文章编号:1674-7070(2010)05-0392-04

一类非线性时变时滞随机大系统的稳定性

崔红艳[1] 高存臣[1]

摘要

讨论了线性时滞随机系统平凡解的几乎必然渐近稳定性,并推广到非线性多时滞随机大系统的几乎必然渐近稳定性.提出了非线性多时滞随机大系统几乎必然渐近稳定性的代数判据.最后,用仿真例子说明了主要结果的可行性与有效性.

关键词

随机大系统;几乎必然渐近稳定;Lyapunov 函数

中图分类号 TH71;TG803
文献标志码 A

收稿日期 2010-09-01
资助项目 国家自然科学基金(60974025);山东省自然科学重点基金(Z2006G11)

作者简介

崔红艳,女,硕士生,研究方向为控制理论与应用.403160221@163.com

高存臣(通信作者),男,教授,博士生导师,研究方向为控制理论与应用,海洋控制技术.ccgao@ouc.edu.cn

1 中国海洋大学 数学科学学院,青岛,266100

0 引言
Introduction

自然界中的现象、实际工程技术和社会经济中许多问题存在随机时间滞后(简称时滞)现象,如测定地球上的点 A 与土星的点 B 的距离随时间的变化情况,由于光速的问题,得到的距离读数是 2.308 $(2\times125\ 000\div30\div3\ 600)$ h 前的距离,而且测量点具有随机性.所以其动态规律存在随机时滞,表现在数学模型上就是一个时滞随机系统或时滞随机大系统,这就需要人们对时滞随机大系统进行研究.与确定性系统的稳定性研究相比,随机系统的稳定性理论还远未完善,特别是关于非线性多时滞的稳定性的研究文献很少[1-8].本文将讨论非线性多时滞随机系统的渐近行为,将 Lassel(拉萨尔)不变原理应用到随机大系统中[9],给出非线性多时滞随机大系统的几乎必然渐近稳定的代数判据.

1 预备知识及问题描述
Preliminaries and problem formulation

考虑如下随机微分方程[3]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=f(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}t+g(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t),t\geqslant0.\quad(1)$$

其初始条件为 $\{\boldsymbol{x}(\alpha)=\boldsymbol{\xi}\ \big|\ \boldsymbol{\xi}\in\mathbf{C}^b_{F_0}([-\tau,0];\mathbf{R}^n),-\tau\leqslant\alpha\leqslant0,\tau=\mathrm{const}>0\}$, $\mathbf{C}^b_{F_0}$ 表示连续映射 f,g 的全体,其中 $f:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $g:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}$ 均为连续映射,且假设关于 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件,以保证式(1)的解在给定的区域上存在唯一解, $\boldsymbol{w}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^m$ 是系统的外力项.

定义 1[6] 随机系统的平凡解 $\boldsymbol{x}=0$ 称为是几乎必然渐近稳定的,如果

$$p\left\{\lim_{|x_0|\to0,\ t\geqslant0}\sup|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|=0\right\}=1,$$

且存在正数 $\delta>0$,使得当 $|\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 时,对于任意 $\varepsilon>0$,成立

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}p\left\{\sup_{t\geqslant T}|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|>\varepsilon\right\}=0.$$

引理 1[2] 若存在函数

$V(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^+)$, $\eta\in L^1(\boldsymbol{R}^+;\mathbf{R}^+)$ 及 $\phi_1,\phi_2\in(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^+)$,使得任意 $(t,\boldsymbol{x},y)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$,有

$$LV(t,\boldsymbol{x},y) \leqslant \eta(t) - \phi_1(t,\boldsymbol{x}) + \phi_2(t,y),$$
$$\phi_1(t,\boldsymbol{x}) \geqslant \phi_2(t+\tau,\boldsymbol{x}),$$

且 $\lim\limits_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}[\inf\limits_{t\geqslant 0}V(t,\boldsymbol{x})] = +\infty$,则对任意 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{C}_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,若存在 $p>2$,使得 $\sup\limits_{-\tau\leqslant t<\infty} E|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})|^p < +\infty$,则式(1)的解满足 $\lim\limits_{t\to\infty} d(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\xi}),D_\phi) = 0$ 几乎必然成立,其中 $D_\phi = \{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \phi(t,\boldsymbol{x}) = \phi_1(t,\boldsymbol{x}) = \phi_2(t+\tau,\boldsymbol{x}) = 0\}$.

现考虑下面的时滞线性随机系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}_j\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{W}_j(t). \quad (2)$$

其中,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}_j,\boldsymbol{D}_j \in \mathbf{R}^{n\times n}$,$j=1,2,\cdots,m$. 时变时滞 $\tau(t)>0$ 为可导函数,且满足 $\dot{\tau}(t)<1$.

引理 2[1] 若存在 $V\in\mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^+)$ 及 3 个正数 $k_1,k_2,\lambda_1>\lambda_2,\lambda_2\in\mathbf{R}$,使任意 $(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n$,有 $k_1|\boldsymbol{x}|^2 \leqslant V(t,\boldsymbol{x}) \leqslant k_2|\boldsymbol{x}|^2$,$LV(t,\boldsymbol{x},y) \leqslant -\lambda_1|\boldsymbol{x}|^2 + \lambda_2|y|^2$,则对任意 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{C}_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,方程(2)的解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ 是几乎必然渐近稳定的.

2 主要结果
Main results

考虑下面的非线性多时变时滞随机大系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i(t) = (\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}_i(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{r_i}(\boldsymbol{C}_{ij}\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{x}_i(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{W}_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} f_{ik}(\boldsymbol{x}_k(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t,$$
$$i = 1,2,\cdots,N. \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$,$\boldsymbol{C}_{ij},\boldsymbol{D}_{ij}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$,$f_{ik}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_k}$. 时变时滞 $\tau_i(t)>0$ 为可导函数,且满足 $\dot{\tau}_i(t)<1$,且 f_{ik} 满足适当的条件,以保证其解过程几乎必然地存在唯一.

随机大系统(3)可以看作下面 N 个孤立子系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i(t) = (\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}_i(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{r_i}(\boldsymbol{C}_{ij}\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{x}_i(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{W}_{ij}(t),$$
$$i = 1,2,\cdots,N \quad (4)$$

通过非线性互联项 $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} f_{ik}(\boldsymbol{x}_k(t-\tau_{ik}))\mathrm{d}t$ 互联的一个非线性互联大系统.

定理 1 对时滞非线性随机大系统(3),若存在正数 a_i,d_i 和正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$,$i=1,2,\cdots,N$ 满足

1) $-\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i + d_i\boldsymbol{I}_i + \sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{C}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{C}_{ij}$, $i = 1,2,\cdots,N$,$\boldsymbol{I}_i$ 为单位矩阵;

2) $\lambda_{i1} = \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_i) > \lambda_{i2} = \lambda_{\max}\left(\dfrac{1}{d_i}\boldsymbol{N}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i + \sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{D}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{D}_{ij}\right)$,

其中 $\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{B}_i - \sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{C}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{D}_{ij}$,$i = 1,2,\cdots,N$;

3) $a_0 > \sum\limits_{i=1}^{N} a_i$,其中 $f_{ii} = 0$,$a_0 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\left\{\dfrac{\lambda_{i1}a_i}{2}\right\}$,

$$a_i = a_i\max\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\{\frac{2(N-1)\|\boldsymbol{Q}_if_{ik}\|^2}{\lambda_{i1}}\right\},\lambda_{i2},k\neq i\right\},$$

$i = 1,2,\cdots,N$.

则非线性多时滞随机大系统(3)的平凡解几乎渐近稳定.

证明 对每个孤立系统(4)构造如下的 Lyapunov 函数

$$V_i(t,\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}_i,\quad i = 1,2,\cdots,N. \quad (5)$$

其中,$\boldsymbol{x}_i(t)\in\mathbf{R}^{n_i}$,正定矩阵 $\boldsymbol{Q}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$,$i=1,2,\cdots,N$. 对 V_i,显然有

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}_i)|\boldsymbol{x}_i|^2 \leqslant V_i(t,\boldsymbol{x}_i) \leqslant \lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_i)|\boldsymbol{x}_i|^2,$$
$$i=1,2,\cdots,N. \quad (6)$$

记 L_i 为孤立子系统的微分算子,则由条件 1)和 2)易证

$$L_iV_i(t,\boldsymbol{x}_i) \leqslant -\lambda_{i1}|\boldsymbol{x}_i|^2 + \lambda_{i2}|y_i|^2.$$

由引理 2 知 N 个孤立子系统的平衡点 $\boldsymbol{x}_i=0$ 是几乎必然渐近稳定.

对整个多时滞线性随机系统,选取 Lyapunov 函数为

$$V(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_iV_i(t,\boldsymbol{x}_i).$$

式中,$a_i>0$,V_i 由式(5)确定. 由式(6)可得

$$k_1|\boldsymbol{x}|^2 \leqslant V(t,\boldsymbol{x}) \leqslant k_2|\boldsymbol{x}|^2.$$

式中 $k_1 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{a_i\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}_i)\}$,$k_2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{a_i\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_i)\}$. 记 L 为非线性多时滞随机大系统的微分算子,则

$$LV(t,\boldsymbol{x},y) = \sum_{i=1}^{N} a_i\left(V_i(t,\boldsymbol{x},y_i) + \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}2\boldsymbol{Q}_if_{ik}y_k\right) \leqslant -a_0|\boldsymbol{x}|^2 + \sum_{i=1}^{N} a_i|y|.$$

式中,$a_0,a_i(i=1,2,\cdots,N)$ 由条件 3)给出.

所以由条件 3)及引理 2 知非线性多时滞随机大系统(3)的平凡解几乎必然渐近稳定.

3 数值例子
Numerical example

为说明非线性多时滞随机大系统(3)的平凡解几乎必然渐近稳定性，通过如下的例子说明本文主要结果的可行性与有效性.

例 考虑系统(3)，其中，$i=1,2$.

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}-0.45&0\\0&-0.4\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{D}_{11},\boldsymbol{D}_{12}$为零矩阵；

$$\boldsymbol{C}_{11}=\begin{pmatrix}0.01&0\\0&0\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{C}_{12}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0.01\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-4&2&0.01\\2&-5&0\\0.001&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}-0.35&0&0\\0&-0.25&0\\0&0&0.1\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{D}_{21},\boldsymbol{D}_{22},\boldsymbol{D}_{23}$为零矩阵；

$$\boldsymbol{C}_{21}=\begin{pmatrix}-0.01&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0.015&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0.018\end{pmatrix};$$

互联矩阵

$$\boldsymbol{f}_{12}=\begin{pmatrix}0.1&-0.3&0.1\\-0.2&0.1&-0.3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_{21}=\begin{pmatrix}-0.05&0\\0&-0.3\\-0.2&-0.3\end{pmatrix};$$

取 $d_1=d_2=\boldsymbol{I},\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{I}$(二阶单位矩阵)，$\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{I}$(三阶单位矩阵)，$\tau(t)=0.002$.

经计算可得

1) $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}4.9999&-4.0000\\-4.0000&6.9999\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}6.9999&-4.0000&-0.0110\\-4.0000&8.9998&0\\-0.0110&0&0.9997\end{pmatrix};$$

2) $\lambda_{11}=1.8768,\lambda_{12}=0.2025,\lambda_{21}=0.9996,\lambda_{22}=0.1225$;

3) $a_0=0.4998,a_1=0.2025,a_2=0.2026$.

显然满足定理1中的所有的条件，所以大系统(3)的平凡解是几乎必然渐近稳定的.

4 结论
Conclusion

本文讨论了线性时滞随机系统平凡解的几乎必然渐近稳定性，并推广到了非线性多时滞随机大系统的几乎必然渐近稳定性；提出了非线性多时滞随机大系统几乎必然渐近稳定性的代数判据；最后，用仿真例子说明了本文主要结果的可行性与有效性.

参考文献
References

[1] Hale J K. Theory of functional differential equation [M]. New York: Springer-Verlag, 1987

[2] 江明辉，蹇继贵，张明望. 时滞中立型线性随机大系统的渐近稳定性[J]. 三峡大学学报, 2005, 27(2): 158-151
JIANG Minghui, JIAN Jigui, ZHANG Mingwang. Asymptotic stability of neutral linear stochastic large-scale system with time-delay [J]. Journal of China Three Gorges University, 2005, 27(2): 158-151

[3] Mao X R. Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations[J]. Stochastics, 2000, 68(3/4): 273-295

[4] 邓飞其，冯昭枢，刘永清. 时滞线性随机系统的均方稳定性与反馈镇定[J]. 控制理论与应用, 1996, 13(4): 441-447
DENG Feiqi, FENG Zhaoshu, LIU Yongqing. Mean-square system and feedback stabilization of linear delay stochastic systems [J]. Control Theory & Applications, 1996, 13(4): 441-447

[5] Fu Y S, Tian Z H, Shi S J. State feedback stabilization for a class of stochastic time-delay nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(2): 282-286

[6] 刘永清，唐功友. 大型动力系统的理论与应用[M]. 广州：华南理工大学出版社, 1992
LIU Yongqing, TANG Gongyou. Theory and application of large-scale dynamic systems[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1992

[7] Tai Z X, Wang X C. Lie algebraic criteria for stability of linear neutral systems with multiple delays [J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(21): 30-32

[8] 巫宇霞，陈东彦，张军安. 具有控制约束的连续线性系统的渐近稳定性[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2007, 12(4): 113-116
WU Yuxia, CHEN Dongyan, ZHANG Junan. On asymptotic stability of continuous linear system with control constrain [J]. Journal Harbin University of Science and Techenology, 2007, 12(4): 113-116

[9] 孙卫东，高存臣，考永贵. 自治系统渐近稳定的等价条件和新的充分条件[J]. 中国海洋大学学报, 2006, 36(5): 723-725
SUN Weidong, GAO Cunchen, KAO Yonggui. Equivalent condition and new sufficient conditions for asymptotic stability of autonomous system[J]. Periodical of Ocean University of China, 2006, 36(5): 723-725

Stability of a class of nonlinear stochastic large-scale system with time-varying delays

CUI Hongyan[1] GAO Cunchen[1]

1 School of Mathematical Sciences，Ocean University of China，Qingdao 266100

Abstract Almost surely asymptotic stability of the trivial solution of linear stochastic system with time-varying delays is discussed，and is extended to the nonlinear stochastic large-scale system with time-varying delays. Then，an algebraic criterion of the almost surely asymptotic stability is established for the nonlinear stochastic large-scale system with time-varying delays. The feasibility and effectiveness of the main results are illustrated in this paper by a numerical example.

Key words stochastic large-scale system；almost surely asymptotic stability；Lyapunov function