文章编号:1674-7070(2010)01-0079-04

一类非线性周期边值问题解的存在唯一性

薛巧玲[1]　朱建[1]

摘要

利用同胚方法,给出了 Newton 方程周期边值问题的解存在与唯一的充分条件.

关键词

Newton 方程;存在与唯一;全局同胚

中图分类号 O175.1

文献标志码 A

收稿日期 2009-05-30

作者简介

薛巧玲,女,高级讲师,研究方向为微分方程. qlx_1@yahoo.com.cn

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

0 引言

Introduction

周期问题的研究一直是常微分方程定性理论的中心课题. 本文研究一类微分方程周期解的存在唯一性问题.

考察 Newton 方程周期边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+g(t,x(t))=f(t), \\ x(0)=x(2\pi), \quad x'(0)=x'(2\pi). \end{cases} \tag{1}$$

其中:f 是以 2π 为周期的连续函数;$g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是关于 x 连续可微,关于 t 连续的 2π 周期的函数. 许多研究者也讨论过式(1)解的存在性与唯一性,如文献[1-5],证明方法大多较烦琐,用到像 Poincaré 映射等较深刻的理论. 本文利用动力系统的全局同胚方法给出 Newton 方程周期边值问题(1)存在唯一周期解的充分条件. 其研究价值不仅仅在理论上,在实际应用中也有重要的价值,例如物理学和大气动力学问题的研究有时可化为对 Newton 方程周期边值问题的研究.

1 预备知识

Preliminaries

记 $X=\left\{x(t)\ \middle|\ x\in L^2[0,2\pi]\right\}$,定义内积

$$(x,y)=\int_0^{2\pi}x(t)y(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $x,y\in X$,X 为 Hilbert 空间,其范数为$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$,$\forall x\in X$.

记 $Lx=-x''$以及 $D(L)=\left\{x\ \middle|\ x\in X, x'\text{在}[0,2\pi]\text{上绝对连续}, x''\in C[0,2\pi], x(0)=x(2\pi), x'(0)=x'(2\pi)\right\}$,则 L 为 $D(L)$ 上的稠定自伴算子[6],并且 $D(L)$ 关于图范数 $|||x|||=\|x\|+\|Lx\|$ 构成 Banach 空间.

由 Wirtinger 不等式[7] $\|x'\|^2\leqslant\|x''\|^2$,有

$$|||x|||=\|x\|+\|Lx\|\leqslant\|x\|+\|x''\|+\|x'\|\leqslant$$
$$\|x\|+2\|x''\|\leqslant C(\|x\|+\|Lx\|).$$

其中 C 为确定的常数. 由此可知图范数 $|||x|||$ 与 Sobolev 范数 $\|x\|+\|x'\|+\|x''\|$ 等价,由 Sobolev 嵌入定理,$D(L)$ 可紧嵌入 $C^1[0,2\pi]$[8].

为了后面的讨论,本文先论述下列定义和引理.

定义 1[9] 设 X,Y 为 Banach 空间,映射 F: $D(F)\to Y$,若对一切 $(x_0,y)\in D(F)\times Y$ 和每条路径 $q:[0,a)\to D(F)$, $a\in(0,1]$ 满足

$$F(q(t))=(1-t)F(x_0)+ty,\quad t\in[0,a),$$

存在序列 $t_n\to a(n\to\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}q(t_n)$ 存在且极限属于 $D(F)$,则称 F 满足条件(L).

引理 1[9] 设连续映射 $F:D(F)\to Y$ 在 $D(F)$ 上局部同胚,对 $f(D(F))$ 中任一线性函数

$$q(t)=(1-t)y_0+ty_1,\quad t\in[0,1],$$

其中,$y_0,y_1\in F(D(F))$ 为任意的,$x_0\in F^{-1}(y_0)$ ($F^{-1}(y_0)$ 为 y_0 的原象),存在连续映射 $p:[0,1]\to D(t)$ 使 $p(0)=x_0$ 且对 $\forall t\in[0,1]$ 有 $F(p(t))=q(t)$,且 F 满足条件(L),则 F 是全局同胚的.

定义 2[10] 设 $r(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}x'=y(t,x),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{2}$$

在 $[t_0,t_0+a)$ 上的一个解. 若对方程(2)的每个解 $x(t)$ 满足

$$x(t)\leqslant r(t),\quad t\in[t_0,t_0+a),$$

则称 $r(t)$ 为初值问题(2)的极大解.

引理 2[10] 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 为含 (t,x) 的开集,$y\in C[E,\mathbf{R}]$,$[t_0,t_0+a)$ 是初值问题(2)存在极大解 $r(t)$ 的最大区间,让 $m\in C[(t_0,t_0+a),\mathbf{R}]$,$(t,m(t))\in E$,$t\in[t_0,t_0+a)$,$m(t_0)\leqslant x_0$,且 Dini 导数 $Dm(t)\leqslant y(t,m(t))$,$t\in[t_0,t_0+a)\backslash T$,其中 T 是 $[t_0,t_0+a)$ 内至多是可数的子集. 则

$$m(t)\leqslant r(t),\quad t\in[t_0,t_0+a).$$

2 主要结论
Main results

记 $N:D(L)\to Y$,且 $N(x)(t)=-g(t,x(t))$,则方程(1)与以下的算子方程等价

$$Lx+Nx=f.\tag{3}$$

其中:L 为定义域为 $D(L)$ 上的闭线性自伴算子;N 是连续可微算子.

由假设 $g:[0,2\pi]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续,且对 x 有连续偏导数,故对任意 $x\in D(L)$,有

$$N'(x)(t)=-\frac{\partial g}{\partial x}(t,x(t)),$$

$$L+N'(x)=L-\frac{\partial g}{\partial x}(t,x(t)).$$

设对 $\forall t\in[0,2\pi]$,$x\in D(L)$ 存在正整数 k,使得对某 $\delta>0$ 有

$$m_k^2+\delta<\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)<(m_k+1)^2-\delta,\tag{4}$$

其中:m_k^2,$(m_k+1)^2$ 为 L 的相邻的特征值;m_k 为非零整数.

对 $x\in D(L)$ 考察特征值问题

$$Lu-\frac{\partial g}{\partial x}(t,x(t))u=\gamma u,\tag{5}$$

记其特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$.

设 F_k 是 X 的 $(k-1)$ 维子空间族,如果 $F\in F_k$,而 $F^{\perp}$ 为 F 的直交补. 则式(5)的特征值

$$\begin{aligned}\lambda_k&=\\ &\max_{F\in F_k}\min\left\{\left(Lu-\frac{\partial g}{\partial x}(t,x(t))u,u\right):\|u\|=1\text{ 和 }u\in F\right\}=\\ &\max_{F\in F_k}\min\left\{(Lu,u)-\left(\frac{\partial g}{\partial x}(t,x(t))u,u\right):\|u\|=1\text{ 和 }u\in F\right\}\leqslant\\ &\max_{F\in F_k}\min\left\{(Lu,u)-(m_k^2+\delta):\|u\|=1\text{ 和 }u\in F\right\}\leqslant\\ &m_k^2-(m_k^2+\delta)=-\delta<0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}&=\\ &\max_{F\in F_{k+1}}\min\left\{\left(Lu-\frac{\partial g}{\partial x}(t,x(t))u,u\right):\|u\|=1\text{ 和 }u\in F\right\}=\\ &\max_{F\in F_{k+1}}\min\left\{(Lu,u)-\left(\frac{\partial g}{\partial x}(t,x(t))u,u\right):\|u\|=1\text{ 和 }u\in F\right\}\geqslant\\ &\max_{F\in F_{k+1}}\min\left\{(Lu,u)-((m_{k+1})^2-\delta):\|u\|=1\text{ 和 }u\in F\right\}\geqslant\\ &(m_k+1)^2-((m_k+1)^2-\delta)=\delta>0.\end{aligned}$$

因此,0 不是式(5)的特征值,故 $(L+N'(x))^{-1}$ 存在,由算子谱理论[6]可得

$$\begin{aligned}&\|(L+N'(x))^{-1}\|=\\ &\left\{\operatorname{dist}(0,\sigma(L+N'(x))^{-1}\right\}\leqslant\\ &\left\{\min\left(\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)-m_k^2-\delta,(m_k+1)^2-\right.\right.\\ &\left.\left.\delta-\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right)\right\}^{-1},\end{aligned}\tag{6}$$

记

$$\begin{aligned}\omega(s)=\lim_{\delta\to0}\inf_{t\in[0,2\pi]}\min_{\|x\|\leqslant s}\left\{\min\left(\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)-\right.\right.\\ \left.\left.m_k^2-\delta,(m_k+1)^2-\delta-\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right)\right\}^{-1}.\end{aligned}\tag{7}$$

由(6)及条件(4),对 $\forall x\in D$,$L+N'(x)$ 在 X 上可逆,且

$$\|[L+N'(x)]^{-1}\|\leqslant\omega(\|x\|).\tag{8}$$

利用上面讨论和引理可得下面主要定理.

定理 1 设 $g:[0,2\pi]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续,且对 x 有连续偏导数. 设存在正整数 k 对 $\forall t\in[0,2\pi]$,$x\in\mathbf{R}$,某 $\delta>0$ 有

$$m_k^2+\delta<\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)<(m_k+1)^2-\delta,$$

且对任意 $\eta\in R$,初值问题

$$\begin{cases}y'(r)=\eta\omega(y(r)), & r\in[0,1],\\ y(0)=0,\end{cases}\tag{9}$$

在$[0,1]$上的极大解 y,满足对 $\forall a\in(0,1]$,存在序列 $t_n\to a(n\to\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}y(t_n)$存在. 则对每个 $f\in X$,存在唯一函数 $x(t)$ 使 $x'(t)$ 在$[0,2\pi]$上绝对连续,且 $Lx+Nx=f$ 在$[0,2\pi]$上几乎处处成立,即边值问题(3)存在唯一周期 2π 的解.

证明 对 $\forall x\in D(L)$,0 不是 $L+N'(x)$ 的特征值,因此 $L+N(x)$ 是局部同胚的. 对一给定的 $f\in X$,及任意函数 $x_0\in D(L)$,让

$$Lx_0+N(x_0)=f_0,$$

$$q(s)=(1-s)f_0+sf,\quad s\in[0,1],$$

则 $L+N$ 对 q 具有延拓性质[11]. 设对 $\forall a\in(0,1]$,存在连续函数

$$p:[0,a)\to D,$$

使

$$Lp(s)+N(p(s))=q(s),\quad s\in[0,a).$$

对任意 $s\in[0,a)$,U 和 V 分别为 $p(s)$ 和 $q(s)$ 的开邻域,使得 $L+N$ 限制在 U 上算子$(L+N)_U$ 是 U 到 V 为同胚的,则$(L+N)_U^{-1}$在 $q(s)$ 的邻域内是连续可微的,且

$$((L+N)_U^{-1})'[Lx+N(x)]=[(Lx+N(x))']^{-1},\ x\in U.$$

因此,根据 $p(s)$ 在 $s\in[0,a)$ 上连续可微的,由链式法则得

$$p'(s)=[L+N'(p(s))]^{-1}q'(s)=[L+N'(p(s))]^{-1}(f-f_0),$$

所以有 $\forall s\in[0,a)$,

$$\|p'(s)\|\leqslant\|[L+N'(p(s))]^{-1}\|\cdot\|f-f_0\|.$$

设 $\eta=\|f-f_0\|$,由(8)可得

$$\|p'(s)\|\leqslant\eta\omega(\|p(s)\|).$$

设 y 是(9)的极大解,由假设,$\forall a\in(0,1]$,存在序列 $t_n\to a(n\to\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}y(t_n)$存在. 因此由引理和微分方程比较定理[10]知,$\lim\limits_{t_n\to a}p(t_n)$也是存在的(对 $\forall a\in(0,1]$),所以 $L+N$ 满足条件(L). 因此 $L+N$为 D 到 X 上全局同胚,定理得证.

推论 1 设 $g:[0,2\pi]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续,对 x 有连续偏导数,存在正整数 k,使得对一切 $t\in[0,2\pi]$,某 $\delta>0$ 有

$$m_k^2+\delta<\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)<(m_k+1)^2-\delta.$$

若(8)中的 $\omega(s)$ 满足

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)}=\infty,$$

则边值问题(3)存在唯一周期解.

证明 对任意 $\eta\in\mathbf{R}$ 考察初值问题(9),设 $y(t)$ 是(9)在$[0,1]$上的极大解,则有

$$\frac{y'(t)}{\omega(y(t))}=\eta,$$

$$\int_0^s\frac{y'(t)}{\omega(y(t))}\mathrm{d}t=\eta s,\quad s\in[0,1].$$

令 $y(t)=r$,则有

$$\left|\int_{y(0)}^{y(s)}\frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)}\right|=|\eta s|\leqslant|\eta|,$$

由假设 $y(t)$ 是有界函数,所以存在序列$\{t_n\}$使$\lim\limits_{n\to\infty}y(t_n)$存在. 因此,定理 1 条件满足,边值问题(3)存在唯一解.

注:由推论 1 可知定理 1 实际上推广了已有的一些结果.

下面举一实例,考虑二点边值问题[11]

$$\begin{cases}x''(t)+\dfrac{3}{2}x(t)+\arctan x(t)=\sin t+\arctan(2\sin t),\\ x(0)=x(2\pi),x'(0)=x'(2\pi).\end{cases}$$

这里 $g(t,x)=\dfrac{3}{2}x+\arctan x$,$\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{1+x^2}$,并且 $g(t,x)$满足

$$1^2+\delta<\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)<(1+1)^2-\delta,$$

其中$0<\delta<\dfrac{1}{2}$. 由式(7)可得 $\omega(s)=\dfrac{2(1+s^2)}{3+s^2}$,且对任意 $\eta\in\mathbf{R}$,初值问题(9)在$[0,1]$上的极大解$y=2\eta\left(t-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)$,对 $\forall a\in(0,1]$,若序列 $t_n\to a(n\to\infty)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}y(t_n)=2\eta\left(a-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$,即$\lim\limits_{n\to\infty}y(t_n)$存在. 满足定理 1 条件,此问题有唯一的解 $x(t)=2\sin t$.

但是定理 1 条件只是充分条件,而非必要条件. 例如二点边值问题

$$\begin{cases}x''(t)+x(t)=0,\\ x(0)=x(2\pi),\quad x'(0)=x'(2\pi)\end{cases}$$

显然有唯一的解 $x(t)=\sin t$,但是,$g(t,x)=x$,$\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x)=1$,不满足定理 1 条件.

参考文献
References

[1] Leach D E. On Poincare's perturbation theorem and a theorem of

WS Loud[J]. Differential Equation, 1970(7):34-53
[2] Brown K J, Lin S S. Periodically perturbed conservative systems and a global inverse function theorem[J]. Nonlinear Anal TMA, 1980(4):193-201
[3] 丁同仁. 在共振点的非线性振动[J]. 中国科学 A, 1982, 25(9):918-931
DING Tongren. Nonlinear oscillations at a point of resonance[J]. Sci Sinica Ser A, 1982, 25(9):918-931
[4] LI Weiguo. A necessary and sufficient condition on existence and uniqueness of 2π-periodic solution of duffing equation[J]. Chinese Ann Math B, 1990(11):342-345
[5] SHEN Zuhe. On the periodic solution to the Newtonian equation of motion[J]. Nonlinear Anal TMA, 1989(13):145-150
[6] Dunford N, Schwartz J T. Linear operators (Ⅱ). Interscience[M]. New York: Academic Press, 1963
[7] Edwin F, Beckenbach R B. Inequalities[M]. Springer-Verlag, 1983
[8] Adams R A. Sobolev spaces [M]. New York: Academic Press, 1975
[9] Marius Radulescu, Sorin Redolence. Global inversion theorems and applications to differential equations[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1980(4):951-965
[10] Lakeshmikantham V, Leeda S. Differential and integral inequlities (Ⅱ)[M]. New York: Academic Press, 1969
[11] HUANG Wenhua, SHEN Zuhe. On a two-point boundary value problem of duffing type equation wiyh dirichlet conditions[J]. Appl Math B, 1999(14):131-136

Existence and uniqueness of the solution for a class of nonlinear periodic boundary value problem

XUE Qiaoling[1] ZHU Jian[1]
1 College of Math & Physics, Nanjing University of Information Science &Technology, Nanjing 210044

Abstract By using the method of global homeomorphism, a sufficient condition for the existence and uniqueness of the solution for a class of nonlinear periodic boundary value problem is obtained.

Key words Newton equation; existence and uniqueness; global homeomorphism