文章编号:1674-7070(2010)01-0071-03

求解非线性方程重根的二阶迭代法

袁媛[1] 杨建伟[1]

摘要

考虑非线性方程的求根问题,将非线性方程问题转化为求函数极值问题.利用无约束优化技术中的牛顿法,对于单根,得到的算法与 New-Raphson 求根算法等价;对于重根,在不计算二阶导数的情况下,给出了具有二阶收敛速度的求根算法.

关键词

优化求根;牛顿法;迭代法;重根

中图分类号 O241.7
文献标志码 A

收稿日期 2009-10-22
资助项目 国家自然科学基金(60973157);江苏省高校自然科学基金(08KJB520004);南京信息工程大学科研基金(JG032006J03)

作者简介

袁媛,女,硕士生,主要研究数值计算方法. shiquanloveyou@163.com

杨建伟(通信作者),男,博士,教授,主要从事小波分析、数值计算、模式识别方面的研究. yjianw2002@yahoo.com.cn

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

0 引言
Introduction

非线性求根问题广泛存在,它在科学和工程计算中起着非常重要的作用. 该问题的研究一直受到人们的关注[1-6]. 迭代格式的建立是设计求根算法的关键,收敛速度的快慢与迭代格式紧密相关. 常用的 Newton-Raphson 方法在单根情形下具有较快的二阶收敛速度,然而对于重根却只有线性的收敛速度. 为解决重根时收敛慢的问题,传统方法中要么需要根重数的信息,要么需要计算二阶导数[7-8],这给实际计算带来了许多不便. 本文将非线性方程求根问题转化为求函数极值的问题,并利用无约束优化技术中的牛顿法求解. 在单根情形下,得到了 Newton-Raphson 方法,在重根情形下,得到了一种不需要二阶导数且具有二阶收敛速度的算法. 最后给出算例以说明该算法对重根求解的有效性.

1 优化求根
Extraction of roots using optimization technology

定理 1 假设 $f(x)\in C[a,b]$,令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

1) 若 $x^*\in(a,b)$ 是区间 $[a,b]$ 上的单根,则函数 $F(x)$ 在 x^* 点取得极值;

2) $F(x)$ 在 x^* 取得极值,则 x^* 为非线性方程 $f(x)=0$ 的根.

证明 1) 因为 x^* 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间上的单根,则存在 x^* 的一个邻域 $(x^*-\delta,x^*+\delta)\subset[a,b]$(其中 $\delta>0$)使得

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases}f(x)\leqslant 0, x\in(x^*,x^*+\delta),\\ f(x)\geqslant 0, x\in(x^*-\delta,x^*);\end{cases}$$

或

$$\mathrm{II}\quad\begin{cases}f(x)\geqslant 0, x\in(x^*,x^*+\delta),\\ f(x)\leqslant 0, x\in(x^*-\delta,x^*).\end{cases}$$

$\forall x\in(x^*-\delta,x^*+\delta)$,

$$F(x^*)=\int_a^{x^*}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{x^*}f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)+\int_x^{x^*}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

对于情况 I

若 $x\in(x^*,x^*+\delta)$,则 $\int_x^{x^*}f(t)\mathrm{d}t=-\int_{x^*}^{x}f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$,此时 $F(x^*)\geqslant F(x)$;若 $x\in(x^*-\delta,x^*)$,则 $\int_x^{x^*}f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$,此时 $F(x^*)\geqslant F(x)$. 因此 $F(x)$ 在 x^* 处取得极大值.

对于情况Ⅱ

若 $x\in(x^*,x^*+\delta)$,则 $\int_x^{x^*}f(t)\mathrm{d}t=-\int_{x^*}^{x}f(t)\mathrm{d}t\leqslant 0$,此时 $F(x^*)\leqslant F(x)$;若 $x\in(x^*-\delta,x^*)$,则 $\int_x^{x^*}f(t)\mathrm{d}t\leqslant 0$. 此时 $F(x^*)\leqslant F(x)$. 因此 $F(x)$ 在 x^* 处取得极小值.

综合以上讨论得出,$F(x)$ 在 x^* 点取得极值.

2) $f(x)$ 连续,因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,$F(x)$ 在 x^* 取得极值,则

$$F'(x^*)=f(x^*)=0.$$

证毕.

由此看出,求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单根可转化为求函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的极值点问题. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续可导的,采用优化技术中的牛顿法求解,其迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{F'(x_k)}{F''(x_k)},$$

即

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{1}$$

由迭代格式(1)可看出这其实就是非线性方程求根的 Newton-Raphson 方法. 众所周知,该算法具有局部的二阶收敛速度(参见文献[7-8]).

2 重根情形
The case of multiple roots

由前文的分析可知,当 x^* 为 $f(x)=0$ 的单根时,迭代格式(1)具有二阶的收敛速度. 对于重根情形,Newton-Raphson 方法只有线性的收敛速度. 要得到局部二阶收敛的求根算法,传统方法中要么需要重根的重数信息,要么需要 $f(x)$ 的二阶导数. 下面给出一种既不需要重数信息,又不需要二阶导数信息,且具有二阶收敛速度的求根算法. 首先给出如下定理:

定理 2 设 x^* 是 $f(x)$ 的 $m(m\geqslant 2)$ 重零点,则 x^* 是函数

$$K(x)=\frac{\alpha f^2(x)}{f(x+\alpha f(x))-f(x)} \tag{2}$$

的单重零点,其中 $\alpha\neq 0$.

证明 假设 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$,其中 $g(x^*)\neq 0$. 令

$$S(x)=f(x+\alpha f(x))-f(x),$$

则

$$\begin{aligned}S(x)&=\\(x+\alpha f(x)-x^*)^m g(x+\alpha f(x))-(x-x^*)^m g(x)&=\\ \Big[(x-x^*)^m+m\alpha f(x)(x-x^*)^{m-1}&+\\ \frac{m(m-1)}{2}\alpha^2 f^2(x)(x-x^*)^{m-2}+\cdots&+\\ \alpha^m f^m(x)\Big]g(x+\alpha f(x))-(x-x^*)^m g(x)&=\\ m\alpha(x-x^*)^{2m-1}g(x)g(x+\alpha f(x))&+\\ \Big[\frac{m(m-1)}{2}\alpha^2(x-x^*)^{3m-2}g^2(x)+\cdots&+\\ \alpha^m(x-x^*)^{m^2}g^m(x)\Big]g(x+\alpha f(x))&+\\ (x-x^*)^m[g(x+\alpha f(x))-g(x)]&.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}T(x)=\Big[\frac{m(m-1)}{2}\alpha^2(x-x^*)^{3m-2}g^2(x)+\cdots+\\ \alpha^m(x-x^*)^{m^2}g^m(x)\Big]g(x+\alpha f(x))+\\ (x-x^*)^m[g(x+\alpha f(x))-g(x)].\end{aligned}$$

由于 x^* 是 $f(x)$ 的 $m(m\geqslant 2)$ 重零点,x^* 应至少是 $g(x+\alpha f(x))-g(x)$ 的 m 重零点,因此 x^* 应是

$$(x-x^*)^m[g(x+\alpha f(x))-g(x)]$$

的 $2m$ 重零点,从而 $T(x)$ 可写成

$$T(x)=(x-x^*)^{2m}H(x)$$

的形式,也就是

$$\begin{aligned}S(x)=m\alpha(x-x^*)^{2m-1}g(x)g(x+\alpha f(x))+\\ (x-x^*)^{2m}H(x).\end{aligned}$$

由此 $K(x)$ 可化为

$$K(x)=\frac{\alpha(x-x^*)g^2(x)}{m\alpha g(x)g(x+\alpha f(x))+(x-x^*)H(x)},$$

而 $f(x^*)=0$,$g(x^*)\neq 0$,因此

$$g(x^*+\alpha f(x^*))\neq 0,$$

也就是说 x^* 是 $K(x)$ 单重零点. 证毕.

根据定理2,为求非线性方程 $f(x)=0$ 的重根,可构造形如式(2)的 $K(x)$,利用式(1)得到迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{M(x_k)}{N(x_k)}. \tag{3}$$

其中:

$$M(x_k)=f(x_k)[f(x_k+\alpha f(x_k))-f(x_k)]; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}N(x_k)=f'(x_k)[2f(x_k+\alpha f(x_k))-f(x_k)(1+\alpha f'(x_k+\\ \alpha f(x_k)))]-f(x_k)f'(x_k+\alpha f(x_k)).\end{aligned} \tag{5}$$

由文献[7-8]可知,当 x_0 充分靠近 x^* 时该迭代格式具有局部二阶的收敛速度.

下面给出求重根的具体算法.

输入　初始值 x_0;误差限 ε;最大迭代次数 m 及参数 α.

输出　近似解 x^* 或失败信息.

步骤 1　$p_0 \leftarrow x_0$.

步骤 2　对 $i=1,2,\cdots,m$,做步骤 3—4.

步骤 3　$p \leftarrow p_0 - M(p_0)/N(p_0)$,其中 $M(.)$,$N(.)$ 如式(4)、(5).

步骤 4　若 $|p-p_0|<\varepsilon$,则输出 p,停机,否则 $p \leftarrow p_0$.

步骤 5　输出('Method failed');停机.

3　数值试验

Numerical experiments

由于单根情形下,本文所给的算法跟 Newton-Raphson 方法相同,因此仅给出重根的实验结果. 考虑如下问题:

问题 1　$f(x)=x^4-4x^2+4$;

问题 2　$f(x)=e^x-1-x$;

问题 3　$f(x)=\left(\sin(x)-\dfrac{x}{2}\right)^2$;

问题 4　$f(x)=(x-1)^3$;

问题 5　$f(x)=x^3-x^2-8x+12$.

问题 1 中 $x=\sqrt{2}$ 是二重根,问题 2 和 3 中 $x=0$ 都是二重根,问题 4 中 $x=1$ 是三重根,问题 5 中 $x=2$ 是二重根. 采用的精度均为 $\varepsilon=10^{-9}$,α 均取 1. 表 1 将本文方法与 Newton-Raphson 方法的结果比较,从表中可看出本文所给方法比传统的 Newton-Raphson 方法有较快的收敛速度,并且不需要二阶导数信息和根的重数信息.

表 1　本文方法与 Newton-Raphson 方法的比较

Table 1　The comparison between the methods in this paper and Newton-Raphson method

问题	根	重数	初值	本文方法迭代次数	Newton 法迭代次数
1	$\sqrt{2}$	2	1.5	5	25
2	0	2	0.5	11	27
3	0	2	0.75	6	28
4	1	3	1.5	6	48
5	2	2	2.2	6	25

参考文献

References

[1] Weerakoon S,Fernando T G I. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence[J]. Appl Math Lett,2000,13(8):87-93

[2] Jain P. Steffensen type methods for solving non-linear equations[J]. Appl Math Comput,2007,194(2):527-533

[3] Gran M,Diaz-Barrero J L. An improvement to Ostrowski root-finding method[J]. Appl Math Comput,2006,173(1):450-456

[4] Kou J,Li Y,Wang X. Efficient continuation Newton-like method for solving system of nonlinear equations[J]. Appl Math Comput,2006,174(2):846-853

[5] Amat S,Busquier S,Gutierrez J M. Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations [J]. J Comput Appl Math,2003,157(1):197-205

[6] Ozban A Y. Some new variants of Newton's method [J]. Appl Math Lett,2004,17(6):677-682

[7] Argyros I K. Convergence and application of Newton type iterations [M]. New York:Springer Verlag Publ,2008

[8] Gautschi W. Numerical analysis:an introduction[M]. Birkhauser,1997

A second-order iterative method for extracting multiple roots of nonlinear equations

YUAN Yuan[1]　YANG Jianwei[1]

1　College of Math. & Physics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing　210044

Abstract　This paper concerns the problem of solving nonlinear equations. It is shown that solving nonlinear equations is equivalent to finding out the extremum of function. Applying Newton method of unconstrained optimization technology,the algorithm we have obtained for single root is equivalence to New-Raphson's algorithm;and for multiple roots,the root-extracting algorithm having second-order convergence rate is proposed without calculating 2-order derivatives.

Key words　extraction of roots using optimization technology;Newton method;iteration method;multiple root