文章编号:1674-7070(2010)04-0294-03

索赔计数相依风险模型

张小博[1,2]　王志明[1,2]

摘要

考虑了一类索赔计数相依的风险模型,该模型假设每次主索赔可随机产生一副索赔,得到了该风险模型生存概率所满足的微积分方程,并在索赔额为指数分布的情形下,给出了生存概率的精确表达式.

关键词

风险模型;生存概率;索赔计数相依

中图分类号 O211.6

文献标志码 A

0　引言
Introduction

风险理论中通常用经典风险模型来描述保险公司的盈余过程[1],大部分风险模型都建立在索赔计数过程与索赔额以及索赔额本身相互独立的情况下.随着保险理论的发展,人们开始研究索赔额或索赔计数过程相关情况下的风险模型,即将经典风险模型推广至相依风险模型.Dang 等[2]对一类索赔计数相依的二维风险模型进行了分析,得到了生存概率的偏微分方程并用递归方法求解.Yuen 等[3]研究了一类索赔额独立索赔计数相关的二项风险模型.张冕等[4]将主副索赔相依的离散时间的风险模型推广到连续时间情形.

本文考虑这样一种相依风险模型,这类模型包含了两种索赔,其中一类索赔称为主索赔,另一类为每次主索赔发生时随机产生的一副索赔.上述模型在实际中有应用背景,例如某保险购买人同时购买了人身保险和车险,在一次交通事故中,车险的索赔有可能引发人身险的理赔.本文研究了相应模型的生存概率的微积分方程并得到了索赔额服从指数分布时的生存概率的精确表达式.

1　模型的建立
Model establishment

考虑一类风险模型,包含了两种索赔:主索赔和它引起的副索赔.设相互独立同分布的随机变量序列$\{X_i;i\geqslant 1\}$表示主索赔,X_i表示第 i 次索赔额,其均值和分布函数分别为μ_X和 $F(\cdot)$;副索赔用均值和分布函数分别为μ_Y和 $G(\cdot)$的非负独立同分布随机变量序列$\{Y_i;i\geqslant 1\}$来表示,该风险模型的赢余过程为

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i-\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i. \tag{1}$$

其中:$u>0$ 为保险公司的初始资本;$c>0$ 为保险公司保费收入率;$N(t)$ 表示$(0,t]$时间段内发生的主索赔次数;$M(t)$ 表示$(0,t]$时间段内发生的副索赔次数,$N(t)$,$M(t)$ 为相依的.假定 $N(t)=K_1(t)+K(t)$,$M(t)=K(t)$,$K_1(t)$ 和$K(t)$ 分别为参数为λ_1,λ 的齐次 Possion 过程,且$\{X_i;i\geqslant 1\}$,$\{Y_i;i\geqslant 1\}$,$K_1(t)$,$K(t)$ 相互独立.

为保证保险公司运行上的安全,本文假定 $(\lambda_1+\lambda)\mu_X+\lambda\mu_Y<c$.

令 $\Psi(u)$ 表示初始赢余为 u 时保险公司的最终破产概率,即

收稿日期 2010-06-18

资助项目 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室(武汉科技大学)开放基金(C201006);湖北省教育厅项目(B20091107)

作者简介

张小博,女,硕士生,研究方向为数理金融.xxdzmm@126.com

1　冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室(武汉科技大学),武汉,430065

2　武汉科技大学 理学院,武汉,430065

$\Psi(u) = P(\exists t > 0, U(t) < 0 \mid U(0) = u)$,则生存概率为 $\Phi(u)$,且 $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$.

2 主要结果
Main results

定理1 假定 $u > 0$,且 $\Phi(u)$ 有连续的导数,则 $\Phi(u)$ 满足如下微积分方程

$$c\Phi'(u) = (\lambda_1 + \lambda)\Phi(u) - \lambda_1\int_0^u \Phi(u-x)\mathrm{d}F(x) - \lambda\int_0^u \Phi(u-x)\mathrm{d}F\times G(x). \tag{2}$$

证明 上述模型在任何索赔时刻有两种索赔情况,只发生主索赔或主索赔和副索赔同时发生,则此模型在无穷小事件区间 $(0,\Delta]$ 内可能情况如下:1)$(0,\Delta]$ 内无索赔发生;2)$(0,\Delta]$ 内只有一次索赔;3)$(0,\Delta]$ 内有两次索赔;4)$(0,\Delta]$ 内有两次以上索赔.

显而易见第4种情况发生的概率为 $o(\Delta)$,则由全概率公式可得

$$\Phi(u) = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda)\Delta}\Phi(u+c\Delta) + \lambda_1\Delta\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda)\Delta}\int_0^{u+c\Delta}\Phi(u+c\Delta-x)\mathrm{d}F(x) + \lambda\Delta\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda)\Delta}\int_0^{u+c\Delta}\Phi(u+c\Delta-x)\mathrm{d}F\times G(x) + o(\Delta). \tag{3}$$

根据泰勒展式

$$\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda)\Delta}\Phi(u+c\Delta) = \big(1-(\lambda_1+\lambda)\Delta+o(\Delta)\big)\big(\Phi(u)+\Phi'(u)c\Delta+o(\Delta)\big), \tag{4}$$

将式(3)代入式(2)中再两边除以 Δ 并令 $\Delta\to 0$ 可得式(2)成立.

在索赔额服从指数分布情形时,有如下结果.

定理2 假定 $u > 0$,$\Phi(u)$ 有连续的导数,若索赔额均服从参数为 μ 的指数分布,则

$$\Phi(u) = c_1 + c_2\exp\{z_2 u\} + c_3\exp\{z_3 u\},$$

$$z_2 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2\mu c},\quad z_3 = \frac{\omega_1-\omega_2}{2\mu c}.$$

其中,$\omega_1 = \mu\lambda_1 + \mu\lambda - 2c$,

$$\omega_2 = [(\mu\lambda_1+\mu\lambda-2c)^2 + 4c(\mu\lambda_1+\mu\lambda-c)]^{\frac{1}{2}}.$$

证明 假定 $F(x)$ 和 $G(y)$ 均为参数为 μ 的指数分布,则 $F\times G(x)$ 服从 Erlang(2) 分布,密度函数为 $\mu^{-2}x\exp\{-\mu^{-1}x\}$. 则式(2)变为

$$c\Phi'(u) = (\lambda_1+\lambda)\Phi(u) - \lambda_1\int_0^u\Phi(u-x)\mu^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}}\mathrm{d}x - \lambda\int_0^u\Phi(u-x)\mu^{-2}x\exp\{-\mu^{-1}x\}\mathrm{d}x,$$

即

$$c\Phi'(u) = (\lambda_1+\lambda)\Phi(u) - \lambda_1\mu^{-1}\int_0^u\Phi(x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x - \lambda\mu^{-2}\int_0^u\Phi(x)(u-x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x. \tag{5}$$

对式(5)关于 u 求导得

$$c\Phi^{(2)}(u) = (\lambda_1+\lambda)\Phi'(u) - \lambda_1\mu^{-1}\Phi(u) + \lambda_1\mu^{-2}\int_0^u\Phi(x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x - \lambda\mu^{-2}\int_0^u\Phi(x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x + \lambda\mu^{-3}\int_0^u\Phi(x)(u-x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x,$$

$$c\Phi^{(2)}(u) = (\lambda_1+\lambda)\Phi'(u) - \lambda_1\mu^{-1}\Phi(u) + \lambda_1\mu^{-2}\Big\{\frac{\mu}{\lambda_1}[(\lambda_1+\lambda)\Phi(u) - c\Phi'(u) - \lambda\mu^{-2}\int_0^u\Phi(x)(u-x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x]\Big\} - \lambda\mu^{-2}\int_0^u\Phi(x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x + \lambda\mu^{-3}\int_0^u\Phi(x)(u-x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x.$$

则

$$c\Phi^{(2)}(u) = (\lambda_1+\lambda-c/\mu)\Phi'(u) + \lambda\mu^{-1}\Phi(u) - \lambda\mu^{-2}\int_0^u\Phi(x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x,$$

$$c\Phi^{(3)}(u) = (\lambda_1+\lambda-c/\mu)\Phi^{(2)}(u) + \frac{\lambda}{\mu}\Phi'(u) - \frac{\lambda}{\mu^2}\Phi(u) + \frac{\lambda}{\mu^3}\int_0^u\Phi(x)\exp\{-\mu^{-1}(u-x)\}\mathrm{d}x.$$

于是

$$c\Phi^3(u) + \frac{c}{\mu}\Phi^{(2)}(u) = (\lambda_1+\lambda-c/\mu)\Phi^{(2)}(u) + \frac{\lambda}{\mu}\Phi'(u) - \frac{\lambda}{\mu^2}\Phi(u) + \big((\lambda_1+\lambda)/\mu - c/\mu^2\big)\Phi'(u) + \frac{\lambda}{\mu^2}\Phi(u).$$

即

$$c\Phi^3(u) = \Big(\lambda_1+\lambda-\frac{2c}{\mu}\Big)\Phi^{(2)}(u) + \Big(\frac{\lambda_1+2\lambda}{\mu} - \frac{c}{\mu^2}\Big)\Phi'(u).$$

它的特征方程为

$$cz^3 - \Big(\lambda_1+\lambda-\frac{2c}{\mu}\Big)z^2 - \Big(\frac{\lambda_1+2\lambda}{\mu} - \frac{c}{\mu^2}\Big)z = 0.$$

解得 $z_1 = 0$,$\quad z_2 = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2\mu c}$,$\quad z_3 = \dfrac{\omega_1-\omega_2}{2\mu c}$.

即得定理的结论成立.

3 模型讨论
Discussion of the model

在保险业务中,一次意外的灾难引发的索赔可视为主索赔,当主索赔较大时,就可能产生与之相关的副索赔灾难,而同时副索赔的灾难也可能会推迟发生.因此本文所研究的相依风险模型中主副索赔的计数相依关系也可以这样建立,假定在每次发生主索赔后,将每次的索赔额与一阀值 M 进行比较,当索赔额大于或等于 M 的取值时,将引起一次副索赔,副索赔以概率 p 与跟它相联系的主索赔同时发生,而以概率 $1-p$ 就在紧接着的下一次主索赔发生时发生.此时风险模型式(1)中 $N(t)$ 为参数 $\lambda>0$ 的齐次 Possion 过程,同样 $\{X_i;i\geqslant 1\}$, $\{Y_i;i\geqslant 1\}$, $N(t)$ 相互独立,且为保证保险公司运行上的安全,有 $\lambda\mu_X+\lambda\bar{F}(M)\mu_Y<c$,其中 $F(M)=P(X<M)$, $\bar{F}(M)=1-F(M)$,其余定义不变.

则此时讨论的相依风险模型在任何索赔时刻可能有 3 种索赔:主索赔、当前主索赔引起的副索赔、有先前发生的主索赔引起的副索赔.为了处理问题的方便,将第一次主索赔额由 X_1 变为 X_1+Y, Y 为副索赔随机变量,其余假设条件不变,并定义改动后的辅助风险模型生存概率为 $\Phi_1(u)$,考虑在 $(0,\Delta]$ 内可能情况

$$\Phi(u)=(1-\lambda\Delta)\Phi(u+c\Delta)+\lambda\Delta(1-\bar{F}(M))\int_0^{u+c\Delta}\Phi(u+c\Delta-y)\mathrm{d}F(y)+\lambda\Delta\bar{F}(M)p\int_0^{u+c\Delta}\Phi(u+c\Delta-y)\mathrm{d}F\times G(y)+\lambda\Delta\bar{F}(M)(1-p)\int_0^{u+c\Delta}\Phi_1(u+c\Delta-y)\mathrm{d}F(y)+o(\Delta),$$

可得

$$\Phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\frac{\lambda}{c}(1-\bar{F}(M))\int_0^u\Phi(u-y)\mathrm{d}F(y)-\frac{\lambda}{c}\bar{F}(M)p\int_0^u\Phi(u-y)\mathrm{d}F\times G(y)-\frac{\lambda}{c}\bar{F}(M)(1-p)\int_0^u\Phi_1(u-y)\mathrm{d}F(y).$$

同理可得辅助风险模型生存概率 $\Phi_1(u)$ 满足

$$\Phi_1{}'(u)=\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\frac{\lambda}{c}\left(1-\bar{F}(M)\right)\int_0^u\Phi(u-y)\mathrm{d}F\times G(y)-\frac{\lambda}{c}\bar{F}(M)p\int_0^u\Phi(u-y)\mathrm{d}F\times G\times G(y)-\frac{\lambda}{c}\bar{F}(M)(1-p)\int_0^u\Phi_1(u-y)\mathrm{d}F\times G(y).$$

如此得到生存概率的微积分方程,再运用 Laplace 变换可得到本文所讨论的风险模型当索赔额服从轻尾分布时的最终破产概率[4].

参考文献
References

[1] Grandell J. Aspects of risk theory[M]. New York:Springer-Verlag,1991
[2] Dang L F, Ning Z, Zhang H M. Survival probability for a two-dimensional risk model[J]. Insurance:Mathematics and Economics, 2009,44(3):491-496
[3] Yuen K C, Guo J Y, Wu X Y. On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2002,31(2):205-214
[4] 张冕,高珊. 一类索赔相依二元风险模型的破产概率问题研究[J]. 经济数学,2008,25(2):132-135
ZHANG Mian, GAO Shan. Ruin problem with time-correlated claims[J]. Mathematics in Econonics,2008,25(2):132-135
[5] 刘东海,彭丹,刘再明. 相依索赔的二项风险模型的破产问题[J]. 高校应用数学学报:A 辑,2009,24(3):259-265
LIU Donghai, PENG Dan, LIU Zaiming. Ruin problem for correlated claim binomial risk model[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities:Ser A,2009,24(3):259-265

Study on the model of a count-correlated claims risk model

ZHANG Xiaobo[1,2] WANG Zhiming[1,2]
1 Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process
Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065
2 College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065

Abstract In this paper we consider a risk model with count-correlated claims. It is assumed that every main claim produce a by-claim. A integro-differential equation for the survival probability is derived, and explicit expressions for the survival probability are given in the case of exponential claims.

Key words risk model; survival probability; count-correlated claim