文章编号:1674-7070(2010)01-0057-05

一类三维二阶常微分方程组边值问题正解的存在性

夏大峰[1]　洪子康[1]　姜威[1]　符美芬[1]

摘要

利用 Krasnonel'skii 不动点定理,研究了二阶微分方程组

$$\begin{cases} -u''=a(t,w)f(u,v),\\ -v''=b(t,w)g(u,v),\\ -w''=h(t,u,v),\\ u(0)=u(1)=v(0)=v(1)=\\ \quad w(0)=w(1)=0 \end{cases}$$

的边值问题在某些条件下正解的存在性.

关键词

常微分方程组;边值问题;正解

中图分类号 O175.8

文献标志码 A

0　引言
Introduction

关于二阶常微分方程边值问题正解的存在性研究已有许多丰富的结果[1-5],二维的二阶常微分方程组边值问题正解存在性的研究虽然困难、复杂,但也有了一些结果[6].相比之下,三维的情况就更复杂,内容也更丰富,目前关于这方面的研究很少.本文利用 Krasnonel'skii 锥拉伸锥压缩不动点定理,研究了下列二阶微分方程组边值问题在某些条件下正解的存在性问题(即解的分量中至少有一个为正函数).

$$\begin{cases} -u''=a(t,w)f(u,v),\\ -v''=b(t,w)g(u,v),\\ -w''=h(t,u,v),\\ u(0)=u(1)=v(0)=v(1)=w(0)=w(1)=0. \end{cases} \tag{1}$$

其中:$f,g\in C\big([0,+\infty)\times[0,+\infty),[0,+\infty)\big)$;$a,b\in C\big([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty)\big)$,并存在$[0,1]$上的非负连续函数 $a_1(t),a_2(t)$ 及 $b_1(t),b_2(t)$,使得

$$a_1(t)\le a(t,w)\le a_2(t),(t,w)\in[0,1]\times[0,+\infty),\int_0^1 a_1(s)\mathrm{d}s>0;$$

$$b_1(t)\le b(t,w)\le b_2(t),(t,w)\in[0,1]\times[0,+\infty),\int_0^1 b_1(s)\mathrm{d}s>0;$$

$h\in C\big([0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty),[0,+\infty)\big)$,且当 $u+v>0$ 时有 $h(t,u,v)>0$.

1　预备知识与引理
Preliminaries and lemmas

首先给出本文关键的 Krasnonel'skii 锥拉伸锥压缩不动点定理.

引理 1[7-8]　设 B 是 Banach 空间,$K\subset B$ 是 B 中的锥,Ω_1 及 Ω_2 是 B 中的开子集,$0\in\Omega_1$ 且 $\bar\Omega_1\subset\Omega_2$,$T:K\cap(\bar\Omega_2\setminus\Omega_1)\to K$ 是全连续算子.如果以下两条件之一成立:

1) $\|Tu\|\le\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\ge\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$;

2) $\|Tu\|\ge\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\le\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$.

那么 T 在 $K\cap(\bar\Omega_2\setminus\Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

收稿日期 2009-09-28

资助项目 国家自然科学基金(60904028)

作者简介

夏大峰,男,教授,主要研究拓扑学、常微分方程及其应用. xiadafeng@nuist.edu.cn

洪子康(通信作者),男,硕士生,研究方向为常微分方程. hzk852741@126.com.

1　南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

$f,g:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$为连续函数,并记

$$f^{\infty}=\lim_{\rho\to+\infty}\frac{f(u,v)}{\rho},\quad f_0=\lim_{\rho\to0}\frac{f(u,v)}{\rho},$$
$$g^{\infty}=\lim_{\rho\to+\infty}\frac{g(u,v)}{\rho},\quad g_0=\lim_{\rho\to0}\frac{g(u,v)}{\rho}.$$

其中,$\rho=\sqrt{u^2+v^2}$.

设$X=C[0,1]$, $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$,此时,$X$为Banach空间. 记$Y=X\times X$,对任意的$(u,v)\in Y$, $\|(u,v)\|=\max\{\|u\|,\|v\|\}$,则$Y$也为Banach空间. 令

$$P=\left\{u\in X\,\middle|\,u(t)\geqslant0,t\in[0,1]\right\},E=P\times P.$$

由$\int_0^1a_1(s)\mathrm{d}s>0$与$\int_0^1b_1(s)\mathrm{d}s>0$知:存在$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,使得:$\int_\alpha^{1-\alpha}a_1(s)\mathrm{d}s>0,\int_\alpha^{1-\alpha}b_1(s)\mathrm{d}s>0.$

定义:$K=\left\{u\in P\,\middle|\,u(t)\geqslant0,\min\limits_{t\in[\alpha,1-\alpha]}u(t)\geqslant\alpha\|u\|\right\}\subset P$ 显见,K是X中的正锥,$K\times K$是Y中的锥. 记

$$\Omega_l=\left\{(u,v)\in Y\,\middle|\,\|(u,v)\|<l\right\},$$

那么

$$\bar{\Omega}_l=\left\{(u,v)\in Y\,\middle|\,\|(u,v)\|\leqslant l\right\},$$
$$\partial\Omega_l=\left\{(u,v)\in Y\,\middle|\,\|(u,v)\|=l\right\}.$$

边值问题(1)有正解等价于下列积分方程组:

$$\begin{cases}u(t)=\int_0^1G(t,s)a\left(s,w(s)\right)f\left(u(s),v(s)\right)\mathrm{d}s,\\ v(t)=\int_0^1G(t,s)b\left(s,w(s)\right)g\left(u(s),v(s)\right)\mathrm{d}s,\\ w(t)=\int_0^1G(t,s)h\left(s,u(s),v(s)\right)\mathrm{d}s\end{cases}$$

有正解,也等价于下列积分方程组:

$$\begin{cases}u(t)=\int_0^1G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)\cdot\\ \qquad f(u(s),v(s))\mathrm{d}s,\\ v(t)=\int_0^1G(t,s)b\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)\cdot\\ \qquad g(u(s),v(s))\mathrm{d}s\end{cases}$$

有正解. 其中$G(t,s)$为格林函数:

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),&0\leqslant t\leqslant s\leqslant1;\\ s(1-t),&0\leqslant s\leqslant t\leqslant1.\end{cases}$$

易见

$$G(t,s)\leqslant G(s,s),\quad 0\leqslant t,s\leqslant1.\qquad(2)$$

为此定义积分算子$T_i:E\to P(i=1,2)$, $T:E\to E$如下:

$$T_1(u,v)(t)=\int_0^1G(t,s)a\left(t,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),v(x))dx\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s;$$

$$T_2(u,v)(t)=\int_0^1G(t,s)b\left(t,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)g(u(s),v(s))\mathrm{d}s;$$

$$T(u,v)=\left(T_1(u,v),T_2(u,v)\right).$$

边值问题(1)的正解存在性问题就转化为积分算子$T:E\to E$至少存在一个正的不动点.

引理 2 $T(K\times K)\subset K\times K$

证明 为证明$T(K\times K)\subset K\times K$,先证$T_1(K\times K)\subset K$.

对任意的$(u,v)\in K\times K$,由不等式(2)有

$$T_1(u,v)(t)=\int_0^1G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1G(s,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s.\qquad(3)$$

另外,对前文给定的$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$及$\forall t\in[\alpha,1-\alpha]$,有

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}=\begin{cases}\frac{t}{s},&t\leqslant s\\ \frac{1-t}{1-s},&s\leqslant t\end{cases}\geqslant\begin{cases}\frac{\alpha}{s},&t\leqslant s\\ \frac{\alpha}{1-s},&s\leqslant t\end{cases}\geqslant\alpha,$$

$$G(t,s)\geqslant\alpha G(s,s),\alpha\leqslant t\leqslant1-\alpha,0\leqslant s\leqslant1.\qquad(4)$$

于是对任意的$t\in[\alpha,1-\alpha]$,由式(4)有

$$T_1(u,v)(t)=\int_0^1G(t,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\alpha\int_0^1G(s,s)a\left(s,\int_0^1G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s.\qquad(5)$$

综合式(3)、(5)有

$$\min_{t\in[\alpha,1-\alpha]}T_1(u,v)(t)\geqslant\alpha\|T_1(u,v)\|,$$

故有$T_1(K\times K)\subset K$.

同理可证$T_2(K\times K)\subset K$. 这样就证明了$T(K\times K)\subset K\times K$.

2 主要定理
Main theorems

定理 如果下列两个条件之一满足:

1) $f^{\infty}=g^{\infty}=0$, $f_0=g_0=+\infty$;

2) $f^{\infty}=g^{\infty}=+\infty$, $f_0=g_0=0$.

那么,边值问题(1)或积分方程组(3)至少有一个正解.

证明 显然 T_1,T_2,T 均为全连续算子.

如果条件 1)成立,即 $f^\infty = g^\infty = 0, f_0 = g_0 = +\infty$. 由 $a_2(t), b_2(t)$ 在 $[0,1]$ 上的连续性知,存在 $M>1$,使得 $a_2(t) \leqslant M, b_2(t) \leqslant M$. 所以对任意的 $(t,w) \in [0,1]\times[0,+\infty)$,都有

$$a(t,w) \leqslant a_2(t) \leqslant M, b(t,w) \leqslant b_2(t) \leqslant M.$$

因为 $f^\infty = g^\infty = 0$,那么对 $\varepsilon = \frac{1}{2M}$,存在 $r>0$,当 $\rho = \sqrt{u^2+v^2} \geqslant r$ 时,都有 $f(u,v) < \frac{\rho}{2M}, g(u,v) < \frac{\rho}{2M}$,根据 f、g 的连续性知,f、g 在

$$\overline{B}(r) = \{(u,v) \mid \sqrt{u^2+v^2} \leqslant r, u \geqslant 0, v \geqslant 0\}$$

上有界,即存在 $N>0$,使得对 $\forall(u,v) \in \overline{B}(r)$,都有 $f(u,v) \leqslant N, g(u,v) \leqslant N$. 取 $R = M(2N+r)$,对

$$\forall(u,v) \in \overline{B}(2R) = \left\{(u,v) \mid u \geqslant 0, v \geqslant 0, \sqrt{u^2+v^2} \leqslant 2R\right\},$$

当 $\sqrt{u^2+v^2} \leqslant r$ 时,

$$\sqrt{[a_2(t)f(u,v)]^2 + [b_2(t)g(u,v)]^2} \leqslant \sqrt{2}MN < R < 2R, \quad (6)$$

当 $r < \sqrt{u^2+v^2} \leqslant 2R$ 时,

$$\sqrt{[a_2(t)f(u,v)]^2 + [b_2(t)g(u,v)]^2} < \rho \leqslant 2R. \quad (7)$$

由于 $G(s,s) = s(1-s) \leqslant \frac{1}{4}, s \in [0,1]$,所以对任意的 $(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_R$,于是由式(6)、(7)以及 $a(t,w) \leqslant a_2(t), (t,w) \in [0,1]\times[0,+\infty)$ 有

$$\begin{aligned} T_1(u,v)(t) &= \\ \int_0^1 G(t,s)a\left(s,\int_0^1 G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s &\leqslant \\ \int_0^1 G(s,s)a_2(s)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s &\leqslant \\ \frac{1}{4}\int_0^1 \left(a_2(s)\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s &\leqslant \\ \frac{1}{2}R. \end{aligned}$$

所以对任意的 $(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_R$,都有

$$\|T_1(u,v)\| < R = \|(u,v)\|.$$

同理,对任意的 $(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_R$,都有

$$\|T_2(u,v)\| < \|(u,v)\|.$$

所以对任意的 $(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_R$,都有

$$\|T(u,v)\| < \|(u,v)\|.$$

另外,由 $f_0 = g_0 = +\infty$,则对 $\forall H>0$,存在 $2\delta > 0(2\delta < r)$,当 $0 < \rho = \sqrt{u^2+v^2} < 2\delta$ 时,都有

$$f(u,v) > H\rho, g(u,v) > H\rho. \quad (8)$$

对

$$\forall(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_\delta,$$

$$\sqrt{u^2(t)+v^2(t)} \leqslant \sqrt{\|u\|^2+\|v\|^2} \leqslant \sqrt{2}\max\{\|u\|,\|v\|\} < 2\delta, \quad t \in [0,1].$$

由于 $a(t,w) \geqslant a_1(t), (t,w) \in [0,1]\times[0,+\infty)$,所以对 $\forall t \in [\alpha, 1-\alpha]$,由式(4)、(8)有

$$\begin{aligned} T_1(u,v)(t) &= \\ \int_0^1 G(t,s)a\left(s,\int_0^1 G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s &\geqslant \\ \int_\alpha^{1-\alpha} G(t,s)a\left(s,\int_0^1 G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s &\geqslant \\ \alpha\int_\alpha^{1-\alpha} G(s,s)a_1(s)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s &\geqslant \\ H\alpha\int_\alpha^{1-\alpha} G(s,s)a_1(s)\sqrt{u^2(s)+v^2(s)}\mathrm{d}s &\geqslant \\ H\alpha^2\max\{\|u\|,\|v\|\}\int_\alpha^{1-\alpha} G(s,s)a_1(s)\mathrm{d}s &= \\ H\alpha^2\|(u,v)\|\int_\alpha^{1-\alpha} G(s,s)a_1(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

取

$$H = \frac{2}{\alpha^2\int_\alpha^{1-\alpha} G(s,s)a_1(s)\mathrm{d}s},$$

则对 $\forall(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_\delta$,都有

$$T_1(u,v)(t) > \|(u,v)\|, t \in [\alpha, 1-\alpha].$$

于是对 $\forall(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_\delta$,都有

$$\|T_1(u,v)\| > \|(u,v)\|.$$

同理对 $\forall(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_\delta$,都有

$$\|T_2(u,v)\| > \|(u,v)\|.$$

所以对任意的 $(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_\delta$,都有

$$\|T(u,v)\| > \|(u,v)\|.$$

由引理 1,T 在 $(K\times K) \cap (\overline{\Omega}_R \setminus \Omega_\delta)$ 中至少有一个不动点,即边值问题(1)至少有一个正解.

如果条件 2)成立,即 $f^\infty = g^\infty = +\infty, f_0 = g_0 = 0$. 由 $f^\infty = g^\infty = +\infty$,对任意的 $H>0$,存在 $r>0$,当 $\rho = \sqrt{u^2+v^2} \geqslant r$ 时,都有

$$f(u,v) > H\rho, \quad g(u,v) > H\rho. \quad (9)$$

取 $R = \frac{2r}{\alpha}$,对 $\forall(u,v) \in (K\times K) \cap \partial\Omega_R$,当 $t \in [\alpha, 1-\alpha]$ 时

$$\sqrt{u^2(t)+v^2(t)} \geqslant \alpha\sqrt{\|u\|^2+\|v\|^2} \geqslant \sqrt{2}\alpha\max\{\|u\|,\|v\|\} = \sqrt{2}\alpha\|(u,v)\| > r.$$

由于 $a(t,w) \geqslant a_1(t), (t,w) \in [0,1]\times[0,+\infty)$,所以对 $\forall t \in [\alpha, 1-\alpha]$,由式(4)、(9)且类似于条件 1)的证明有

$$T_1(u,v)(t)=\int_0^1 G(t,s)a\left(s,\int_0^1 G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s\geqslant \sqrt{2}H\alpha^2\|(u,v)\|\int_\alpha^{1-\alpha}G(s,s)a_1(s)\mathrm{d}s.$$

取

$$H=\frac{1}{\alpha^2\int_\alpha^{1-\alpha}G(s,s)a_1(s)\mathrm{d}s},$$

则对 $\forall(u,v)\in(K\times K)\cap\partial\Omega_R$,都有

$$T_1(u,v)(t)>\|(u,v)\|,\quad t\in[\alpha,1-\alpha].$$

类似于条件 1)的证明有:对任意的 $(u,v)\in(K\times K)\cap\partial\Omega_R$,都有

$$\|T(u,v)\|>\|(u,v)\|.$$

另外,由 $f_0=g_0=0$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<\rho=\sqrt{u^2+v^2}<2\delta$ 时,有

$$f(u,v)<\varepsilon\rho,g(u,v)<\varepsilon\rho,\tag{10}$$

对 $\forall(u,v)\in(K\times K)\cap\partial\Omega_\delta$,有

$$\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}\leqslant\sqrt{\|u\|^2+\|v\|^2}\leqslant\sqrt{2}\max\{\|u\|,\|v\|\}=\sqrt{2}\|(u,v)\|<2\delta.$$

所以,由 $a(t,w)\leqslant a_2(t)$,$(t,w)\in[0,1]\times[0,+\infty)$ 及式(10)且类似于条件 1)的证明有

$$T_1(u,v)(t)=\int_0^1 G(t,s)a\left(s,\int_0^1 G(s,x)h(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x\right)f(u(s),v(s))\mathrm{d}s\leqslant \sqrt{2}\varepsilon\|(u,v)\|\int_0^1 G(s,s)a_2(s)\mathrm{d}s.$$

取

$$\varepsilon=\frac{1}{2\int_0^1 G(s,s)a_2(s)\mathrm{d}s},$$

则对 $\forall(u,v)\in(K\times K)\cap\partial\Omega_\delta$,都有

$$\|T_1(u,v)\|<\|(u,v)\|.$$

同样对 $\forall(u,v)\in(K\times K)\cap\partial\Omega_\delta$,也有

$$\|T_2(u,v)\|<\|(u,v)\|.$$

所以,对 $\forall(u,v)\in(K\times K)\cap\partial\Omega_\delta$,都有

$$\|T(u,v)\|<\|(u,v)\|.$$

由引理 1,T 在 $(K\times K)\cap(\overline{\Omega}_R\backslash\Omega_\delta)$ 中至少有一个不动点,即边值问题(1)至少有一个正解.

3 应用举例
Examples of application

例 1 考虑下列二阶微分方程组边值问题

$$\begin{cases}-u''=\ln\left(1+t+\dfrac{1}{1+w^2}\right)(u^2+v^2),\\ -v''=(u+v)^2\arctan\dfrac{1+t}{2+\sin w},\\ -w''=1+t^2+(u+v^2)e^t,\\ u(0)=u(1)=v(0)=v(1)=w(0)=w(1)=0.\end{cases}$$

令

$$a(t,w)=\ln\left(1+t+\frac{1}{1+w^2}\right),$$

$$b(t,w)=\arctan\frac{1+t}{2+\sin w},$$

$$f(u,v)=u^2+v^2,$$

$$g(u,v)=(u+v)^2,$$

$$h(t,u,v)=1+t^2+(u+v^2)e^t.$$

则

$$f^\infty=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to+\infty}\frac{u^2+v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to+\infty}\sqrt{u^2+v^2}=+\infty,$$

$$g^\infty=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to+\infty}\frac{(u+v)^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to+\infty}\left(\frac{u^2+v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{2uv}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)=+\infty,$$

$$f_0=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to0}\frac{u^2+v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to0}\sqrt{u^2+v^2}=0;$$

$$g_0=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to0}\frac{(u+v)^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to0}\left(\frac{u^2+v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{2uv}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)=\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to0}\frac{2uv}{\sqrt{u^2+v^2}}\leqslant\lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to0}\frac{2uv}{\sqrt{2uv}}=0$$

满足定理中的条件 2),所以该二阶微分方程组边值问题至少存在一个正解.

例 2 考虑下列二阶微分方程组边值问题

$$\begin{cases}-u''=\ln\left(2+\dfrac{t}{1+w^2}\right)(\sqrt{u}+\sqrt{v}),\\ -v''=\dfrac{t}{2+\sin w}(\arctan\sqrt{u}+\sqrt{v}),\\ -w''=t^2(u+v)e^{uv},\\ u(0)=u(1)=v(0)=v(1)=w(0)=w(1)=0.\end{cases}$$

令

$$a(t,w)=\ln\left(2+\frac{t}{1+w^2}\right),$$

$$b(t,w)=\frac{1+t}{2+\sin w},$$

$$f(u,v)=\sqrt{u}+\sqrt{v},$$

$$g(u,v) = \arctan\sqrt{u} + \sqrt{v},$$
$$h(t,u,v) = t^2(u+v)e^{uv}.$$

则

$$f^{\infty} = \lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to+\infty} \frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) = 0,$$

$$g^{\infty} = \lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to+\infty} \frac{\arctan\sqrt{u}+\sqrt{v}}{\sqrt{u^2+v^2}} \leqslant \lim_{\sqrt{u^2+v^2}\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}+\sqrt{v}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0.$$

类似以上方法易证$f_0 = g_0 = +\infty$,满足定理中的条件1),所以该二阶微分方程组边值问题至少存在一个正解.

参考文献
References

[1] Fink A M. Positive solutions of second order systems of boundary value problems[J]. J Math Anal Appl,1993,188:93-108

[2] 马如云. 奇异二阶边值问题的正解[J]. 数学学报,1998,42(1):1225-1230
MA Ruyun. Positive solutions of singular second-order boundary value problems[J]. Acta Mathematicae Sinica,1998,42(1):1225-1230

[3] 李仁贵,刘立山. 二阶奇异非线性微分方程边值问题的正解[J]. 应用数学和力学,2001,22(2):435-439
LI Rengui,LIU Lishan. Positive solutions of boundary value problems for second order singular nonlinear differential equations[J]. Applied Mathematics and Mechanics,2001,22(2):435-439

[4] 程建纲. 二阶边值问题的正解[J]. 数学学报,2001,44(3):429-436
CHENG Jiangang. Positive solutions of second-order boundary value problems[J]. Acta Mathematicae Sinica,2001,44(3):429-436

[5] 孙伟平,葛渭高. 一类非线性边值问题正解的存在性[J]. 数学学报,2001,44(4):577-580
SUN Weiping,GE Weigao. The existence of positive solutions for a class of nonlinear boundary value problems[J]. Acta Mathematicae Sinica,2001,44(4):577-580

[6] 杨志林,孙经先. 非线性二阶常微分方程组边值问题的正解[J]. 数学学报,2004,47(1):111-118
YANG Zhilin,SUN Jingxian. Positive solutions of boundary value problems for systems of nonlinear second order ordinary differential equations[J]. Acta Mathematicae Sinica,2004,47(1):111-118

[7] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 2版. 济南:山东科学技术出版社,2001:314
GUO Dajun. Nonlinear functional analysis[M]. 2nd ed. The second edition. Jinan:Shan Dong Science and Technology Press,2001:314

[8] GUO Dajun,Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. Orlando:Academic Press,1988:94-95

Existence of positive solutions of a class of boundary value problems for systems of 3-dimensional second order ordinary differential equations

XIA Dafeng[1] HONG Zikang[1] JIANG Wei[1] FU Meifen[1]

1 College of Mathematics & Physics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract This paper is concerned with the existence of positive solutions of a class of boundary value problems for systems of second order ordinary differential equations

$$\begin{cases} -u'' = a(t,w)f(u,v), \\ -v'' = b(t,w)g(u,v), \\ -w'' = h(t,u,v), \\ u(0)=u(1)=v(0)=v(1)=w(0)=w(1)=0. \end{cases}$$

Under the suitable conditions, the existence of positive solutions is established by using the Krasnonel'skii's fixed point theorem.

Key words systems of ordinary differential equations;boundary value problems;positive solutions