ 有 $\gamma(t)\leqslant\Gamma(t)$,且对式(1) 的每一个解 $u(t)$ 都有

$\gamma(t) \leqslant u(t) \leqslant \Gamma(t)$,令

$E = \{(t,u,v) \in [0,1] \times \mathbf{R}^2 : \gamma(t) \leqslant u(t) \leqslant \Gamma(t)\}$,

若$f(t,u,v)$在$E$上满足H条件,则存在一个常数$N > 0$($N$仅与$\gamma(t),\Gamma(t),h(t)$有关),使得对$t \in [0,1]$有$|u'(t)| \leqslant N$.

**证明** 由定义2,存在一个常数$N > 0$($N$仅与$\gamma(t),\Gamma(t),h(t)$有关),使得

$$\int_0^N \frac{s^{p-1}}{h(s)}\mathrm{d}s > (p-1)\left(\max_{t\in[0,1]}\Gamma(t) - \min_{t\in[0,1]}\gamma(t)\right). \quad (3)$$

下面证明对任意$t \in [0,1]$有$|u'(t)| \leqslant N$.

若上述结论不成立,则存在$t_* \in [0,1]$使得$|u'(t_*)| > N$. 于是存在$t_1,t_2 \in (0,1)$,$t_1 < t_2 < t_*$或$t_* < t_1 < t_2$,使得下面4种情形之一成立:

1)情形1,$0 < u'(t) < N$,$t \in (t_1,t_2)$且$u'(t_1) = 0$,$u'(t_2) = N$;

2)情形2,$0 < u'(t) < N$,$t \in (t_1,t_2)$且$u'(t_1) = N$,$u'(t_2) = 0$;

3)情形3,$-N < u'(t) < 0$,$t \in (t_1,t_2)$且$u'(t_1) = 0$,$u'(t_2) = -N$;

4)情形4,$-N < u'(t) < 0$,$t \in (t_1,t_2)$且$u'(t_1) = -N$,$u'(t_2) = 0$.

只考虑情形1,其他情形类似可证. 由于

$$\left|\left(\Phi_p(u')\right)'\right| u' = |f(t,u,u')| u' \leqslant h(|u'|)u',$$

故两边同时对$t$求积分得

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(\Phi_p\left(u'(t)\right)\right)' u'(t)}{h\left(u'(t)\right)}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(\left(u'(t)\right)^{p-1}\right)' u'(t)}{h\left(u'(t)\right)}\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{p-1} \cdot \frac{\left(u'(t)\right)^{p-2} u''(t) \cdot u'(t)}{h\left(u'(t)\right)}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{p-1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(u'(t)\right)^{p-1} u''(t)}{h\left(u'(t)\right)}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{p-1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(u'(t)\right)^{p-1}}{h\left(u'(t)\right)}\mathrm{d}\left(u'(t)\right) = \frac{1}{p-1}\int_0^N \frac{s^{p-1}}{h(s)}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_{t_1}^{t_2} u'(t)\mathrm{d}t = u(t_2) - u(t_1) \leqslant \max_{t\in[0,1]}\Gamma(t) - \min_{t\in[0,1]}\gamma(t),$$

所以

$$\int_0^N \frac{s^{p-1}}{h(s)}\mathrm{d}s \leqslant (p-1)\left(\max_{t\in[0,1]}\Gamma(t) - \min_{t\in[0,1]}\gamma(t)\right),$$

与式(3)矛盾!故对任意$t \in [0,1]$有$|u'(t)| \leqslant N$.

## 2 主要结果
Principal Results

**定理1** 若式(1)满足($H_1$)、($H_2$)条件且满足:

1)$\alpha(t)$,$\beta(t)$分别是式(1)的下、上解,且对任意$t \in [0,1]$,有$\alpha(t) \leqslant \beta(t)$;

2)$f(t,u,v)$在

$D = \{(t,u,v) \in [0,1] \times \mathbf{R}^2 : \alpha(t) \leqslant u \leqslant \beta(t)\}$

上满足H条件.

则式(1)至少存在一个正解$u(t) \in C^1[0,1]$,使得对任意$t \in [0,1]$,有$\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$.

**证明** 令

$$w\left(u(t)\right) = \begin{cases} \beta(t), & u(t) > \beta(t), \\ u(t), & \alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t), \\ \alpha(t), & u(t) < \alpha(t). \end{cases}$$

构造辅助方程

$$\left(\Phi_p\left(u'(t)\right)\right)' + \lambda f\left(t, w\left(u(t)\right), u'(t)\right) =$$

$$\left[u(t) - \lambda w\left(u(t)\right)\right] h\left(|u'(t)|\right), t \in [0,1], \quad (4)$$

$$u(0) = \frac{\lambda}{1+\lambda}\left[w\left(u(0)\right) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i w\left(u(\xi_i)\right)\right], \quad (5)$$

$$u(1) = \frac{\lambda}{1+\lambda}\left[w\left(u(1)\right) + \sum_{i=1}^{m-2} b_i w\left(u(\xi_i)\right)\right]. \quad (6)$$

其中$\lambda \in [0,1]$,$h$是满足定义2的连续函数. 于是可以选取一个常数$M_0 > 0$,使得

$$-M_0 < \alpha(t) \leqslant \beta(t) < M_0, \quad (7)$$

$$\left[M_0 - \beta(t)\right] h(0) - f\left(t, \beta(t), 0\right) > 0, \quad (8)$$

$$\left[M_0 + \alpha(t)\right] h(0) + f\left(t, \alpha(t), 0\right) > 0. \quad (9)$$

以下分4步进行证明

1)证明式(4)、(5)、(6)的每一个解$u(t)$都满足$|u(t)| < M_0$.

假设结论不成立,那么必存在$t_0 \in [0,1]$,使得$u(t_0) \geqslant M_0$或$u(t_0) \leqslant -M_0$. 只要考虑$u(t_0) \geqslant M_0$时的情形,其他情形类似可证. 不妨设

$$u(t_0) \triangleq \max_{t\in[0,1]} u(t) \geqslant M_0 > 0.$$

① 情形1,当$t_0 \in (0,1)$时.

因$t_0$是极值点,有$u'(t_0) = 0$. 当$\lambda = 0$时,

$$\left(\Phi_p(u')\right)'(t_0) = u(t_0)h\left(|u'(t_0)|\right) > 0;$$

当$\lambda \in (0,1]$时,由式(8)可得

$$\left(\Phi_p(u')\right)'(t_0) = -\lambda f\left(t_0, w\left(u(t_0)\right), u'(t_0)\right) +$$

$$[u(t_0)-\lambda w(u(t_0))]h(|u'(t_0)|)=$$
$$-\lambda f(t_0,\beta(t_0),0)+[u(t_0)-\lambda\beta(t_0)]h(0)\geq$$
$$\lambda\{[u(t_0)-\beta(t_0)]h(0)-f(t_0,\beta(t_0),0)\}>0.$$

于是有

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Phi_p(u'(t))-\Phi_p(u'(t_0))}{t-t_0}=(\Phi_p(u'))'(t_0)>0.$$

根据极限的局部保号性得到

$$\Phi_p(u'(t))>0,\quad t\in U_+^0(t_0);$$
$$\Phi_p(u'(t))<0,\quad t\in U_-^0(t_0).$$

由 $\Phi_p$ 的递增性知

$$u'(t)>0,t\in U_+^0(t_0);u'(t)<0,t\in U_-^0(t_0).$$

这表明 $t_0$ 是 $u(t)$ 的极小值点,与 $u(t_0)$ 的定义矛盾!

② 情形 2,当 $t_0=0$ 时.

此时有 $u(0)\triangleq\max\limits_{t\in[0,1]}u(t)\geq M_0>0$. 由式(5),可知 $\lambda\neq 0$;当 $\lambda\in(0,1]$ 时,

$$M_0\leq u(0)=\frac{\lambda}{1+\lambda}\left[w(u(0))+\sum_{i=1}^{m-2}a_iw(u(\xi_i))\right]=$$
$$\frac{\lambda}{1+\lambda}\left[\beta(0)+\sum_{i=1}^{m-2}a_iw(u(\xi_i))\right]\leq$$
$$\frac{\lambda}{1+\lambda}[\beta(0)+\beta(0)]=\frac{2\lambda}{1+\lambda}\beta(0)\leq\beta(0)<M_0,$$

矛盾!

③ 情形 3,当 $t_0=1$ 时.

此时有 $u(1)\triangleq\max\limits_{t\in[0,1]}u(t)\geq M_0>0$,类似于情形 2 可导出矛盾.

综上所述,对任意 $t\in[0,1]$,必有 $|u(t)|<M_0$.

2) 证明存在与 $\lambda$ 无关的常数 $M_1>0$,使得式(4)、(5)、(6)的每一个解 $u(t)$ 都满足 $|u'(t)|\leq M_1$.

令 $E=\{(t,u,v)\in[0,1]\times\mathbf{R}^2:|u(t)|\leq M_0\}$,定义算子 $F_\lambda:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$F_\lambda\triangleq=-\lambda f(t,w(u),v)+[u-\lambda w(u)]h(|v|),$$

则

$$|F_\lambda|=|-\lambda f(t,w(u),v)+[u-\lambda w(u)]h(|v|)|\leq$$
$$\lambda|f(t,w(u),v)|+|u|h(|v|)+$$
$$\lambda|w(u)|h(|v|)\leq$$
$$\lambda h(|v|)+M_0h(|v|)+\lambda M_0h(|v|)\leq$$
$$(2M_0+1)h(|v|)\triangleq=h_E(|v|).$$

由于 $f(t,u,v)$ 在 $E$ 上满足 H 条件,

$$\int_0^{+\infty}\frac{s^{p-1}}{h_E(s)}ds=\int_0^{+\infty}\frac{s^{p-1}}{(2M_0+1)h(s)}ds=$$
$$\frac{1}{(2M_0+1)}\int_0^{+\infty}\frac{s^{p-1}}{h(s)}ds=+\infty,$$

故 $F_\lambda$ 也在 $E$ 上满足 H 条件.

令 $\gamma(t)=-M_0,\Gamma(t)=M_0,t\in[0,1]$,由①及引理 3 知,存在 $M_1>0$(仅与 $M_0,h$ 有关),使得对任意 $t\in[0,1]$ 有 $|u'(t)|\leq M_1$. 由于 $M_0,h$ 与 $\lambda$ 无关,故 $M_1$ 也与 $\lambda$ 无关.

3) 证明 $\lambda=1$ 时,式(4)、(5)、(6)至少有一个正解 $u_1(t)$.

定义算子 $L:C^1[0,1]\to C[0,1]\times\mathbf{R}^2$ 为 $L(u)=\left((\Phi_p(u'))',u(0),u(1)\right)$ 和 $N_\lambda:C^1[0,1]\to C[0,1]\times\mathbf{R}^2$ 为 $N_\lambda(u)=(F_\lambda,A_\lambda,B_\lambda)$,

其中:$F_\lambda$ 见 ② 中的定义;

$$A_\lambda\triangleq=\frac{\lambda}{1+\lambda}\left[w(u(0))+\sum_{m-2}^{i=1}a_iw(u(\xi_i))\right];$$
$$B_\lambda\triangleq=\frac{\lambda}{1+\lambda}\left[w(u(1))+\sum_{i=1}^{m-2}b_iw(u(\xi_i))\right].$$

由于 $L^{-1}$ 是紧算子,故 $T_\lambda\triangleq=L^{-1}N_\lambda:C^1[0,1]\to C^1[0,1]$ 也是紧算子.

令 $\Omega=\{u\in C^1[0,1]:\|u\|<M_0,\|u'\|<M_1\}$,由①和②知,对于每一个 $\lambda\in[0,1]$,$\deg(I-T_\lambda,\Omega,0)$ 都有定义,且 $0\notin(I-T_\lambda)(\partial\Omega)$. 利用 Leray-Schauder 度同伦不变性知

$$\deg(I-T_0,\Omega,0)=\deg(I-T_1,\Omega,0).$$

再根据引理 2 可得 $\deg(I-T_0,\Omega,0)=1$,所以 $\deg(I-T_1,\Omega,0)=1$. 故

$$(\Phi_p(u'(t)))'+f(t,w(u(t)),u'(t))=$$
$$[u(t)-w(u(t))]h(|u'(t)|),t\in[0,1],\quad(10)$$
$$u(0)=\frac{1}{2}\left[w(u(0))+\sum_{i=1}^{m-2}a_iw(u(\xi_i))\right],\quad(11)$$
$$u(1)=\frac{1}{2}\left[w(u(1))+\sum_{i=1}^{m-2}b_iw(u(\xi_i))\right].\quad(12)$$

至少有一个正解 $u_1(t)$.

4) 证明 $u_1(t)$ 也是式(1)的解.

要证 $u_1(t)$ 是式(0.1)的解,只需再证对任意 $t\in[0,1]$,有 $\alpha(t)\leq u_1(t)\leq\beta(t)$. 在这里只证 $\alpha(t)\leq u_1(t)$,类似可得证 $u_1(t)\leq\beta(t)$.

假设结论不成立,那么必存在 $t_0\in[0,1]$,使得 $\alpha(t_0)-u_1(t_0)>0$. 不妨设

$$\alpha(t_0)-u_1(t_0)\triangleq\max_{t\in[0,1]}\big(\alpha(t)-u_1(t)\big).$$

① 情形 1,当 $t_0\in(0,1)$ 时.

因 $t_0$ 是极值点,有 $\alpha'(t_0)-u'_1(t_0)=0$. 由条件 2)及上下解的定义知

$$\big(\Phi_p(\alpha')\big)'(t_0)-\big(\Phi_p(u'_1)\big)'(t_0)\geqslant$$
$$f\big(t_0,w\big(u_1(t_0)\big),u'_1(t_0)\big)-f\big(t_0,w\big(\alpha(t_0)\big),\alpha'(t_0)\big)-$$
$$\big[u_1(t_0)-w\big(u_1(t_0)\big)\big]h\big(\big|u'_1(t_0)\big|\big)=$$
$$f\big(t_0,\alpha(t_0),u'_1(t_0)\big)-f\big(t_0,\alpha(t_0),\alpha'(t_0)\big)-$$
$$\big[u_1(t_0)-\alpha(t_0)\big]h\big(\big|u'_1(t_0)\big|\big)=$$
$$-\big[u_1(t_0)-\alpha(t_0)\big]h\big(\big|u'_1(t_0)\big|\big)>0,$$

类似于定理 1 证明的情形 1 可导出矛盾!

② 情形 2,当 $t_0=0$ 时.

此时有 $\alpha(0)-u_1(0)\triangleq\max_{t\in[0,1]}\big(\alpha(t)-u_1(t)\big)>0.$ 根据式(11)及上下解的定义可得

$$\alpha(0)>u_1(0)=\frac{1}{2}\Big[w\big(u_1(0)\big)+\sum_{i=1}^{m-2}a_iw\big(u_1(\xi_i)\big)\Big]\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\big[\alpha(0)+\alpha(0)\big]=\alpha(0),$$

矛盾!

③ 情形 3,当 $t_0=1$ 时.

此时有 $\alpha(1)-u_1(1)\triangleq\max_{t\in[0,1]}\big(\alpha(t)-u_1(t)\big)>0,$ 类似于情形 2 可导出矛盾.

综上所述,对 $t\in[0,1]$,必有 $\alpha(t)\leqslant u_1(t)\leqslant\beta(t)$. 故定理的结论成立.

**定理 2** 若式(1)满足($H_1$)、($H_2$)且满足:

1) $\alpha(t),\beta(t)$ 分别是式(1)的下、上解,且对任意 $t\in[0,1]$,有 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$,

2) $f(t,u,v)$ 在

$$D=\big\{(t,u,v)\in[0,1]\times\mathbf{R}^2:\alpha(t)\leqslant u\leqslant\beta(t)\big\}$$

上满足 H 条件,

3) $f_{uu}(t,u,v)$ 存在且在 $[0,1]\times\mathbf{R}^2$ 上连续,在 $D$ 上有 $f_u(t,u,v)<0$ 和在 $J\times[-C,C]$ 上 $f_{uu}(t,u,v)\geqslant 0$,其中

$$J=\big\{(t,u)\in[0,1]\times\mathbf{R}:\alpha(t)\leqslant u\leqslant\beta(t)\big\},$$
$$C\geqslant\max\Big\{\max_{t\in[0,1]}\big|u'(t)\big|,\max_{t\in[0,1]}\big|\alpha'(t)\big|,\max_{t\in[0,1]}\big|\beta'(t)\big|\Big\}.$$

则存在一个不减的序列 $\{\alpha_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于式(1)的解 $u(t)\in C^1[0,1]$.

**证明** 令

$$p(v)=\begin{cases}C, & v>C;\\ v, & -C\leqslant v\leqslant C;\\ -C, & v<-C.\end{cases}$$

考虑边值问题

$$\big(\Phi_p(u')\big)'+f\big(t,u,p(u')\big)=0,t\in[0,1],\tag{13}$$
$$u(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\,u(\xi_i),u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}b_i\,u(\xi_i).\tag{14}$$

易知,若式(13)、(14)的解 $u(t)\in C^1[0,1]$ 满足 $\big|u'(t)\big|\leqslant C$,那么 $u(t)$ 就是式(1)的解. 下面证明 $\big|u'(t)\big|\leqslant C$.

事实上,由定义 2 知,对 $\forall(t,u,v)\in D$ 有 $\big|f\big(t,u,p(u')\big)\big|\leqslant h\big(\big|p(u')\big|\big)\triangleq\bar{h}(|u'|)$. 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{s^{p-1}}{\bar{h}(s)}\mathrm{d}s=\int_0^C\frac{s^{p-1}}{h(s)}\mathrm{d}s+\int_C^{+\infty}\frac{s^{p-1}}{h(C)}\mathrm{d}s=+\infty,$$

因此 $\bar{h}(s)$ 也是满足定义 2 的连续函数,而且

$$\int_0^C\frac{s^{p-1}}{\bar{h}(s)}\mathrm{d}s=\int_0^C\frac{s^{p-1}}{h(s)}\mathrm{d}s>\int_0^N\frac{s^{p-1}}{h(s)}\mathrm{d}s\geqslant$$
$$(p-1)\big(\max_{t\in[0,1]}\alpha(t)-\min_{t\in[0,1]}\beta(t)\big),$$

又因为 $u(t)$ 是式(13)、(14)的解,且满足 $\alpha(t)\leqslant u(t)\leqslant\beta(t)$,故由引理 3 知,存在常数 $N$(只与 $\alpha,\beta,h$ 有关),使得 $\big|u'(t)\big|\leqslant N$,从而有 $\big|u'(t)\big|\leqslant C$,所以 $u(t)$ 也是式(1)的解.

取

$$F(t,u,v,z)=f\big(t,z,p(v)\big)+f_u\big(t,z,p(v)\big)(u-z),$$
$$(t,u,v,z)\in[0,1]\times\mathbf{R}^3;$$
$$A(u,z)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\,z(\xi_i)+\sum_{i=1}^{m-2}a_i(u-z);$$
$$B(u,z)=\sum_{i=1}^{m-2}b_i\,z(\xi_i)+\sum_{i=1}^{m-2}b_i(u-z).$$

那么 $F(t,u,v,z)$ 在 $\big((t,u,v),z\big)\in D\times\big[\min_{t\in[0,1]}\alpha_0(t),\min_{t\in[0,1]}\beta_0(t)\big]$ 上连续. 利用中值定理和条件 3)可得

$$\big|F(t,u,v,z)\big|=$$
$$\big|f\big(t,z,p(v)\big)+f_u\big(t,z,p(v)\big)(u-z)\big|\leqslant$$
$$\big|f\big(t,z,p(v)\big)\big|+\big|f_u\big(t,z,p(v)\big)(u-z)\big|=$$
$$\big|f\big(t,z,p(v)\big)\big|-f_u\big(t,z,p(v)\big)|u-z|\leqslant$$
$$\big|f\big(t,z,p(v)\big)\big|-f_u\big(t,z,p(v)\big)(\beta-\alpha)=$$
$$\big|f\big(t,z,p(v)\big)\big|-\big[f\big(t,\beta,p(v)\big)-f\big(t,\alpha,p(v)\big)\big]\leqslant$$
$$h\big(\big|p(v)\big|\big)+h\big(\big|p(v)\big|\big)+h\big(\big|p(v)\big|\big)=$$

$3h\left(\left|p(v)\right|\right)$,

因此由引理 3 知存在常数 $C_1>0$,使得对于

$$\left(\Phi_p(u')\right)'+F(t,u,v,z)=0\left(\alpha(t)\leqslant z(t)\leqslant\beta(t)\right)$$

的每一个解 $u(t)$ 满足 $\alpha(t)\leqslant u(t)\leqslant\beta(t)$, 有 $\left|u'(t)\right|\leqslant C_1$.

现在考虑拟线性边值问题:

$$\left(\Phi_p(u')\right)'+F(t,u,v,\alpha)=0,t\in[0,1],\quad(15)$$

$$u(0)=A(u,\alpha),u(1)=B(u,\alpha).\quad(16)$$

因 $\left|\alpha'(t)\right|\leqslant C$ 和 $\left|\beta'(t)\right|\leqslant C$,有

$$-\left(\Phi_p(\alpha')\right)'\leqslant f(t,\alpha,\alpha')=F(t,\alpha,\alpha',\alpha),t\in[0,1],$$

$$\alpha(0)\leqslant\sum_{i=1}^{m-2}a_i\,\alpha(\xi_i)=A(\alpha,\alpha),$$

$$\alpha(1)\leqslant\sum_{i=1}^{m-2}b_i\,\alpha(\xi_i)=B(\alpha,\alpha).$$

故 $\alpha(t)$ 是式(15)、(16)的一个下解. 根据条件 3)及中值定理可知

$$\begin{aligned}&F(t,\beta,\beta',\alpha)-f(t,\beta,\beta')=\\&f\left(t,\alpha,p(\beta')\right)+f_u\left(t,\alpha,p(\beta')\right)(\beta-\alpha)-f(t,\beta,\beta')=\\&f(t,\alpha,\beta')+f_u(t,\alpha,\beta')(\beta-\alpha)-f(t,\beta,\beta')\leqslant\\&f(t,\alpha,\beta')+f_u(t,\alpha,\beta')(\beta-\alpha)-\\&\quad[f(t,\alpha,\beta')+f_u(t,\alpha,\beta')(\beta-\alpha)]=0.\end{aligned}$$

故 $-\left(\Phi_p(\beta')\right)'=f(t,\beta,\beta')\geqslant F(t,\beta,\beta',\alpha)$. 由条件$(H_1)$可得

$$\begin{aligned}&\beta(0)-A(\beta(0),\alpha(0))\geqslant\\&\beta(0)-\left[\alpha(0)+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\left(\beta(0)-\alpha(0)\right)\right]=\\&\left(\beta_0(0)-\alpha_0(0)\right)\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\right)\geqslant0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\beta_0(1)-A\left(\beta_0(1),\alpha_0(1)\right)\geqslant\\&\beta_0(1)-\left[\alpha_0(1)+\sum_{i=1}^{m-2}b_i\left(\beta_0(1)-\alpha_0(1)\right)\right.=\\&\left(\beta_0(1)-\alpha_0(1)\right)\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\right)\geqslant0,\end{aligned}$$

因此 $\beta(t)$ 为式(15)、(16)的一个上解.

根据定理 1 可得,存在式(15)、(16)的一个解 $\alpha_1(t)$,使得 $\alpha(t)\leqslant\alpha_1(t)\leqslant\beta(t)$,且对 $t\in[0,1]$ 有 $|\alpha'_1(t)|\leqslant C_1$.

类似可证 $\alpha_1(t)$ 和 $\beta(t)$ 为

$$\left(\Phi_p(u')\right)'+F(t,u,v,\alpha_1)=0,t\in[0,1]\quad(17)$$

$$u(0)=A(u,\alpha_1),u(1)=B(u,\alpha_1)\quad(18)$$

的下、上解. 再由定理 1 知,存在式(17)、(18)的一个解 $\alpha_2(t)$,使得 $\alpha_1(t)\leqslant\alpha_2(t)\leqslant\beta(t)$,且对 $t\in[0,1]$ 有 $\left|\alpha'_2(t)\right|\leqslant C_1$.

以此类推, 可以得到一个单调不减序列 $\left\{\alpha_n(t)\right\}$,$\alpha_0(t)\leqslant\alpha_1(t)\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n(t)\leqslant\beta(t)$,且对 $t\in[0,1]$ 有 $\left|\alpha'_n(t)\right|\leqslant C_1$. 其中 $\alpha_n(t)$ 是边值问题

$$\left(\Phi_p(u')\right)'+F(t,u,v,\alpha_{n-1})=0,\quad t\in[0,1],\ (19)$$

$$u(0)=A(u,\alpha_{n-1}),u(1)=B(u,\alpha_{n-1})\ (20)$$

的解,其具体形式如下:

$$\alpha_n(t)=$$

$$\begin{cases}A\left(\alpha_n(0),\alpha_{n-1}(0)\right)+\int_0^t\Phi_p^{-1}\left(M_n(r)\right)\mathrm{d}r,t\in[0,\sigma];\\B\left(\alpha_n(1),\alpha_{n-1}(1)\right)-\int_t^1\Phi_p^{-1}\left(-M_n(r)\right)\mathrm{d}r,t\in[\sigma,1].\end{cases}\quad(21)$$

其中 $M_n(r)=\int_r^\sigma F\left(t,\alpha_n(s),\alpha'_n(s);\alpha_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s$.

由定理 1 证明 1 及 $\left|\alpha'_n(t)\right|\leqslant C_1$ 知序列 $\left\{\alpha_n^{(i)}\right\}(i=0,1)$ 一致有界, 应用中值定理知 $\left\{\alpha_n^{(i)}\right\}(i=0,1)$ 等度连续,应用 Ascoli-Arzela 定理知存在 $\left\{\alpha_n(t)\right\}$ 的子序列 $\left\{\alpha_{n_k}(t)\right\}$ 和函数 $u(t)\in C^1[0,1]$,使得 $\left\{\alpha_{n_k}^{(i)}(t)\right\}$ 当 $k\to\infty$ 时在$[0,1]$上收敛于 $u^{(i)}(t)$. 由于 $\left\{\alpha_{n_k}(t)\right\}$ 是一个单调序列,故在$[0,1]$上 $\alpha_n(t)\to u(t)(n\to\infty)$. 且当 $k\to\infty$ 时 $A\left(\alpha_{n_k}(0),\alpha_{n_k-1}(0)\right)$ 一致收敛于 $u(0)$;$B\left(\alpha_{n_k}(1),\alpha_{n_k-1}(1)\right)$ 一致收敛于 $u(1)$;在$[0,1]$上 $F(t,\alpha_{n_k},\alpha'_{n_k};\alpha_{n_k-1})$ 一致收敛于 $f\left(t,u,p(u')\right)$. 由式(21),当 $n\to\infty$ 时,有

$$u(t)=$$

$$\begin{cases}u(0)+\int_0^t\Phi_p^{-1}\left(\int_r^\sigma f\left(t,u(s),p\left(u'(s)\right)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}r,\\\quad t\in[0,\sigma];\\u(1)-\int_t^1\Phi_p^{-1}\left(\int_\sigma^r f\left(t,u(s),p\left(u'(s)\right)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}r,\\\quad t\in[\sigma,1].\end{cases}$$

因此 $u(t)$ 是式(13)、(14) 的解,从而也是式(1) 的解.

## 3 例子
Examples

**例 1**　$p>1$ 时,考虑 BVP

$$\begin{cases}\left(\Phi_p(u')\right)' + t^2 e^{|u'|} - u = 0, t \in [0,1]; \\ u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{2^i} u(\xi_i), u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{i(i+1)} u(\xi_i).\end{cases} \tag{22}$$

显然,$0 < \frac{1}{2^i}, \frac{1}{i(i+1)} < 1, i = 1,2,\cdots,m-2$,且$0 < \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{2^i}, \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{i(i+1)} \leqslant 1$. 令$f(t,u,u') = t^2 e^{|u'|} - u$,则$f$在$[0,1] \times \mathbf{R}^2$上连续,且$f_u(t,u,u') = -1 < 0$, $f_{uu}(t,u,u') = 0 \leqslant 0$. 取$\alpha(t) = 0, \beta(t) = t$. 易知$\alpha(t), \beta(t)$是式(22)的下、上解,至此定理2的所有条件都满足,故可构造不解序列$\{\alpha_n(t)\}$一致收敛于上述方程的正解$u(t)$.

**例 2** $p > 1$时,考虑BVP

$$\begin{cases}\left(\Phi_p(u')\right)' + \frac{8t|u'|}{1+|u'|} - te^{u+1} - 3u - 2 = 0, t \in [0,1]; \\ u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u(\xi_i).\end{cases} \tag{23}$$

其中$0 < a_i, b_i < 1 (i = 1,\cdots,m-2)$,且$0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i, \sum_{i=1}^{m-2} b_i \leqslant 1$.

显然,令$f(t,u,u') = \frac{8t|u'|}{1+|u'|} - te^{u+1} - 3u - 2$在$[0,1] \times \mathbf{R}^2$上连续,且$f_u(t,u,u') = -te^{u+1} - 3 < 0$, $f_{uu}(t,u,u') = -te^{u+1} \leqslant 0$. 取$\alpha(t) = -1, \beta(t) = t$. 易知$\alpha(t), \beta(t)$是式(23)的下、上解,至此定理2的所有条件都满足,故得到不减的序列$\{\alpha_n(t)\}$一致收敛于上述方程的正解$u(t)$.

## 参考文献
## References

[1] 纪德红,田玉,葛渭高. 带p-Laplacian算子多点边值问题正解的存在性[J]. 数学学报:中文版,2009,52(1):1-8
JI Dehong,TIAN Yu,GE Weigao. The existence of postive solution of multi-point boundary value problem with a p-Laplacian operator[J]. Acta Mathematica Sinica:Chinese Series,2009,52(1):1-8

[2] 赵俊芳,王文丽,葛渭高. 具p-Laplacian算子的多点边值问题三个对称正解的存在性[J]. 数学学报:中文版,2009,52(2):259-268
ZHAO Junfang,WANG Wenli,GE Weigao. Three symmetric positive solutions for multi-point boundary value problems with one dimensional p-Laplacian[J]. Acta Mathematica Sinica:Chinese Series,2009,52(2):259-268

[3] BAI Chuanzhi,FAQNG Jinxuan. Existence of multiple positive solutions for nonlinear m-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation,2003,140(2/3):297-305

[4] 孙博,葛渭高. 一类具p-Laplacian算子的多点边值问题单调迭代正解的存在性[J]. 数学的实践与认识,2007,37(23):115-119
SUN Bo,GE Weigao. Existence and successive iteration of positive solutions for multipoint boundary value problems with p-Laplacian[J]. Mathematics in Practice and Theory,2007,37(23):115-119

[5] 马德香,葛渭高. 具p-Laplacian算子的多点边值问题迭代解的存在性[J]. 系统科学与数学,2007,27(5):730-742
MA Dexiang,GE Weigao. The existence of iterative solutions for the one-dimensional p-Laplacian[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science,2007,27(5):730-742

[6] 马德香,葛渭高. 一维p-Laplacian方程多点边值问题迭代解的存在性[J]. 数学学报:中文版,2008,51(3):447-456
MA Dexiang,GE Weigao. Existence and iteration of solutions for a multi-point boundary value problems with p-Laplacian operator[J]. Acta Mathematica Sinica: Chinese Series, 2008, 51(3):447-456

[7] Pei Minghe,Sung Kag Chang. The generalized quasilinearization method for second-order three-point boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis,2008,68(9):2779-2790

[8] Pei Minghe,Sung Kag Chang. A quasilinearization method for second-order four-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation,2008,202(1):54-66

# Existence and quasilinear iteration of positive solutions for second order multi-point boundary value problems with p-Laplacian operator

CANG Yuehua[1] XIAO Jianzhong[1] LIU Qinfeng[1]

1 School of Mathematics and Physics,Nanjing University of Information Science and Technology,Nanjing 210044

**Abstract** In this paper,we construct the auxiliary equation with the method of upper and lower solutions,combined with Leray-Schauder degree theory,to obtain the existence of positive solutions for second order multi-point boundary value problems with p-Laplacian operator,and discuss the convergence of iterative sequence by monotone iterative techniques and the quasilinear method.

**Key words** p-Laplacian equations; quasilinearization; upper and lower solutions; monotone iteration; Leray-Schauder degree