文章编号:1674-7070(2010)04-0289-05

广义可逆环的性质

王尧[1]　王永慧[1,2]

摘要

引进了广义可逆环和拟 ZI_n 环的概念,并研究了它们的若干性质.证明了对于 Armendariz 环 R,R 是广义可逆环当且仅当 $R[x]$ 是广义可逆环;广义可逆环是2-素环,拟 ZI_n 环在满足一定条件时是2-素环.

关键词

广义可逆环;半交换环;2-素环;拟 ZI_n 环

中图分类号 O153.3
文献标志码 A

0 引言

Introduction

称环 R 为半交换环,如果对任意的 $a,b\in R$,若 $ab=0$,则 $aRb=0$. 称环 R 为可逆环,如果对任意的 $a,b\in R$,若 $ab=0$,则 $ba=0$[1]. 文献[1-3]研究了半交换环的一些性质,文献[4]对半交换环进行推广,并给出了弱半交换环的定义. 称环 R 是弱半交换环,如果对任意的 $a,b\in R$,当 $ab=0$ 时,有 $aRb\subseteq N(R)$. 文献[5]研究了可逆环的若干性质,文献[6]提出了 α-可逆环和弱 α-可逆环的概念. 称环 R 为 α-可逆环,如果对任意的 $a,b\in R$,若 $ab=0$,则 $b\alpha(a)=0$. 称环 R 为弱 α-可逆环,如果对任意的 $a,b\in R$,若 ab 是 R 的幂零元,则 $b\alpha(a)$ 也是 R 的幂零元,这里 α 是环 R 的自同态. 文献[5]证明了可逆环为半交换环,并指出半交换环不一定是可逆环. 文献[7]继续对可逆环进行研究,提出了强可逆环的概念. 称环 R 为强可逆环,若对任意的 $f(x)$,$g(x)\in R[x]$,当 $f(x)g(x)=0$ 时,有 $g(x)f(x)=0$. 文献[8]提出了弱可逆环的概念,可以证明弱可逆环和弱半交换环是等价概念.

综上所述,已有许多作者围绕半交换环和可逆环做了研究. 本文将进一步研究关于环的元素可交换的性质,定义广义可逆环的概念. 称环 R 为广义可逆环,如果对任意的 $a,b\in R$,若 $ab=0$,则 $bRa=0$. 文中 $N_2(R)=\{r\in R\mid r^2=0\}$,$l_R(a)$,$r_R(a)$ 分别表示 a 的左零化子和右零化子,$N(R)$ 表示 R 中的幂零元集合,$P(R)$ 表示 R 的素根.

1 主要结果

Main results

定义1 称环 R 为广义可逆环,如果对任意的 $a,b\in R$,若 $ab=0$,则 $bRa=0$.

命题1 若环 R 为可逆环,则 R 为广义可逆环.

证明 设对任意的 $a,b\in R$,若 $ab=0$,由于 R 是可逆环,所以 $ba=0$,文献[5]证明了可逆环为半交换环,所以 $bRa=0$,R 为广义可逆环.

据文献[5],称环 R 为约化环,如果 R 中没有非零幂零元.

命题2 约化环为广义可逆环.

证明 设 R 为约化环,如果 $ab=0$,$a,b\in R$,则对任意的 $r\in R$,$(bra)^2=(bra)(bra)=br(ab)ra=0$. 由于 R 为约化环,所以 $bra=0$,由 r 的任意性可得 $bRa=0$,R 为广义可逆环.

收稿日期 2010-06-09
资助项目 国家自然科学基金(10471055);江苏省"333高层次人才培养工程"科研基金

作者简介

王尧,男,博士,教授,研究方向为环论,代数表示论,计算代数. wangyao@nuist.edu.cn

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044
2 辽宁师范大学 数学学院,大连,116029

定理 1 下列命题等价:

1) R 是广义可逆环;

2) $\Delta^{-1}R$ 是广义可逆环, Δ 是由 R 的中心正则元构成的乘法封闭集.

证明 1)⇒2). 任取 $\alpha,\beta \in \Delta^{-1}R$, $\alpha = u^{-1}a$, $\beta = v^{-1}b$, $u,v \in \Delta$, $a,b \in R$, 若 $\alpha\beta = 0$, 有 $u^{-1}av^{-1}b = (u^{-1}v^{-1})ab = 0$, 于是 $ab = 0$. 因为 R 是广义可逆环, 所以对任意的 $r \in R$, $bra = 0$. 这时对任意的 $\gamma = w^{-1}c \in \Delta^{-1}R$, $w \in \Delta$, $c \in R$, 有 $\beta\gamma\alpha = (v^{-1}b)(w^{-1}c)(u^{-1}a) = (v^{-1}w^{-1}u^{-1})(bca) = 0$, 因此 $\Delta^{-1}R$ 是广义可逆环.

2)⇒1). 显然.

容易证明:

命题 3 广义可逆环的子环和直积是广义可逆环.

称环 R 是 ZC_3 环, 对任意的 $a,b,c \in R$, 若 $abc = 0$, 则 $bca = cab = 0$[3].

命题 4 ZC_3 环是广义可逆环.

证明 设 R 是 ZC_3 环, 如果 $ab = 0$, $a,b \in R$, 则对任意的 $r \in R$, $abr = 0$, 所以 $bra = 0$, 环 R 为广义可逆环.

定理 2 下列命题等价:

1) R 是广义可逆环;

2) $r_R(a) \subseteq l_R(Ra)$, $l_R(b) \subseteq r_R(bR)$;

3) $AB = 0$, $A \subseteq R$, $B \subseteq R \Rightarrow BRA = 0$.

证明 1)⇒2). 任取 $m \in r_R(a) = \{x \in R \mid ax = 0\}$, 有 $am = 0$, 由 R 是广义可逆环, 有 $mRa = 0$, 所以 $m \in l_R(Ra)$, $r_R(a) \subseteq l_R(Ra)$. 同理可证 $l_R(b) \subseteq r_R(bR)$.

2)⇒1) 和 3)⇒1) 是显然的.

1)⇒3). $BRA = \sum\limits_{有限个} b_i r_i a_i$, 因为对任意的 $a \in A$, $b \in B$, 如果 $ab = 0$, 则 $bra = 0$, $r \in R$, 所以 $BRA = 0$.

据文献[1], 称环 R 为 Armendariz 环, 如果对任意两个多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R$, 若 $f(x)g(x) = 0$, 则 $a_ib_j = 0$, $i = 1,\cdots,m$, $j = 1,\cdots,n$.

定理 3 对于 Armendariz 环 R, 下列命题等价:

1) R 是广义可逆环;

2) $R[x]$ 是广义可逆环.

证明 1)⇒2). 若 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_ix^i$, $g(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_jx^j \in R[x]$, 且 $f(x)g(x) = 0$, 由于 R 是 Armendariz 环, 所以 $a_ib_j = 0$, 又因为 R 为广义可逆环, 故对任意的 $r \in R$, $b_jra_i = 0$, 于是对任意的 $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{t} c_kx^k$, $g(x)y(x)f(x) = 0$, $R[x]$ 是广义可逆环.

2)⇒1). 若 $ab = 0$, $a,b \in R$, 不妨设 $f(x) = ax$, $g(x) = bx$, $f(x)g(x) = 0$, 对任意的 $y(x) = rx$, $r \in R$, 由于 $R[x]$ 是广义可逆环, 所以 $g(x)y(x)f(x) = 0$, 由 R 的 Armendariz 性和 r 的任意性知 $bra = 0$, 环 R 为广义可逆环.

给定一个环 R 和一个 (R,R) 双模 V, $S = \{(r,x) \mid r \in R, x \in V\}$ 按照对应分量相加和如下定义的乘法做成一个环: $(r_1,x_1)(r_2,x_2) = (r_1r_2, r_1x_2 + x_1r_2)$, $(r_1,x_1),(r_2,x_2) \in S$. 我们称环 S 为 R 通过 V 的平凡扩张, 记作 $S = R \propto V$.

定理 4 若 R 为约化环, 则 R 的平凡扩张 $R \propto R$ 为广义可逆环.

证明 任取 $(r_1,r_2),(r'_1,r'_2) \in R \propto R$, 如果 $(r_1,r_2),(r'_1,r'_2) = (r_1r'_1, r_1r'_2 + r_2r'_1) = 0$, 即 $\begin{cases} r_1r'_1 = 0, \\ r_1r'_2 + r_2r'_1 = 0. \end{cases}$ 由于约化环为半交换环, 我们将第二式等号的两端右乘 r'_1, 有 $r_2r'_1r'_1 = 0$, $(r_2r'_1)r_2r'_1 = 0$, 进而 $r_2r'_1 = 0$, 由命题2知约化环为广义可逆环, 所以对任意的 $(r,s) \in R \propto R$, $(r'_1, r'_2)(r,s)(r_1,r_2) = (r'_1rr_1, r'_1rr_2 + r'_1sr_1 + r'_2rr_1) = 0$. 所以 $R \propto R$ 为广义可逆环.

定理 5 若 R 是 ZC_3 环, I 是 R 的左零化子, 则 R/I 为广义可逆环.

证明 任取 $r_1 + I, r_2 + I \in R/I$, 且 $(r_1 + I)(r_2 + I) = 0$, 则 $r_1r_2 \in I$, 此时对任意的 $r \in R$, $r_1r_2r = 0$, 由于 R 是 ZC_3 环, 所以 $r_2rr_1 = 0$, $r_2rr_1 + I = I$, R/I 是广义可逆环.

定理 6 广义可逆环为 Abel 环.

证明 设环 R 为广义可逆环, 任取 $e \in R$, 且 $e^2 = e$, 有 $e(r - er) = 0$, $(r - er)ee = 0$, $(r - er)e = re - ere = 0$, $re = ere$. 再者, $(r - re)e = 0$, $ee(r - re) = er - ere = 0$, $er = ere$, 所以 $er = re$, R 为 abel 环.

在文献[8]中, 称环 R 为弱可逆环, 若对任意的 $a,b,r \in R$, 当 $ab = 0$ 时, 必有 $Rbra$ 是 R 的诣零左理想(等价地, $braR$ 是 R 的诣零右理想).

命题 5 对于广义可逆环 R, 有

1) 对于任意的 $a \in R$, 若 $a^2 = 0$, 则 $aR, Ra \subseteq N_2(R)$;

2) 对于任意的 $a,b \in R$, 若 $ab = 0$, 则 $Rab, Rba, abR, baR \subseteq N_2(R)$;

3) R 是弱可逆的.

证明 1) 因为 $a^2=0$,则 $aRa=0$,故 $aRaR=0,RaRa=0$,所以 $Ra,aR\subseteq N_2(R)$.

2) 若 $ab=0$,则 $(ab)^2=0,(ba)^2=0$,由 1) 得 $abR,Rab,baR,Rba\subseteq N_2(R)$.

3) 若 $ab=0$,则对任意的 $r\in R$,有 $(bra)^2=brabra=0$,由 1) 知 $bra\subseteq N_2(R)$,R 为弱可逆的.

定理 7 设环 R 是环 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的直和,则 R 是广义可逆环 $\Leftrightarrow R_i$ 是广义可逆环.

证明 "$\Rightarrow$". 设 $a_i,b_i\in R_i$ 满足 $a_ib_i=0$,令 $a=(0,\cdots,0,a_i,0,\cdots,0),b=(0,\cdots,0,b_i,0,\cdots,0),i=1,\cdots,n$,均有 $ab=0$,由 R 是广义可逆环,所以有 $bRa=0$,从而有 $b_iRa_i=0,i=1,\cdots,n$,所以 R_i 为广义可逆环,$i=1,\cdots,n$.

"$\Leftarrow$". 设 $a,b\in R$,满足 $ab=0$,令 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),b=(b_1,b_2,\cdots,b_n),a_i,b_i\in R_i$,则有 $a_ib_i=0$,$i=1,\cdots,n$. 由于 R_i 为广义可逆环,所以有 $b_iRa_i=0$,$i=1,\cdots,n$,从而对任意的 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)\in R$,$bra=(b_1r_1a_1,b_2r_2a_2,\cdots,b_nr_na)=0,i=1,\cdots,n$,所以 $bRa=0$,R 为广义可逆环.

广义可逆环的子环是广义可逆环,又环的亚直和是直和的子环,所以有下面的结果:

定理 8 有限个广义可逆环的亚直和是广义可逆环.

例 1 设 S 为约化环,R_1,R_2 为

$$R=\left\{\left.\begin{pmatrix}a&b&0\\0&a&d\\0&0&a\end{pmatrix}\right|a,b,d\in S\right\}$$ 的子环,其中

$$R_1=\left\{\left.\begin{pmatrix}x_1&y_1&0\\0&x_1&0\\0&0&x_1\end{pmatrix}\right|x_1,y_1\in S\right\},$$

$$R_2=\left\{\left.\begin{pmatrix}x_2&0&0\\0&x_2&y_2\\0&0&x_2\end{pmatrix}\right|x_2,y_2\in S\right\}.$$

容易证明 $R_1+R_2=R$. 现在任取 R_1 中的元

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&0\\0&a_1&0\\0&0&a_1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1&b_2&0\\0&b_1&0\\0&0&b_1\end{pmatrix},$$

$$a_1,a_2,b_1,b_2\in S,$$

如果

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2+a_2b_1&0\\0&a_1b_1&0\\0&0&a_1b_1\end{pmatrix}=0,$$

有方程组 $\begin{cases}a_1b_1=0,\\a_1b_2+a_2b_1=0.\end{cases}$ 由于 S 为约化环,所以 $b_1a_1=0$. 又约化环为半交换环,在第二式右乘 a_1,有 $a_1b_2a_1=0$,所以 $a_1b_2=0,a_2b_1=0,b_2a_1=0,b_1a_2=0$.

现在任取 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_1&c_2&0\\0&c_1&0\\0&0&c_1\end{pmatrix}\in R_1$,有

$$\boldsymbol{BCA}=\begin{pmatrix}b_1c_1a_1&b_1c_1a_2+b_1c_2a_1+b_2c_1a_1&0\\0&b_1c_1a_1&0\\0&0&b_1c_1a_1\end{pmatrix}.$$

因为约化环为半交换环,所以 $b_1c_1a_1=0,b_1c_1a_2=0$,$b_1c_2a_1=0,b_2c_1a_1=0$. 这时便有 $\boldsymbol{BCA}=0$,故 R_1 为广义可逆环. 同理可证 R_2 为广义可逆环.

但任取

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&n\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0&m&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in R_1+R_2=R,$$

有 $\boldsymbol{X}_2R\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}0&0&mRn\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 一般不为 0,故 R_1+R_2 不一定是广义可逆环.

此例说明在一般情况下,广义可逆环的和未必是广义可逆环.

称 R 中的任意三个元满足轮换条件,如果对任意的 $a,b,c\in R,abc=cab=bca$.

定理 9 I_1,I_2 为环 R 理想,若 I_1,I_2 中任意三个元满足轮换条件,$I_1\cap I_2$ 为约化环,则 I_1+I_2 为广义可逆环.

证明 设 $a_1,a_2\in I_1,b_1,b_2\in I_2$,则 $a_1+b_1,a_2+b_2\in I_1+I_2$,若 $(a_1+b_1)(a_2+b_2)=a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2=0$,则 $a_1a_2=-(a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2)\in I_1\cap I_2$,同理有 $b_1b_2\in I_1\cap I_2$. 于是对任意的 $a\in I_1$,$b\in I_2,a+b\in I_1+I_2$,有 $(a_2+b_2)(a+b)(a_1+b_1)=a_2aa_1+a_2ab_1+a_2ba_1+a_2bb_1+b_2aa_1+b_2ab_1+b_2ba_1+b_2bb_1$,因为 I_1,I_2 中任意三个元满足轮换条件,所以 $a_2aa_1=a_1a_2a\in I_1\cap I_2,b_2bb_1=b_1b_2b\in I_1\cap I_2$,$(a_2+b_2)(a+b)(a_1+b_1)\in I_1\cap I_2$,且 $[(a_2+b_2)(a+b)(a_1+b_1)]^2=0$,已知 $I_1\cap I_2$ 为约化环,故 $(a_2+b_2)(a+b)(a_1+b_1)=0$,由 a,b 的任意性知 $(a_2+b_2)(I_1+I_2)(a_1+b_1)=0$,$I_1+I_2$ 为广义可逆环.

定理 10 设 R 是环,I 是 R 的一个 Reduced 理想,如果 R/I 是广义可逆环,则 R 是广义可逆环.

证明 设 $a,b\in R$,且 $ab=0$,则由 R/I 是广义可

逆环,得 $bRa \subseteq I, I \supseteq (bRa)^2 = 0$, 又因为 I 是 Reduced 理想,所以 $bRa = 0$, R 为广义可逆环.

由文献[10],设 $(S, \leqslant)$ 是偏序集,称 $(S, \leqslant)$ 是 Artin 的,如果 S 中元素的任意严格降链是有限的. 称 $(S, \leqslant)$ 是 Narrow 的,如果 S 中任意两个不可比较的元素构成的子集是有限的.

下面的定义见文献[12].

设 $(S, \leqslant)$ 是严格偏序幺半群(即 $(S, \leqslant)$ 是偏序幺半群,且对任意的 $s, s', t \in S$,若 $s < s'$,则 $s + t < s' + t$),R 是环. 记 $[[R^{S,\leqslant}]] = \{f: S \to R \mid f$ 是映射,且 $\mathrm{supp}(f)$ 是 Artin 的和 Narrow 的$\}$, 其中 $\mathrm{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$,按分量加法 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 可构成一个 Abel 加群. 对任意的 $s \in S$ 和任意的 $f, g \in [[R^{S,\leqslant}]]$, 记 $X_S(f,g) = \{(u,v) \in S \times S \mid s = u + v, f(u) \neq 0, g(v) \neq 0\}$. 由文献[11]知 $X_S(f,g)$ 是有限的, 因此可定义如下的乘法运算 $(fg)(s) = \sum_{(u,v) \in X_S(f,g)} f(u)g(v)$. 按照上述加法和乘法运算, $[[R^{S,\leqslant}]]$ 构成一个环,称为广义幂级数环.

一个幺半群 S 称为挠自由的,如果满足条件:若 $s, t \in S$,且 $k \geqslant 1$,使 $ks = kt$,则 $s = t$. 元素 $t \in S$ 是可消的,如果 $t + s = t + s'(s, s' \in S)$ 能推出 $s = s'$. 称幺半群 S 是可消的,如果它中的每个元素都是可消的. 称 R 是 S-Armendariz 环,如果 $f, g \in [[R^{S,\leqslant}]]$ 满足 $fg = 0$,则对任意的 $u, v \in S$,有 $f(u)g(v) = 0$.

定理 11 设 $(S, \leqslant)$ 是严格偏序幺半群,R 是 S-Armendariz 环,则 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 是广义可逆环当且仅当 R 是广义可逆环.

证明 "$\Leftarrow$". 假设 R 是广义可逆环, 且 $f, g \in [[R^{S,\leqslant}]]$ 使得 $fg = 0$,因为 R 是 S-Armendariz 环,所以对任意的 $u \in \mathrm{supp}(g)$, $v \in \mathrm{supp}(f)$ 有 $f(v)g(u) = 0$, 又 R 是广义可逆环, 故对任意的 $s \in S$, $y \in [[R^{S,\leqslant}]]$, $g(u)y(s)f(v) = 0$, 有 $(gyf)(s) = \sum_{(u,v) \in X_S(f,g)} g(u)y(s)f(v) = 0$,故 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 是广义可逆环.

"$\Rightarrow$". 如果 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 是广义可逆环,则 R 是广义可逆环,这是因为广义可逆环的子环是广义可逆环.

命题 6 如果 R 是约化环,则

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

是广义可逆环. 其中 $a_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n (n \geqslant 3)$.

证明 若对任意的

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & b_1 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \end{pmatrix} \in T, \boldsymbol{AB} = 0,$$

由文献[3]定理 2.1 证明过程,可以知道 T 是可逆环,所以 T 为广义可逆环.

环 R 称为 2-素的,如果 $N(R) = P(R)$[3].

定理 12 R 是广义可逆环,则 R 是 2-素环.

证明 我们只需证明 $N(R) \subseteq P(R) (n \geqslant 2)$ 即可. 设 R 是广义可逆环,任取 $a \in N(R)$,存在正整数 $t \geqslant 2$, 使得 $a^t = aa^{t-1} = 0$. 由于 R 是广义可逆环,所以 $a^{t-1}Ra = 0$,即对任意的 $r \in R, a^{t-1}ra = 0$. 要证 $a \in P(R)$,我们不妨用反证法,假设 $a \notin P(R)$,必存在 R 的一个素理想 P,使得 $a \notin P$,由素理想的定义知道,如果 $a, b \notin P$, 则 $ab \notin P$, 又 $a^{t-1}ra = 0 \in P$, 故 $a^{t-1}r \in P$, r 是 R 中的任意元,则存在 $r' \in R \backslash P$,这时有 $a^{t-1} \in P$,即 $a^{t-2}a \in P, a^{t-2} \in P$,继续下去,我们发现 $a \in P$, 与假设矛盾. 所以 $a \in P(R)$, $N(R) \subseteq P(R)$,从而 R 是 2-素环.

在文献[12]中,称环 R 满足 ZI_n 性质(简称为 R 是 ZI_n 环), 对任意的 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R$, 如果 $a_1a_2\cdots a_n = 0$,则 $a_1Ra_2R\cdots Ra_n = 0$.

文献[12]将半交换环进行推广,提出了 ZI_n 环的概念,并对其性质做了系统的研究. 显然 ZI_2 环与半交换环是一致的. 自然地,我们可以将广义可逆环进行推广,提出拟 ZI_n 环的概念.

定义 2 称环 R 满足拟 ZI_n 性(简称 R 为拟 ZI_n 环), 如果对任意的 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R, n \geqslant 2$, 若 $a_1a_2\cdots a_n = 0$,则 $a_nRa_{n-1}R\cdots Ra_1 = 0$.

容易证明:

命题 7 拟 ZI_n 环类对子环和直积封闭.

定理 13 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 R 的非空子集,

$n \geqslant 2$，则下面命题等价：

1）设 R 满足拟 ZI_n 性；

2）如果 $A_1A_2\cdots A_n = 0$，则 $A_nRA_{n-1}R\cdots RA_1 = 0$.

证明 1)⇒2). 假设对于任意的 $a_i \in A_i$，有 $a_1a_2\cdots a_n = 0$，由于 R 满足拟 ZI_n 性，所以 $a_nRa_{n-1}R\cdots Ra_1 = 0$，从而 $A_nRA_{n-1}R\cdots RA_1 = \sum_{a_i \in A_i} a_nRa_{n-1}R\cdots Ra_1 = 0$.

2)⇒1). 显然.

定理 14 设 S 是挠自由可消去群，$\leqslant$ 是 S 上的严格偏序，R 是 S-Armendariz 环，且 $n \geqslant 3$，则 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 是拟 ZI_n 环 ⇔ R 是拟 ZI_n 环.

证明 “⇐”. 假设 R 是拟 ZI_n 环，且 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in [[R^{S,\leqslant}]]$，使得 $f_1f_2\cdots f_n = 0$，由文献[11]命题3.2知，对任意的 $u_i \in \mathrm{supp}(f_i)(i = 1,2,\cdots,n)$，有 $f_1(u_1)f_2(u_2)\cdots f_n(u_n) = 0$，又因为 R 是拟 ZI_n 环，有 $f_n(u_n)Rf_{n-1}(u_{n-1})\cdots Rf_1(u_1) = 0$，而对任意的 $g_2, g_3, \cdots, g_n \in [[R^{S,\leqslant}]]$ 和任意的 $s \in S$，有

$$(f_ng_nf_{n-1}g_{n-1}\cdots g_2f_1)(s) = \sum_{(u_n,v_n,u_{n-1},v_{n-1},\cdots,u_1,v_2)} f_n(u_n)g_n(v_n)f_{n-1}(u_{n-1})g_{n-1}(v_{n-1})\cdots g_2(v_2)f_1(u_1) = 0,$$

其中，$(u_n,v_n,u_{n-1},v_{n-1},\cdots,u_1,v_2) \in X_S(f_n,g_n,f_{n-1},g_{n-1},\cdots,f_1,g_2)$，于是 $f_ng_nf_{n-1}g_{n-1}\cdots g_2f_1 = 0$，因此

$$f_n[[R^{S,\leqslant}]]f_{n-1}[[R^{S,\leqslant}]]\cdots[[R^{S,\leqslant}]]f_1 = 0,$$

故 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 是拟 ZI_n 环.

“⇒”. 显然.

定理 15 设 R 是拟 ZI_n 环，且 $n \geqslant 3$，如果 $N(R)$ 中所有元的幂零指数中最大的为 t，且 $n \geqslant t$，则 R 是2-素环.

证明 我们只需证明 $N(R) \subseteq P(R)$ 即可. 任取 $a \in N(R)$，存在正整数 $t \geqslant 2$ 使得 $a^n = a^t = 0$. 由于环 R 是拟 ZI_n 环，所以对任意的 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1} \in R$，$ar_1ar_2\cdots r_{n-1}a = 0$，用反证法来证明 $a \in P(R)$. 假设 $a \notin P(R)$，必存在 R 的一个素理想 P，使得 $a \notin P$，而 $ar_1ar_2\cdots r_{n-1}a = 0 \in P$，所以 $ar_1ar_2\cdots r_{n-1}a \in P$，由 $r_i(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 的任意性知，存在 $r'_1 \notin P$，$ar_2\cdots r_{n-1} \in P$，依此类推，就有 $a \in P$，得出矛盾. 所以 $a \in P(R)$，$N(R) \subseteq P(R)$，从而 R 是2-素环.

参考文献
References

[1] Huh C，Lee Y，Smoktunowicz A. Armendariz rings and semicommutative rings[J]. Communications in Algebra，2002，30(2)：751-761

[2] Shin G. Prime ideals and sheaf representation of preudo symmetric rings[J]. Transactions of the American Mathematical Society，1973，184：43-60

[3] Anderson D D，Camillo V. Semigroup and rings whose zero products commute[J]. Comm Algebra，1999，27(6)：2847-2852

[4] 王尧，任艳丽. Morita context 与环[J]. 纯粹数学与应用数学，2010（已录用）
WANG Yao，REN Yanli. Morita context and rings[J]. Pure and Applied Mathematics，2010(accepted)

[5] Kim N K，Lee Y. Extensions of reversible rings[J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2003，185(1/2/3)：207-223

[6] Baser M，Hong C Y，Kwak T K. On extended reversible rings[J]. Algebra Colloquium，2009，16(1)：37-48

[7] Guang Y，Kui Z L. On strongly reversible rings[J]. Math，2008，12(1)：129-136

[8] Lang Z，Guang Y. On weakly reversible rings[J]. J Acta Math Univ Comenianas，2007，126(2)：189-192

[9] Armendariz E P. A note on extensions of baer and P P-rings[J]. Journal of the Australian Mathematical Society，1974，18：470-473

[10] Ribenboim P. Special properties of generalized power series[J]. Journal of Algebra，1995，173(3)：566-586

[11] Ribenboim P. Semisimple rings and von neumanna regular rings of generalized power series[J]. J Algebra，1997，198：327-338

[12] Hong C Y，Kim N K，Kwak T K. Extensions of generalized reduced rings[J]. Algebra Collquium，2005，12(2)：229-240

Some properties of generalized reversible rings

WANG Yao[1] WANG Yonghui[1,2]

1 School of Mathematics & Physics，Nanjing University of Information Science & Technology，Nanjing 210044

2 Department of Mathematics，Liaoning University，Dalian 116029

Abstract In this paper，the concepts of generalized reversible ring and quasi-ZI_n rings are defined and some of their properties are investigated. We prove that as a Armendariz ring，R is generalized reversible ring if and only if $R[x]$ is generalized reversible ring；generalized reversible rings are 2-prime rings，and quasi-ZI_n rings are 2-prime rings if some conditions are met.

Key words generalized reversible ring；semicommutative ring；2-prime ring；quasi-ZI_n ring