文章编号:1674-7070(2010)05-0477-04

基于有限体积 HWENO 格式的一维溃坝流模拟

翁磊[1]　程国胜[1]　卢长娜[1]

摘要

基于浅水波方程组建立一维溃坝流模型,并给出数值模拟结果.其中,空间离散采用 HWENO(Hermit Weighted Essentially Non-Oscillatory)格式,时间离散采用四步 TVD(Total Variation Diminishing) Runge-Kutta 方法,模拟堤坝溃决时洪水演进过程.模拟结果表明:较采用 WENO 格式所得数值解更精确;同时,相比 WENO 格式的相应算法,该算法解决一维溃坝流问题能更有效地减弱振荡,对间断具有更高的分辨率.

关键词

溃坝流;有限体积法;HWENO 格式

中图分类号 O175.2
文献标志码 A

收稿日期 2010-06-02
资助项目 国家青年基金(40906048)

作者简介

翁磊,男,硕士生,主要研究水动力数值模拟.l_weng@163.com.

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

0 引言
Introduction

拦河筑坝,既可防洪又可用于灌溉、发电,对社会发展起积极作用,但坝体一旦溃决,形成的洪水波会对下游地区造成严重灾害.洪水波的速度影响着下游的预警和紧急疏散时间,决定受灾范围和程度,因此,溃坝流数值模拟具有非常重要的研究意义.

溃坝流常以浅水波方程组作为模型.溃坝流具有间断性,对浅水波方程组离散时,要求数值方法具有稳定、高分辨率、能较好抑制振荡等特性.近年来,用高分辨率数值格式建立一维溃坝流模型已有一些研究.如:Choi 等[1]基于迎风 TVD,迎风 TVB 和 ENO 格式讨论了一维溃坝问题并指出 TVB 格式精度较高,但 CPU 时间消耗较多;Lin 等[2]提出了一种二阶混合 TVD 有限体积格式,由于 TVD 格式本身固有的限制,精度至多只能达到二阶,极值点附近降至一阶[3];鲍远林等[4]基于 Boltzmann 方程,采用有限体积 KFVS 方法,成功模拟了下游为干河道的一维溃坝流;Mambretti 等[5]采用 McCormack-Jameson 激波捕捉法成功建立了一维带污染物两相流溃坝模型;文献[6]应用 WENO 格式模拟了闸门瞬间开启后的水流,水位、流速与解析解拟合较好;文献[7]建立了基于 WENO 格式的浅水间断流数值模型,得到了有五阶精度的一维溃坝模拟算法.文献[8]将一种基于 HWENO(Hermit Weighted Essentially Non-Oscillatory)格式的限制器引入双曲守恒律方程的求解中,HWENO 格式在重构边界点值时,选用 Hermit 插值多项式,其优点是选用较少的模板就能达到较高的精度,同时减少计算量,边界处理也变得简洁.本文将 HWENO 格式应用于一维溃坝流进行数值模拟,所得结果与基于 WENO 格式的数值结果[7]及精确解[9]比较表明,本文建立的溃坝流模型,格式稳定,分辨率高,能更好地处理类似溃坝这类浅水间断流问题.

1 浅水波方程组及时空离散
Shallow water wave equations and space-time discretization

1.1 有限体积法积分方程

在笛卡尔直角坐标系下,一维浅水波方程组守恒形式如下:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}+\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{F}=0. \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{U}$ 是守恒型向量,$\boldsymbol{F}$ 是通量向量,表达式为

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2 h + \dfrac{gh^2}{2} \end{pmatrix}.$$

对计算域进行等步长网格划分,记第 i 个单元 $I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$,单元步长 $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$,单元中点 $x_i = \dfrac{1}{2}\left(x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}} \right)$. 对式(1) 关于 x 求导,得方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{V} + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{G} = 0. \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} h_x \\ (uh)_x \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} (uh)_x \\ \left(u^2 h + \dfrac{gh^2}{2} \right)_x \end{pmatrix}$.

记单元平均值 $\overline{U}_i = \dfrac{1}{\Delta x}\int_{I_i} \boldsymbol{U}(x,t)\,\mathrm{d}x$, $\overline{V}_i = \dfrac{1}{\Delta x}\int_{I_i} \boldsymbol{V}(x,t)\,\mathrm{d}x$. 在单元 I_i 上,对式(1)、(2) 关于 x 在第 i 个单元上积分平均,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overline{U}_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_{i+\frac{1}{2}},t)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_{i-\frac{1}{2}},t)) \right), \\ \dfrac{\mathrm{d}\overline{V}_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x_{i+\frac{1}{2}},t), \boldsymbol{V}(x_{i+\frac{1}{2}},t)) - \right. \\ \qquad \left. \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_{i-\frac{1}{2}},t), \boldsymbol{V}(x_{i-\frac{1}{2}},t)) \right). \end{cases}$$

对通量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ 取近似:

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}(x_{i-\frac{1}{2}},t) \right) \approx \hat{F}\left(U^{\mathrm{l}}_{i-\frac{1}{2}}, U^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}} \right);$$

$$\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{U}(x_{i-\frac{1}{2}},t), \boldsymbol{V}(x_{i-\frac{1}{2}},t) \right) \approx \hat{G}\left(U^{\mathrm{l}}_{i-\frac{1}{2}}, U^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}}; V^{\mathrm{l}}_{i-\frac{1}{2}}, V^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}} \right).$$

其中,$U^{\mathrm{l}}_{i-\frac{1}{2}}$, $U^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}}$ 分别表示 $\boldsymbol{U}$ 在点$(x_{i-\frac{1}{2}},t)$ 的左右函数值;$V^{\mathrm{l}}_{i-\frac{1}{2}}$, $V^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}}$分别表示 $\boldsymbol{V}$ 在点$(x_{i-\frac{1}{2}},t)$ 的左右函数值.

本文采用 Local Lax-Friedrich(LLF)数值通量[8]

$$\boldsymbol{F}(U^{\mathrm{r}}, U^{\mathrm{l}}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}(U^{\mathrm{r}}) + \boldsymbol{F}(U^{\mathrm{l}}) - \alpha(U^{\mathrm{r}} - U^{\mathrm{l}}) \right),$$

$$\boldsymbol{G}(U^{\mathrm{r}}, V^{\mathrm{r}}; U^{\mathrm{l}}, V^{\mathrm{l}}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{G}(U^{\mathrm{r}}, V^{\mathrm{r}}) + \boldsymbol{G}(U^{\mathrm{l}}, V^{\mathrm{l}}) - \alpha(V^{\mathrm{r}} - V^{\mathrm{l}}) \right).$$

其中,α 是 F 的 Jacobian 矩阵线性化替换矩阵的谱半径.

1.2 HWENO 重构

为了得到五阶精度,WENO 格式需要覆盖 5 个单元,而采用 HWENO 格式,只需要 3 个单元,具体重构过程如下:

1.2.1 重构 $U^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}}$

分别在模板 $\{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$, $\{I_{i-1}, I_i\}$, $\{I_i, I_{i+1}\}$ 上构造 Hermite 二次重构多项式 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$. 为了使格式达到五阶,在 $\{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$ 上还需构造一个 Hermite 四次插值多项式 $Q_4(x)$. 重构的多项式分别满足如下条件:

$$\frac{\int_{I_{i-1}} Q_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{U}_{i-1}, \quad j = 1,2,4;$$

$$\frac{\int_{I_{i-1}} Q'_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{V}_{i-1}, \quad j = 2,4;$$

$$\frac{\int_{I_{i+1}} Q_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{U}_{i+1}, \quad j = 1,3,4;$$

$$\frac{\int_{I_{i+1}} Q'_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{V}_{i+1}, \quad j = 3,4;$$

$$\frac{\int_{I_i} Q_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{U}_i, \quad j = 1,2,3,4.$$

计算得 $Q_j(x_{i-\frac{1}{2}})$,$j = 1,2,3,4$ 的表达式:

$$Q_1(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}\overline{U}_{i-1} + \frac{5}{6}\overline{U}_i - \frac{1}{6}\overline{U}_{i+1};$$

$$Q_2(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{5}{6}\overline{U}_{i-1} + \frac{1}{6}\overline{U}_i + \frac{\Delta x_i}{3}\overline{V}_{i-1};$$

$$Q_3(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{13}{6}\overline{U}_i - \frac{7}{6}\overline{U}_{i+1} + \frac{2\Delta x_i}{3}\overline{V}_{i+1};$$

$$Q_4(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{67}{120}\overline{U}_{i-1} + \frac{19}{30}\overline{U}_i - \frac{23}{120}\overline{U}_{i+1} + \frac{7\Delta x_i}{40}\overline{V}_{i-1} + \frac{3\Delta x_i}{40}\overline{V}_{i+1}.$$

由 $Q_4(x_{i-\frac{1}{2}}) = \sum_{j=1}^{3} \gamma_j Q_j(x_{i-\frac{1}{2}})$ 可得线性权:$\gamma_1 = \dfrac{29}{80}$, $\gamma_2 = \dfrac{21}{40}$,$\gamma_3 = \dfrac{9}{80}$. 为减弱振荡,使用非线性权:$\omega_j = \dfrac{\tilde{\omega}_j}{\sum_s \tilde{\omega}_s}$,其中,$\tilde{\omega}_j = \dfrac{\gamma_j}{(\varepsilon + \beta_j)}$,$\beta_j = \sum_k \int_{I_i} \Delta x^{2k-1}\left(\dfrac{\partial^k}{\partial x^k} Q_j(x) \right)^2 \mathrm{d}x$, $j = 1,2,3$. ε 是为了防止分母为零而引入的微小量,本文取 $\varepsilon = 10^{-6}$;β_j称为光滑因子,取值越小,表示相应模板越光滑.

重构后 $U^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}}$ 的表达式是 $U^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{3} \omega_j Q_j(x_{i-\frac{1}{2}})$.

1.2.2 重构 $V^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}}$

分别在模板 $\{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$, $\{I_{i-1}, I_i\}$, $\{I_i, I_{i+1}\}$ 上构造 Hermite 二次重构多项式 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$. 为使格式达到五阶,仍需在 $\{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$ 上构造一个 Hermite 五次插值多项式 $Q_4(x)$. 重构的多项式分别满足如下条件:

$$\frac{\int_{I_{i-1}} Q_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{U}_{i-1},\quad j = 1,2,4;$$

$$\frac{\int_{I_{i-1}} Q'_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{V}_{i-1},\quad j = 1,2,4;$$

$$\frac{\int_{I_{i+1}} Q_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{U}_{i+1},\quad j = 1,3,4;$$

$$\frac{\int_{I_{i+1}} Q'_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{V}_{i+1},\quad j = 1,3,4;$$

$$\frac{\int_{I_i} Q_j(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x_i} = \overline{U}_i,\quad j = 1,2,3,4.$$

计算得 $Q'_j(x_{i-\frac{1}{2}}),j = 1,2,3,4$ 的表达式:

$$Q'_1(x_{i-\frac{1}{2}}) = -\frac{3}{4\Delta x_i}\overline{U}_{i-1} + \frac{1}{\Delta x_i}\overline{U}_i - \frac{1}{4\Delta x_i}\overline{U}_{i+1} + \frac{1}{2}\overline{V}_i;$$

$$Q'_2(x_{i-\frac{1}{2}}) = -\frac{2}{\Delta x_i}\overline{U}_{i-1} + \frac{2}{\Delta x_i}\overline{U}_i - \frac{1}{2}\overline{V}_{i-1} - \frac{1}{2}\overline{V}_i;$$

$$Q'_3(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{4}{\Delta x_i}\overline{U}_i - \frac{4}{\Delta x_i}\overline{U}_{i+1} + \frac{7}{2}\overline{V}_i + \frac{3}{2}\overline{V}_{i+1};$$

$$Q'_4(x_{i-\frac{1}{2}}) = -\frac{21}{12\Delta x_i}\overline{U}_{i-1} + \frac{2}{\Delta x_i}\overline{U}_i - \frac{1}{4\Delta x_i}\overline{U}_{i+1} - \frac{5}{12}\overline{V}_{i-1} - \frac{1}{6}\overline{V}_i + \frac{1}{12}\overline{V}_{i+1}.$$

同上,计算可得线性权:$\gamma'_1 = \frac{1}{9},\gamma'_2 = \frac{5}{6},\gamma'_3 = \frac{1}{18}$. 此处仍然使用非线性权,构造方式与前文类似. 重构后的最终表达式为 $V^{\mathrm{r}}_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{3} j\,\omega'_j Q'_j(x_{i-\frac{1}{2}})$. $U^{\mathrm{l}}_{i-\frac{1}{2}}$, $V^{\mathrm{l}}_{i-\frac{1}{2}}$类似重构可得.

1.3 时间离散

本文采用四步 TVD Runge-Kutta 时间离散格式[7],记: $U^{(1)} = U^n + \frac{\Delta t}{2}L(U^n)$;$U^{(2)} = U^n + \frac{\Delta t}{2}L(U^{(1)})$;$U^{(3)} = U^n + \Delta t L(U^{(2)})$;$U^{n+1} = \frac{1}{3}(U^n + U^{(1)} + 2U^{(2)} + U^{(3)}) + \frac{\Delta t}{6}L(U^{(3)})$. 其中 $L(U)$表示空间离散化算子.

2 数值实验

Numerical test

用 HWENO 格式模拟溃坝流. 在平底光滑矩形断面的明渠上,堤坝溃决,如图 1 所示. 渠长 2 m,堤坝位于原点,初始条件是 $h(x) = \begin{cases} 1\ \mathrm{m}, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 0.1\ \mathrm{m}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ 将计算域$[-1,1]$分成 200 等分,结束时间 0.2 s.

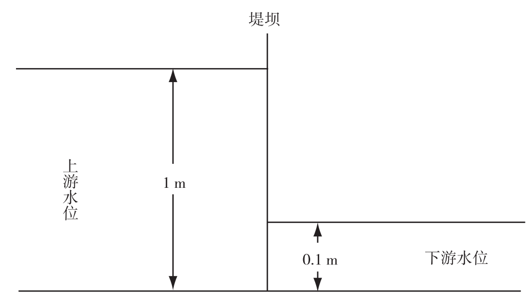

图 1 溃坝示意

Fig. 1 Diagram of dam break

2.1 数值试验方法

本文用 Fortran 语言对模型进行编程实现,具体计算流程如下:

1) 对计算域等步长剖分后,记录单元中点、单元步长等信息;

2) 根据初始状态,给定变量初值,设定计算终止时间 T,时间步长 Δt;

3) 在每个时间步长内,采用 HWENO 格式由 $\overline{U}^n_i$ 重构单元边界点的左右函数值,计算边界点的数值通量,根据四步 Runge-Kutta 时间离散公式计算下一时间点的变量值 $\overline{U}^{n+1}_i$;

4) 令 $t = t + \Delta t$,若 $t < T$,则将 $\overline{U}^{n+1}_i$ 的值赋给 $\overline{U}^n_i$,返回到 3),继续执行程序,若 $t > T$, 则结束循环,输出结果.

2.2 数值结果及分析

大坝溃决后,下游水位陡涨,流速骤增,形成溃坝波,向下游传播. 0.2 s 时水位和流量分布如图 2 和图 3 所示,图中还给出了基于 WENO 格式的数值解[7]及解析解[9]. 图 2、图 3 表明:本文结果较基于 WENO 格式的数值解更好地拟合精确解;本文所用格式较好地抑制了数值耗散,具有高阶、高分辨率.

3 结论

Conclusion

本文基于 HWENO 有限体积格式及四步 TVD Runge-Kutta 法数值离散一维浅水波方程组,建立了一维溃坝流数学模型. 结果表明,该模型能准确捕捉间断,抑制间断处产生的振荡,具有高阶、高分辨率,适合处理类似溃坝流,具有间断特性的浅水流问题.

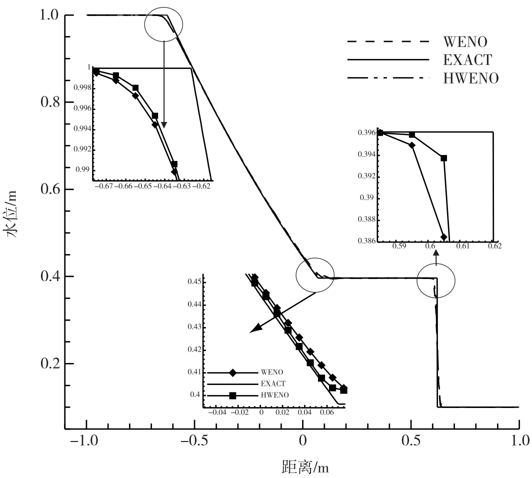

图 2 水位对比

Fig. 2 Comparison of surface levels

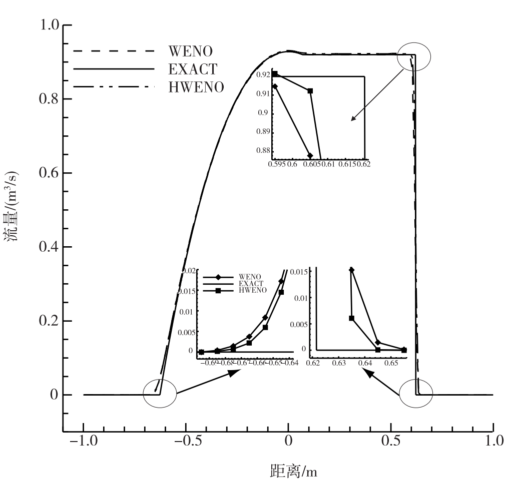

图 3 流量对比

Fig. 3 Comparison of discharges

参考文献
References

[1] Choi S,Paik J. Performance test of high resolution schemes for 1D dam break problem[J]. KSCE Journal of Civil Engineering,2001,5(3):273-280

[2] Lin G F,Lai J S,Guo W D. Performance of high resolution TVD schemes for 1D dam break simulations[J]. Journal of the Chinese Institute of Engineers,2005,28(5):771-782

[3] 刘儒勋,舒其望.计算流体力学的若干新方法[M].北京:科学出版社,2003
LIU Ruxun,SHU Qiwang. Several new methods for computational fluid dynamics[M]. Beijing:Science Press,2003

[4] 鲍远林,周晓阳.移动边界的有限体积 KFVS 方法在一维溃坝波计算中的应用[J].水利学报,2005,36(12):1470-1474
BAO Yuanlin,ZHOU Xiaoyang. Application of kinetic flux-vector splitting method in calculation of 1D dam-break wave[J]. Journal of Hydraulic Engineering,2005,36(12):1470-1474

[5] Mambretti S,Larcan E,Wrachien D D. 1D modelling of dam-break surges with floating debris[J]. Biosystems Engineering,2008,100(2):297-308

[6] 刘玉玲,王玲玲,周孝德,等.闸门瞬间开启水流的 WENO 格式数值计算[J].武汉大学学报:工学版,2009,42(3):281-283
LIU Yuling,WANG Lingling,ZHOU Xiaode,et al. Numerical calculation for 1D flows by rapid opening of a sluice gate with WENO scheme[J]. Engineering Journal of Wuhan University,2009,42(3):281-283

[7] 卢长娜.浅水间断流的高精度 WENO 有限体积数值模型研究[D].南京:河海大学数理学院,2008
LU Changna. Research on high-order WENO finite volume schemes for discontinuous shallow water flow on unstructured meshs[D]. Nanjing:School of Mathematics and Physics,Hohai University,2008

[8] Qiu J X,Shu C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method:One dimensional case[J]. Journal of Computational Physics,2004,193(1):115-135

[9] Stoker J J. Water waves:The mathematical theory with applications[M]. New York:Wiley Inter-Science,1992

Simulation of one-dimensional dam break based on finite volume HWENO scheme

WENG Lei[1] CHENG Guosheng[1] LU Changna[1]

1 School of Mathematics and Physics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract This paper presents a new model of one-dimensional dam break flows based on shallow water equations, in which HWENO scheme is employed for spacial discretization and four steps TVD Runge-Kutta method is used for time discretization. The numerical results demonstrate that they are more accurate than those based on WENO scheme;simultaneously,the program in this paper can weaken oscillation for one-dimensional dam-break flows more effectively,and possesses higher resolution than that of WENO scheme.

Key words dam-break flows;finite volume methods;HWENO scheme