文章编号:1674-7070(2010)01-0068-03

受迫广义 Klein-Gordon 方程的孤子近似解

石兰芳[1,2]　周先春[3]

摘要

利用同伦映射方法和理论讨论了一类受迫广义非线性 Klein-Gordon 方程,在适当的条件下,较简捷地得到孤波的任意次精度的近似解.

关键词

Klein-Gordon 方程;非线性;孤子;同伦映射;近似解

中图分类号 O175.29
文献标志码 A

收稿日期 2009-09-18
资助项目 国家自然科学基金(40876010);国家重大公益性技术前期预研基金(GYHY200806029)

作者简介

石兰芳,女,博士生,讲师,主要研究偏微分方程奇摄动理论. shilf2008@nuist.edu.cn

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044
2 河海大学 理学院,南京,210098
3 南京信息工程大学 电子信息与工程学院,南京,210044

0 引言
Introduction

近 30 a 来,非线性科学得到了蓬勃发展,现已成为当代自然科学的前沿学科. 在非线性科学中,非线性波动方程的研究非常活跃. 非线性波动方程本身蕴涵着许多丰富的未被发现的复杂而奇妙的现象,因而受到国际数学界和物理学界的充分重视. 许多数学家、物理学家为此做了大量的工作,发现孤立子理论中蕴藏着一系列行之有效的构造显示精确解的有效方法,如齐次平衡法[1]、Jacobi 椭圆函数展开法[2]、混合指数法[3]、试探函数法[4]、双曲正切函数展开法[5]等. 然而能求出精确解的非线性波动方程毕竟是少数,人们不得不利用近似求解的方法,先后发展了 Adomian 分解法[6]、Pads 逼近法[7]、同伦分析法[8]来近似求解非线性波动方程.

1 受迫广义 Klein-Gordon 方程和同伦映射
Forced generalized Klein-Gordon equation and homotopic mapping

本文在前人工作的基础上,考虑如下一类受迫广义 Klein-Gordon 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 u + \lambda u^3 = f(t,x,u,u_x,u_t), \tag{1}$$

其中:m,λ 为常数,且 $\lambda<0$;而 f 为受迫项,它是关于其变量在对应的区域内为充分光滑的函数.

首先考虑与式(1)对应的无受迫项情形下的 Klein-Gordon 方程[9]

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 u + \lambda u^3 = 0, \quad \lambda < 0. \tag{2}$$

由文献[9]知,方程(2)有如下单孤子精确解:

$$\bar{u}(t,x) = \frac{m}{\sqrt{-\lambda}}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(\beta^2-1)}}(x+\beta t+c). \tag{3}$$

其中 $c,\beta(\beta^2>1)$ 为任意常数,它们可由 Klein-Gordon 方程受迫的具体条件来确定.

由于方程(1)还具有非零受迫项 $f(t,x,u,u_x,u_t)$,它一般不能求得显式解析精确解,为此,可以构造其近似解.

为了得到方程(1)的近似解析解,引入如下的一个同伦映射 $H(u,s):R\times I\rightarrow R$[10-11]

$$H(u,s)=L(u)-L(v)+s\left[L(v)+\lambda u^3-f(t,x,u,u_x,u_t)\right],\tag{4}$$

其中：$R=(-\infty,+\infty)$；$I=[0,1]$；v 为方程(1)的初始近似函数，它由后文的式子具体确定；而线性算子 L 为

$$L(u)=u_{tt}-u_{xx}+m^2u.$$

显然，由关系式(4)，可知 $H(u,1)=0$ 与方程(1)相同. 故方程(1)的解 $u(t,x)$ 就是 $H(u,s)=0$ 的解当 $s\to1$ 的情形.

2 孤波解的近似式

The approximate formula of solitary wave solution

令

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(t,x)s^i,\tag{5}$$

将式(5)代入 $H(u,s)=0$，比较方程 $H(u,s)=0$ 关于 s 的同次幂的系数. 由 s 的零次幂的系数得

$$L(u_0)=L(v),\tag{6}$$

取 v 为方程(2)的孤子精确解 $\bar{u}$，于是由式(3)、(6)得到

$$u_0(t,x)=\frac{m}{\sqrt{-\lambda}}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(\beta^2-1)}}(x+\beta t+c).\tag{7}$$

在 $H(u,s)=0$ 中，取关于 s 的一次幂的系数得

$$L(u_1)=-L(v)-\lambda u_0^3+f\Big(t,x,u_0,(u_0)_x,(u_0)\Big),\tag{8}$$

式(8)中 u_0 由式(7)表示，由式(2)、(3)、(7)，式(8)可简化为

$$L(u_1)=f(t,x,u_0,(u_0)_x,(u_0)_t),\tag{9}$$

由式(7)、(9)并利用 Fourier 变换，可得

$$u_1(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_1\cos\sqrt{m^2+\alpha^2}t+B_1\sin\sqrt{m^2+\alpha^2}t\right]\exp(i\alpha x)\mathrm{d}\alpha,\tag{10}$$

其中：

$$A_1=\frac{1}{(m^2+\alpha^2)^{\frac12}}\int_0^t\left[\cos\sqrt{m^2+\alpha^2}\tau\right]\cdot f\Big(t,x,u_0,(u_0)_x,(u_0)_\tau\Big)\mathrm{d}\tau;\tag{11}$$

$$B_1=\frac{-1}{(m^2+\alpha^2)^{\frac12}}\int_0^t\left[\sin\sqrt{m^2+\alpha^2}\tau\right]\cdot f\Big(t,x,u_0,(u_0)_x,(u_0)_\tau\Big)\mathrm{d}\tau.\tag{12}$$

由式(4)，比较 $H(u,s)=0$ 的 s 的二次幂的系数得

$$L(u_2)=-3\lambda {u_0}^2u_1+F(u_0,u_1),\tag{13}$$

其中，u_0,u_1 分别由式(7)、(10)表示. 而

$$F(u_0,u_1)=\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(f\left(t,x,\sum_{i=0}^{\infty}u_is^i,\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_is^i\right)_x,\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_is^i\right)_t\right)\right)\right]_{s=0}.$$

同样，不难得到方程(13)的解为

$$u_2(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_2\cos\sqrt{m^2+\alpha^2}t+B_2\sin\sqrt{m^2+\alpha^2}t\right]\exp(i\alpha x)\mathrm{d}\alpha,\tag{14}$$

其中：

$$A_2=\frac{1}{(m^2+\alpha^2)^{\frac12}}\int_0^t\left[\cos\sqrt{m^2+\alpha^2}\tau\right]\cdot\left[-3\lambda u_0^2u_1+F(u_0,u_1)\right]\mathrm{d}\tau;\tag{15}$$

$$B_2=\frac{-1}{(m^2+\alpha^2)^{\frac12}}\int_0^t\left[\sin\sqrt{m^2+\alpha^2}\tau\right]\cdot\left[-3\lambda u_0^2u_1+F(u_0,u_1)\right]\mathrm{d}\tau.\tag{16}$$

于是由式(7)、(10)、(14)，广义受迫 Klein-Gordon 方程(1)孤子解的二次近似解 u_{hom} 为

$$u_{\mathrm{hom}}(t,x)=\frac{m}{\sqrt{-\lambda}}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(\beta^2-1)}}(x+\beta t+c)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(A_1+A_2)\cos\sqrt{m^2+\alpha^2}t+(B_1+B_2)\sin\sqrt{m^2+\alpha^2}t\right]\exp(i\alpha x)\mathrm{d}\alpha.\tag{17}$$

其中：$c,\beta(\beta^2>1)$ 为任意常数；$A_i,B_i(i=1,2)$ 分别由式(11)、(12)、(15)、(16)表示.

用同样的方法比较关系式 $H(u,s)=0$ 关于 s 的更高次幂的系数，可得到受迫广义 Klein-Gordon 方程(1)的更高次扰动孤子近似解.

3 举例

Example

若受迫广义 Klein-Gordon 方程(1)中的受迫项是微扰的，并设 $f=\varepsilon u^7$，其中 ε 为正的小参数. 这时相应的微扰方程为

$$u_{tt}-u_{xx}+m^2u+\lambda u^3=\varepsilon u^7,\quad 0<\varepsilon\ll1.\tag{18}$$

由上述计算方法，不难得到受迫广义 Klein-Gordon 方程(14)的孤子解 $u(t,x,\varepsilon)$ 关于 s 的零次幂和一次幂的系数分别为

$$u_0(t,x)=\frac{m}{\sqrt{-\lambda}}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(\beta^2-1)}}(x+\beta t+c);\tag{19}$$

$$u_1(t,x)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_1\cos\sqrt{m^2+\alpha^2}t+B_1\sin\sqrt{m^2+\alpha^2}t\right]\exp(i\alpha x)\mathrm{d}\alpha.\tag{20}$$

其中：

$$A_1 = \frac{1}{(m^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^t [u_0^7 \cos\sqrt{m^2+\alpha^2}\tau]\mathrm{d}\tau; \quad (21)$$

$$B_1 = \frac{-1}{(m^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^t [u_0{}^7 \sin\sqrt{m^2+\alpha^2}\tau]\mathrm{d}\tau; \quad (22)$$

$u_0(t,x)$由关系式(19)表示.

于是由式(19)、(20)可得受迫广义 Klein-Gordon 方程(18)的孤子解的一次近似 $u_{1\mathrm{hom}}(t,x,\varepsilon)$为

$$u_{1\mathrm{hom}}(t,x,\varepsilon) = \frac{m}{\sqrt{-\lambda}}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(\beta^2-1)}}(x+\beta t+c) + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A_1\cos\sqrt{m^2+\alpha^2}t + B_1\sin\sqrt{m^2+\alpha^2}t]\cdot \exp(i\alpha x)\mathrm{d}\alpha, \quad 0<\varepsilon\ll 1. \quad (23)$$

其中,A_1、B_1 由式(21)、(22)表示. 还可由相同的方法得到微扰方程(18)的扰动孤子解 $u(t,x,\varepsilon)$的更高次近似.

4 结论

Conclusion

由上述分析求解过程可看出,同伦映射方法是一个近似的解析方法,它不同于一般的数值解法. 用同伦映射方法求得的解还可以继续进行解析运算,从而可以求得精度较高的非线性问题的解;同时同伦映射方法也不同于一般的摄动展开法,摄动展开法的有效性过分依赖于小参数,而同伦映射方法并无此限制.

参考文献

References

[1] 范恩贵,张鸿庆. 齐次平衡法若干新的应用[J]. 数学物理学报,1999,19(3):286-292
FAN Engui, ZHANG Hongqing. Some new applications of homogeneous balance method [J]. Acta Mathematica Scientia, 1999, 19(3):286-292

[2] 刘式适,付遵涛,刘式达,等. Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用[J]. 物理学报,2001,50(11):2068-2073
LIU Shishi, FU Zuntao, LIU Shida, et al. The expansion method used for the Jacobi elliptic function and its applications to nonlinear wave equation [J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(11):2068-2073

[3] 徐桂琼,李志斌. 构造非线性发展方程孤波解的混合指数方法[J]. 物理学报,2002,51(5):946-950
XU Guiqiong, LI Zhibin. Solitary wave solutions of a nonlinear evolution equation using mixed exponential method [J]. Acta Physica Sinica, 2002, 51(5):946-950

[4] 刘式适,付遵涛,刘式达,等. 求某些非线性偏微分方程特解的一个简洁方法[J]. 应用数学和力学,2001,22(3):281-286
LIU Shishi, FU Zuntao, LIU Shida, et al. A concise method of finding particular solutions to some nonlinear PDE [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(3):281-286

[5] 李志斌,张善卿. 非线性波方程准确孤立波解的符号计算[J]. 数学物理学报,1997,17(1):81-89.
LI Zhibin, ZHANG Shanqing. Symbolic computation of exact solitary wave solutions to nonlinear wave equations [J]. Acta Mathematica Scientia, 1997, 17(1):81-89

[6] Wang Y Y, Dai C Q, Zhang J F. Solitary wave solutions of discrete complex Ginzburg-Landau equation by modified Adomian decomposition method [J]. Communications in Theoretical Physics, 2009, 51(1):81-89

[7] Baker G A, Graves-Morris P. Essentials of Pade approximant[M]. London: Cambridge University Press, 1996

[8] 莫嘉琪,张伟江,陈贤峰. 强非线性发展方程孤波同伦解法[J]. 物理学报,2007,56(11):6169-6172
MO Jiaqi, ZHANG Weijiang, CHEN Xianfeng. The homotopic solving method of solitary wave for strong nonlinear evolution equation [J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(11):6169-6172

[9] 范恩贵,张鸿庆. 非线性波动方程的孤波解[J]. 物理学报,1997,46(7):1254-1258
FAN Engui, ZHANG Hongqing. The solitary wave solutions to a class of nonlinear wave equations [J]. Acta Physica Sinica, 1997, 46(7):1254-1258

[10] Liao S J. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method [M]. New York: CRC Press Co, 2004

[11] 何吉欢. 工程和科学计算中的近似非线性分析方法[M]. 郑州:河南科学技术出版社,2002
HE Jihuan. Approximate analytical methods in engineering and scientific computation [M]. Zhengzhou: Henan Science and Technology Press, 2002

Approximate solution to soliton for a forced generalized Klein-Gordon equation

SHI Lanfang[1,2] ZHOU Xianchun[3]

1 College of Mathematics and Physics, Nanjing University of information Science and Technology, Nanjing 210044

2 College of Mathematics, Hohai University, Nanjing 210098

3 College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of information Science and Technology, Nanjing 210044

Abstract In this paper, a class of forced generalized nonlinear Klein-Gordon equation is discussed by using the homotopic mapping method and theory. Under appropriate conditions, the approximate solution with arbitrary degree of precision for the solitary wave can be obtained simply and conveniently.

Key words Klein-Gordon equation; nonlinear; soliton; homotopic mapping; approximate solution