文章编号:1674-7070(2010)01-0074-05

循环分块矩阵方程之解及其应用

张佳静[1]　杨兴东[1]　孙苏亚[1]

摘要

讨论了循环分块矩阵线性方程的有解条件与求解方法,利用循环分块矩阵方程的解给出求循环分块矩阵之逆的简便算法.

关键词

循环分块矩阵;实对称矩阵;矩阵方程;解;逆矩阵

中图分类号 O151.21
文献标志码 A

0　引言
Introduction

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为数域 P 上 n 个数,则矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

称为数域 P 上 n 阶循环矩阵.

循环矩阵是一类非常重要的特殊矩阵,在现代科技工程中有广泛的应用.如在信号处理工程、数字图像工程、编码理论、自回归滤波器设计、计算机工程等领域中经常会遇到以这类矩阵为系数的方程组的求解问题[1-3],并且循环矩阵及循环线性方程组的求解在设计领域内亦起着重要作用.近年来,关于循环矩阵的研究十分活跃[2-7].本文则运用线性方程组理论与分块矩阵的性质,给出循环分块矩阵线性方程组有解条件与求解方法,同时利用循环分块矩阵方程的解给出循环分块矩阵之逆的简便算法.

本文所用记号为常用记号,如 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示实数域上 $m\times n$ 矩阵集,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置.

1　循环分块矩阵方程的循环分块解
The sub-block loop solution to block circulant matrix equation

定义 1　设 $\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{n-1}$ 为数域 P 上 $k\times k$ 矩阵,则 $kn\times kn$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_{n-1} \\ \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 & \cdots & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots & \boldsymbol{A}_0 \end{pmatrix}$$

称为循环分块矩阵,简记为 $\mathrm{Cric}(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{n-1})$.

引理 1[8]　设 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{kn\times kn}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{kn\times kn}$,则矩阵方程 $\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{B}$ 有解的充要条件是 $\boldsymbol{XX}^+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{X}^+$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的 Moore-Penrose 逆.

收稿日期 2009-07-25
资助项目 南京信息工程大学科研基金(07JY-0103)

作者简介

张佳静,女,硕士生.jinger6604@sina.com
杨兴东(通信作者),男,教授,主要研究矩阵理论及其应用.xingdongy@hotmail.com

1　南京信息工程大学　数理学院,南京,210044

引理 2[8] 设 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{kn\times kn}$,则矩阵方程 $\boldsymbol{YX}=\boldsymbol{B}$ 有实对称解的充要条件是 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{BX}$,$\boldsymbol{BX}^{+}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{X}^{+}$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的 Moore-Penrose 逆.

定理 1 设

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3 & \cdots & \boldsymbol{X}_n\\ \boldsymbol{X}_n & \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \cdots & \boldsymbol{X}_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 & \boldsymbol{X}_5 & \cdots & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 & \cdots & \boldsymbol{X}_1\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \cdots & \boldsymbol{B}_n\\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{B}_5 & \cdots & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 & \cdots & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{kn\times kn},$$

且 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{X}}^{+}\widetilde{\boldsymbol{B}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$,则矩阵方程 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 存在 $kn\times kn$ 循环分块矩阵解

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_{n-1}\\ \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 & \cdots & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots & \boldsymbol{A}_0\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 为 $k\times k$ 实矩阵.

证明 由引理 1,矩阵方程 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}$ 有解,记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{A}_{n-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{kn\times k},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 为 $k\times k$ 实矩阵,则

$$\mathrm{Cric}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{A}_{n-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_n\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_3\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix},$$

比较方程两边得

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A}_{n-1}+\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{A}_{n-2}+\cdots+\boldsymbol{X}_{n-1}\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{X}_n\boldsymbol{A}_1,\\ \boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{X}_n\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}_{n-1}+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A}_{n-2}+\cdots+\boldsymbol{X}_{n-2}\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{X}_{n-1}\boldsymbol{A}_1,\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{X}_4\boldsymbol{A}_{n-1}+\boldsymbol{X}_5\boldsymbol{A}_{n-2}+\cdots+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A}_1,\\ \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{A}_{n-1}+\boldsymbol{X}_4\boldsymbol{A}_{n-2}+\cdots+\boldsymbol{X}_n\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}_1.\end{cases}\tag{1}$$

令 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{Cric}(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{n-1})$,则由式(1)得

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{Cric}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)\mathrm{Cric}(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{n-1})=\mathrm{Cric}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)=\widetilde{\boldsymbol{B}}.$$

证毕.

定理 2 设 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 满足定理 1 所设条件,并且 $\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}=\widetilde{\boldsymbol{X}},\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}\in\mathbf{R}^{kn\times kn}$,则矩阵方程 $\boldsymbol{Y}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 存在 $kn\times kn$ 循环分块矩阵解

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \cdots & \boldsymbol{C}_{n-1}\\ \boldsymbol{C}_{n-1} & \boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{C}_1 & \cdots & \boldsymbol{C}_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 & \cdots & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 & \cdots & \boldsymbol{C}_0\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 为 $k\times k$ 实矩阵.

证明 由定理 1,矩阵方程 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 有 $kn\times kn$ 循环分块矩阵解

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{Cric}(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{n-1}),$$

则 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{A}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$. 对此方程两边取转置,并且注意 $\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}=\widetilde{\boldsymbol{X}}$,$\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$,则有 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$,此即

$$\mathrm{Cric}(\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}_{n-1}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}})\mathrm{Cric}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)=\widetilde{\boldsymbol{B}}=\mathrm{Cric}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n).$$

令 $\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{A}_{n-1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{A}_{n-2}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{C}_{n-1}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$,并设

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\mathrm{Cric}(\boldsymbol{C}_0,\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_{n-1}),$$

则得 $\widetilde{\boldsymbol{C}}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$. 证毕.

推论 1 设 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 满足定理 2 所设条件,并且 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{B}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}\widetilde{\boldsymbol{X}}$,$\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 可逆,则矩阵方程 $\boldsymbol{Y}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 存在 $kn\times kn$ 对称循环分块矩阵解

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \cdots & \boldsymbol{C}_{n-1}\\ \boldsymbol{C}_{n-1} & \boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{C}_1 & \cdots & \boldsymbol{C}_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 & \cdots & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 & \cdots & \boldsymbol{C}_0\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_0,\boldsymbol{C}_{n-1}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_{n-2},\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_{n-1}$ 为 $k\times k$ 实矩阵.

证明 因为 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 可逆,所以矩阵方程 $\boldsymbol{Y}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 有唯一解. 由定理 2,矩阵方程 $\boldsymbol{Y}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 有 $kn\times kn$ 循环分块矩阵解

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\mathrm{Cric}(\boldsymbol{C}_0,\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_{n-1}).$$

因 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 满足定理 2 所设条件 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{X}}^{+}\widetilde{\boldsymbol{B}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$,故 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}=(\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{X}}^{+}\widetilde{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}\widetilde{\boldsymbol{X}}^{+}\widetilde{\boldsymbol{X}}$,因而满足引理 2 的条件. 所以 $\boldsymbol{Y}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 有 $kn\times kn$ 实对称解,这唯一的实对称解就是 $\widetilde{\boldsymbol{C}}$,从而有 $\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_0,\boldsymbol{C}_{n-1}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_{n-2},\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_{n-1}$. 证毕.

推论 2 设 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 满足定理 2 所设条件,矩阵

方程 $\boldsymbol{Y}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的 $kn\times kn$ 循环分块矩阵解

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \cdots & \boldsymbol{C}_{n-1}\\ \boldsymbol{C}_{n-1} & \boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{C}_1 & \cdots & \boldsymbol{C}_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 & \cdots & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 & \cdots & \boldsymbol{C}_0\end{pmatrix},$$

如果 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{B}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}\widetilde{\boldsymbol{X}},\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{C}}=\widetilde{\boldsymbol{C}}\widetilde{\boldsymbol{X}},r(\widetilde{\boldsymbol{C}})=r(\widetilde{\boldsymbol{B}})$,那么 $\widetilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}=\widetilde{\boldsymbol{C}}$,即 $\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_0,\boldsymbol{C}_{n-1}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_{n-2},\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_{n-1}$,这里 $\boldsymbol{C}_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 为 $k\times k$ 实矩阵.

证明 由推论 1,矩阵方程 $\boldsymbol{Y}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 有 $kn\times kn$ 循环分块矩阵解,设其解为

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\mathrm{Cric}(\boldsymbol{C}_0,\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_{n-1}).$$

因 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{B}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 并且都是实对称阵,所以 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 可同时正交对角化[9],即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\quad \widetilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$,$\boldsymbol{\Lambda}_1$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 r 阶对角阵,$\boldsymbol{\Lambda}_2$ 为 $n-r$ 阶对角阵,$r=r(\widetilde{\boldsymbol{X}})$,即 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可逆. 则

$$\boldsymbol{X}^{+}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}.$$

记

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{Z}_3 & \boldsymbol{Z}_4\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{Z}^{T}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{Z}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

由 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{C}}=\widetilde{\boldsymbol{C}}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$,有,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{Z}_3 & \boldsymbol{Z}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{Z}_3 & \boldsymbol{Z}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

注意 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可逆,所以,

$$\boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{O},\boldsymbol{Z}_3=\boldsymbol{O},\boldsymbol{\Lambda}_2=\boldsymbol{O}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{Z}_3 & \boldsymbol{Z}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_4\end{pmatrix}.$$

再由 $\widetilde{\boldsymbol{C}}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 得,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\Rightarrow r(\boldsymbol{Z}_1)=r(\boldsymbol{\Lambda}_1)=r(\widetilde{\boldsymbol{B}}).$$

$$r(\widetilde{\boldsymbol{C}})=r(\boldsymbol{Z})\geqslant r(\boldsymbol{Z}_1)+r(\boldsymbol{Z}_4)\geqslant r(\boldsymbol{Z}_1)=r(\widetilde{\boldsymbol{B}})=r(\widetilde{\boldsymbol{C}})$$

$\Rightarrow$

$$r(\boldsymbol{Z}_1)=r(\boldsymbol{Z}_1)+r(\boldsymbol{Z}_4)$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{Z}_4=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{Z}_3 & \boldsymbol{Z}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ 为对角阵,因此,

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\Rightarrow\widetilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

为对称矩阵,从而 $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ 为对称循环分块矩阵. 证毕.

2 循环分块矩阵的逆

The inverse of block circulant matrix

下面给出应用循环分块矩阵方程的解求循环分块矩阵之逆的简便算法.

由定理 1,取

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_k & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{E}_k\end{pmatrix}$$

为 kn 阶单位阵,则循环分块矩阵方程 $\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的解 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 就是循环分块矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 的逆,并且其逆也是循环分块矩阵.

由定理 1 的证明,很容易得到求解循环分块矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 之逆的简便算法:

求解矩阵方程

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k\\ \boldsymbol{O}\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

当秩

$$r(\widetilde{\boldsymbol{X}})=r\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\left|\begin{matrix}\boldsymbol{E}_k\\ \boldsymbol{O}\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}\end{matrix}\right.\right)$$

时,方程有解,否则无解. 当方程有解时,求出它的解 $\boldsymbol{A}$,并记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{A}_{n-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{kn\times k},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 为 $k\times k$ 实矩阵. 令

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_{n-1}\\ \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 & \cdots & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots & \boldsymbol{A}_0\end{pmatrix},$$

则 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 就是 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 之逆,即 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\widetilde{\boldsymbol{X}}^{-1}$.

特别地,设

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{X}_1$ 以及 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{X}_2$ 都可逆,则循环分块矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 的逆

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\widetilde{\boldsymbol{X}}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1^{-1}+\boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{F}\\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{X}_1^{-1}+\boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{F}\end{pmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^{-1}$.

例 求循环分块阵

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\\ \boldsymbol{X}_4 & \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 & \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 & \boldsymbol{X}_1\end{pmatrix}=$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc}1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0\\ 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0\\ 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0\\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1\end{array}\right)$$

的逆矩阵.

首先应用分块矩阵初等变换求解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0&1&1\\ 0&1&1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&1&0&1&1\\ 1&0&1&1&1&0&1&0\\ 1&1&1&1&0&1&1&0\\ 1&0&1&0&1&1&1&0\\ 1&0&1&1&1&1&0&1\end{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{Y}}=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\\ 0&0\\ 0&0\\ 0&0\\ 0&0\end{pmatrix},$$

求得其解为

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{7}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9}\end{pmatrix},$$

令

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\end{pmatrix},$$

则 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 即为所求矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 的逆矩阵.

参考文献
References

[1] 李森林.几类直接控制系统绝对稳定的充分及必要条件[J].科学通报,1982,27(10):581-582
LI Senlin. Sufficient and necessary conditions for the absolute stability of several classes of direct control systems[J]. Chinese Science Bulletin,1982,27(10):581-582

[2] 蔡子华,徐玉华.关于分块反循环矩阵及其对角化的讨论[J].数学杂志,2004,24(4):433-446
CAI Zihua, XU Yuhua. Discussion on partition anti-circular matrix and its diagonalization [J]. Journal of Mathematics,2004,24(4):433-446

[3] Jeffrey L S. Diagonally scaled permutations and circulant matrices [J]. Linear Algebra and its Appl,1994,212/213:397-411

[4] Stuar J L, Weaver J R. Matrices that commute with a permutation matrix [J]. Linear Algebra Appl,1991,150:255-265

[5] Scroggs J E, Odell P L. An alternate definition of a pseudoinverse of a matrix [J]. J Soc Ind & Apple Math,1996,14(4):796-810

[6] 何承源.r-循环线性系统求解的快速算法[J].系统科学与数学学报,2001,21(2):182-189
HE Chengyuan. On the fast solution of r-circulant linear systems [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2001,21(2):182-189

[7] 江兆林.求置换因子循环矩阵的逆阵及广义逆阵的快速算法[J].高等学校计算数学学报,2003,25(3):227-234
JIANG Zhaolin. The fast algorithms for finding the inverses and generalized inverses of permutation factor circulant matrices [J]. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities,2003, 25(3):227-234

[8] 戴华.矩阵论[M].北京:科学出版社,2001
DAI Hua. Theory of matrix [M]. Beijing: Science Press,2001

[9] 叶年武.实数方阵的同时对角化[J].北京工业大学学报,1991,17(4):92-95
YE Nianwu. Simultaneous diagonalizations of real matrices [J]. Journal of Beijing Polytechnic University,1991,17(4):92-95

Solution to block circulant matrix equation and its application

ZHANG Jiajing[1] YANG Xingdong[1] SUN Suya[1]

1 College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

Abstract This paper deals with the terms of solution to block circulant matrix linear equation and the methods to solve it; meanwhile, according to the solution, a simplified algorithm is presented to find the inverse of the block circulant matrix.

Key words block circulant matrix; symmetric matrix; matrix equation; solution; inverse matrix