文章编号:1674-7070(2009)04-0382-03

一类奇异边值问题三解的存在性

姜威[1]　洪子康[1]

摘要

利用 Leggett-Williams 不动点定理,研究了一类含有 p-Laplacian 算子的非线性奇异边值问题 3 个解的存在性,获得了这类方程存在 3 个解的充分条件. 结果表明:如果非线性奇异项在其定义域内满足适当的条件,那么该问题必存在 3 个解.

关键词

p-Laplacian 算子;Leggett-Williams 定理;不动点;锥

中图分类号 O175.8
文献标志码 A

收稿日期 2009-08-19

作者简介

姜威,女,硕士生,主要研究方向为微分方程及其应用. jiangwei2623@yahoo.cn

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

0 引言

Introduction

由于 p-Laplacian 边值问题具有广泛的数理应用背景,近年来对它的研究非常活跃[1-4]. 对于算子型奇异边值问题也有很好的研究结果[1-3]. 研究这类方程的一般方法有 Krasnoselskii 不动点定理、拓扑度理论、Schauder 不动点理论、上下解方法、打靶法等,但利用这些方法得到的大多是 1 个解或 2 个解的情况,而关于 3 个解的结果并不多见.

文献[1]利用锥上的不动点定理建立了一维 p-Laplacian 方程

$$\begin{cases}(\psi_p(u'))' + a(t)f(u) = 0, & 0 < t < 1;\\ u(0) = a, & u'(1) = b\end{cases}$$

1 个正解和 2 个正解的存在性条件,其中: $\psi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1$; $a, b \geqslant 0$.

文献[2]利用 Leggett-Williams 定理研究了一维奇异 p-Laplacian 方程

$$\begin{cases}(\varphi(u'))' + a(t)f(u) = 0, & 0 < t < 1;\\ u'(0) = u(1) = 0\end{cases}$$

3 个解的存在性,其中:$a(t)$ 在 $t=0,1$ 处奇异;$f(u)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续.

根据上述的结论,一个自然的问题:若 $f(t,u)$ 在 $t=0,1$ 处奇异,且不能分解为 $a(t)$ 与连续函数 $f(u)$ 乘积的形式,而在其它给定的条件下利用 Leggett-Williams 定理能否得到该类问题 3 个解的存在性条件呢? 本文受文献[1-2]的启发,讨论如下形式的边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))' + f(t,u) = 0, & 0 < t < 1;\\ u(0) = A, & u'(1) = B\end{cases} \tag{1}$$

3 个解的存在性条件,其中:$\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1$;$f \in C((0,1) \times [0,\infty), [0,\infty))$;$A, B \geqslant 0$.

显然,当 $A = B = 0$ 且 $f(t,u) = a(t)f(u)$ 时即为文献[2]中的情况,因此本文的讨论较文献[2]更具有一般性.

1 预备知识

Preliminary knowledge

令 $E = C[0,1]$,其中的范数定义为

$$\|u\| = \sup\left\{ \|u(t)\| \;\middle|\; 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\}.$$

显然,在该范数下 E 是一个 Banach 空间. 设 P 是 E 中的一个锥,且令

$$P_r = \left\{ x \in P \;\middle|\; \|x\| < r \right\},$$

$$\bar{P}_r = \left\{ x \in P \;\middle|\; \|x\| \leqslant r \right\}.$$

定义 1 若函数 $\alpha(x)$ 满足 $\alpha:P\to[0,\infty]$ 连续且 $\alpha(tx+(1-t)y) \geqslant t\alpha(x)+(1-t)\alpha(y)$, 对 $\forall x, y\in P, 0\leqslant t\leqslant 1$, 则称 $\alpha(x)$ 为 P 上的非负连续凹泛函.

定义 2 函数 $u\in C'[0,1]$ 称为方程(1) 的解,是指 $\varphi_p(u')$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续,且 u 满足式(1).

以下用 $P(\alpha,a,b)$ 表示集合

$$\left\{ x \;\middle|\; x \in P, a \leqslant \alpha(x), \|x\| \leqslant b \right\}.$$

这里 $0<a<b$, 易知, $P(\alpha,a,b)$ 是有界凸闭集.

引理[5] (Leggett-Williams 定理)

设 $A:\bar{P}_c\to\bar{P}_c$ 全连续,且存在非负连续凹泛函 $\alpha(x)$, 满足 $\alpha(x)\leqslant\|x\|(\forall x\in\bar{P}_c)$, 又设存在 $0<d<a<b\leqslant c$, 满足

1) $\left\{ x \;\middle|\; x\in P(\alpha,a,b), \alpha(x)>a \right\}\neq\varnothing$, 当 $x\in P(\alpha,a,b)$ 时,有 $\alpha(Ax)>a$;

2) 当 $x\in\bar{P}_d$ 时,有 $\|Ax\|<d$;

3) 当 $x\in P(\alpha,a,c)$ 且 $\|Ax\|>b$ 时,有 $\alpha(Ax)>a$.

则 A 在 $\bar{P}_c$ 中至少有 3 个不动点 u_1,u_2 和 u_3, 且满足 $\|u_1\|<d, \alpha(u_2)>a, \|u_3\|>d$ 且 $\alpha(u_3)<a$.

2 主要结果

Principal results

本文定义算子 $T:P\to C^1[0,1]$ 为

$$Tu(t) = A + \int_0^t \varphi_q\left(\varphi_p(B) + \int_s^1 f(r,u(r))\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

其中 φ_q 是 φ_p 的反函数,即

$$(\varphi_p)^{-1} = \varphi_q, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

显然, T 的定义是合理的,且式(1)的解等价于算子 T 的不动点,另外

$$\|Tu\| = Tu(1) = A + \int_0^1 \varphi_q\left(\varphi_p(B) + \int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

下面给出 2 个假设条件:

1) $f(t,u)\in((0,1)\times[0,\infty),[0,\infty))$, $A,B\geqslant 0$;

2) 对 $\forall u(t)\geqslant 0$, 有

$$\int_0^1 f(t,u(t))\,\mathrm{d}t < \infty,$$

$$\int_0^1 \varphi_q\left(\int_s^1 f(r,u(r))\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s\right) < \infty.$$

定理 设假设条件 1)、2) 成立,若存在 $0<d<a<b\leqslant c$, 且 $A+2^{q-1}B<\dfrac{d}{2}$, 使得

1) 当 $0\leqslant u\leqslant d$ 时,有 $f(t,u)<\alpha_1(t)\cdot\left(\dfrac{d}{M}\right)^{p-1}$;

2) 当 $d\leqslant u\leqslant c$ 时,有 $f(t,u)\leqslant\alpha_2(t)\cdot\left(\dfrac{c}{m}\right)^{p-1}$;

3) 当 $a\leqslant u\leqslant c$ 时,有 $f(t,u)>\alpha_3(t)\cdot\left(\dfrac{a}{k}\right)^{p-1}$.

其中:

$$\alpha_i(t) \in C\left((0,1),\left[0,\infty\right)\right), \quad \int_0^1 \alpha_i(t)\,\mathrm{d}t < \infty,$$

$$\int_0^1 \alpha_i(t)\mathrm{d}t < \infty, \quad \int_0^1 \varphi_q\left(\int_s^1 \alpha_i(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s < \infty, \quad i = 1,2,3.$$

且对于 $\alpha_3(t)$, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得 $\int_\delta^1 \alpha_3(t)\,\mathrm{d}t > 0$. 其中的 M,m,k 分别为

$$M = 2^q\int_0^1 \varphi_q\left(\int_s^1 \alpha_1(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s > 0,$$

$$m = 2^q\int_0^1 \varphi_q\left(\int_s^1 \alpha_2(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s > 0,$$

$$k = \int_0^\delta \varphi_q\left(\int_\delta^1 \alpha_3(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s > 0.$$

则边值问题(1)至少存在 3 个解 u_1,u_2 和 u_3, 并满足

$$\|u_1\| < d, \quad \alpha(u_2) > a,$$

$$\|u_3\| > d \text{ 且 } \alpha(u_3) < a.$$

证明 令 $P=\left\{u(t) \;\middle|\; u(t)\in C[0,1], u(t)\geqslant 0\right\}$, $\alpha(x)=\min\limits_{t\in[\delta,1]} x(t)$. 显然 $\alpha(x)$ 是 P 上的一个非负连续凹泛函,并且 $\alpha(x)\leqslant\|x\|, \forall x\in P$. 由假设条件易证 $T:P\to P$ 是全连续的.

当 $0\leqslant u\leqslant d$, 由条件 1)知

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \\
A + \int_0^1 \varphi_q\left(\varphi_p(B) + \int_s^1 f(r,u(r))\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s &= \\
A + \int_0^1 \left(\varphi_p(B) + \int_s^1 f(r,u(r))\,\mathrm{d}r\right)^{q-1}\mathrm{d}s &\leqslant \\
A + \int_0^1 2^{q-1}\left[B + \left(\int_s^1 f(r,u(r))\,\mathrm{d}r\right)^{q-1}\right]\mathrm{d}s &= \\
A + 2^{q-1}B + 2^{q-1}\int_0^1 \varphi_q\left(\int_s^1 f(r,u(r))\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s &< \\
\frac{d}{2} + 2^{q-1}\int_0^1 \varphi_q\left(\int_s^1 \alpha_1(r)\left(\frac{d}{M}\right)^{p-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s &= \\
\frac{d}{2} + \frac{d}{M}\cdot 2^{q-1}\int_0^1 \varphi_q\left(\int_s^1 \alpha_1(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s &= d < c.
\end{aligned} \tag{2}$$

当 $d\leqslant u\leqslant c$, 由定理中的条件 2) 同理得 $\|Tu\|<$

c. 故当 $u\in\bar{P}_c$ 时, $Tu\in\bar{P}_c$. 因此 $T:\bar{P}_c\to\bar{P}_c$ 全连续.

由式(2)的证明过程知,当 $u\in\bar{P}_d$ 时, $\|Tu\|<d$,即引理的条件2)成立.

下面验证引理的条件1)成立. 令

$$u_0(t)=\frac{a+b}{2},$$

显然 $u_0\in P$ 且

$$\alpha(u_0)=\frac{a+b}{2}>a,\quad \|u_0\|=\frac{a+b}{2}<b.$$

故

$$u_0\in\left\{x\,\middle|\,x\in P(\alpha,a,b),\alpha(x)>a\right\},$$

即

$$\left\{x\,\middle|\,x\in P(\alpha,a,b),\alpha(x)>a\right\}\neq\varnothing.$$

当 $u\in P(\alpha,a,b)$,且由 $\alpha(x)$ 的定义知

$$a\leqslant\alpha(u)\leqslant\|u\|\leqslant b,$$

故 $a\leqslant u(t)\leqslant b, t\in[\delta,1]$. 从而由定理中的条件3)得

$$\begin{aligned}\alpha(Tu)=Tu(\delta)=&\\ A+\int_0^\delta\varphi_q\left(\varphi_p(B)+\int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\geqslant&\\ \int_0^\delta\varphi_q\left(\int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s>&\\ \int_0^\delta\varphi_q\left(\int_\delta^1\alpha_3(r)\cdot\left(\frac{a}{k}\right)^{p-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=&\\ \frac{a}{k}\int_0^\delta\varphi_q\left(\int_\delta^1\alpha_3(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=a.&\quad(3)\end{aligned}$$

即引理的条件1)成立.

当 $u\in P(\alpha,a,c)$ 且 $Tu>b$ 时,有 $a\leqslant u(t)\leqslant c$, $t\in[\delta,1]$. 由定理中的条件3)与式(3)的证明过程可知

$$\alpha(Tu)=Tu(\delta)>a.$$

即引理的条件3)成立.

综上所述,引理的所有条件都满足,故边值问题(1)至少存在3个解,从而定理得证.

同样,也可以类似得到 p-Laplacian 边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))'+f(t,u)=0, & 0<t<1;\\ u'(0)=A, & u(1)=B\end{cases}$$

3 解的存在性,这里就不做详细的介绍了.

参考文献

References

[1] ZHAI Chengbo. The existence of positive solutions to mixed boundary value problems of p-Laplace equations[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2003, 5(2): 170-173

[2] 张晓燕,孙经先. 一维奇异 p-Laplacian 方程多解的存在性[J]. 数学物理学报:A 辑, 2006, 26(1): 143-149
ZHANG Xiaoyan, SUN Jingxian. The existence of multiple solutions to singular boundary value problems with one-dimensional p-Laplacian[J]. Acta Mathematica Scientia: A, 2006, 26(1): 143-149

[3] 白定勇,马如云. p-Laplacian 算子型奇异边值问题的正解[J]. 数学物理学报:A 辑, 2005, 25(2): 166-170
BAI Dingyong, MA Ruyun. The positive solutions of singular boundary value problems with p-Laplacian operator [J]. Acta Mathematica Scientia: A, 2005, 25(2): 166-170

[4] 杨景保,韦忠礼. 含有一维 p-Laplacian 算子的非线性两点边值问题的可解性[J]. 山东建筑大学学报, 2007, 22(6): 486-489
YANG Jingbao, WEI Zhongli. Existence of the solution of nonlinear two-point boundary value problems with one-dimensional p-Laplacian operator[J]. Journal of Shandong University of Architecture, 2007, 22(6): 486-489

[5] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科技出版社, 2004
GUO Dajun. Nonlinear functional analysis [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2004

Existence of three solutions to a class of singular boundary value problems

JIANG Wei[1] HONG Zikang[1]

1 College of Math & Physics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

Abstract Using the Leggett-Williams theorem, this paper mainly deals with the existence of three solutions to a class of singular boundary value problems containing p-Laplacian operators, and sufficient conditions are established for the three solutions of the problem. The chief results show that, when a nonlinear singular term satisfies suitable conditions, there must be three solutions of the problem.

Key words p-Laplacian operator; Leggett-Williams theorem; fixed point; cone