文章编号:1674-7070(2009)04-0377-05

一类解非线性方程的 Newton 型迭代法

雷金贵[1]　陈文兵[1]

摘要

通过将 Newton-Raphson 法和割线法进行耦合,构造了一类解非线性方程的 Newton 型迭代法,利用区间套定理证明了这类算法的收敛性,并给出一种事后误差估计的方法. 数值实验表明在满足凹凸性假设的条件下,该算法在大区间上的收敛速度明显快于原有的 Newton-Raphson 方法和割线法.

关键词

Newton-Raphson 迭代法;收敛速度;区间套;非线性方程;极限

中图分类号 O241.7

文献标志码 A

0 引言

Introduction

考虑如下非线性方程

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

的求根问题,其中 f 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的连续可微函数.

目前 Newton-Raphson 法仍然是求解非线性方程(1)的主要方法,并且与 Newton-Raphson 法相关的研究与探索仍然是学术界的热点之一[1]. 例如:文献[2]用 Steffensen 法提出了一类具有二阶收敛性的算法;文献[3]设计了一类新的带参数平方收敛的 Newton 型算法;文献[4]构造了求解代数方程的一类迭代法[4];有关 Newton 型迭代法的更多探索可参见文献[1,5-6]等.

本文将 Newton-Raphson 方法和切线法进行耦合,构造了一类带参数的 Newton 型迭代法,用区间套定理证明了该算法的收敛性并给出了一种事后误差估计方法. 本文的数值实验表明:在满足本文定理提出的凹凸性假设的前提下,该算法在大区间上求解非线性方程单根时的收敛速度比 Newton-Raphson 法和割线法快得多;而对局部求根问题收敛速度与 Newton-Raphson 方法基本相同且优于割线法.

1 解非线性方程的 Newton 型迭代法的构造

Construction of Newton-like iterative method for solving nonlinear equations

求解非线性方程(1)的 Newton-Raphson 方法为

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot f'(x_n)^{-1}, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{2}$$

由文献[7]可得

引理 1[7]　假设函数 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数,并满足如下条件:

1) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

2) $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$;

3) 任意 $x \in (a,b)$, $f''(x)$ 保持非负或非正;

4) $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} \leqslant b, b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} \geqslant a$.

则对闭区间 $[a,b]$ 上的任意初始值 x_0, Newton-Raphson 方法(2)二阶收敛到方程(1)在区间 (a,b) 内的唯一实根 x^*.

收稿日期 2009-11-20

资助项目 公益性行业(气象)科研专项(GY-HY-200806029)

作者简介

雷金贵,男,讲师,博士生,主要研究数值计算、资料同化等. zxf8013@sohu.com

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

定义

$$D_{k,l}[x,y] \triangleq \frac{k \cdot \mathrm{sgn}(x-y) \cdot (f(x)-f(y)) + l \cdot f'(y)}{k|x-y|+l}$$

并在式(2)中用 $D_{k,l}[x_{n-1},x_n]$ 代替导数值 $f'(x_n)$,于是得到一类新的带有参数的 Newton 型迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{D_{r,l}[x_{n-1},x_n]}, \quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{3}$$

在使用式(3)迭代的过程中,如果出现

$$f(x_{n-1}) \cdot f(x_{n+1}) > 0,$$

令 $x_{n-1} = x_{n+1}$,则迭代过程将继续. 其中初始值 x_0 和 x_1 的取法可参见表1;参数 k 和 l 的选择参见表2.

表1　初始值 x_0 和 x_1 的选择法

Table 1　Method of choosing initial values x_0 and x_1

编号	$f''(x)$ 和 $f'(x)$ 的符号	x_0 和 x_1 的取法
1	$f''(x) \leqslant 0,\ f'(x) \leqslant 0$	$x_1 = a,\ x_0 = b$
2	$f''(x) \geqslant 0,\ f'(x) \geqslant 0$	
3	$f''(x) \leqslant 0,\ f'(x) \geqslant 0$	$x_0 = a,\ x_1 = b$
4	$f''(x) \geqslant 0,\ f'(x) \leqslant 0$	

表2　参数 k 和 l 的选择法

Table 2　Method of choosing k and l

编号	参数 k 和 l 的符号	算法说明
1	$k=0,\ l>0$	退化为 Newton-Raphson 法
2	$l=0,\ k>0$	退化为割线法
3	$k>0,\ l>0$	为 Newton-Raphson 法和割线法的耦合
4	$\frac{l}{k}=\frac{f(x_0)}{f(x_n)}$	自适应设置 k 和 l

2　Newton 型迭代法的收敛性

Convergence of the Newton-like iterative method

由表2可知,当 $k>0, l>0$,迭代公式(3)将可以看做 Newton-Raphson 方法和割线法的耦合方法. 由文献[7]可得

引理2　令集合 $I=(x^*-r, x^*+r)$, x^* 是方程(1)的单根,实数 $r>0$, $f(x)$ 在 I 中充分光滑并满足如下条件:

1) $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$;

2) $\exists M, \forall \eta, \xi \in I$,满足 $\left|\dfrac{f''(\xi)}{2f'(\eta)}\right| \leqslant M$;

3) 实数 $d = Mr < 1$.

则对任意初始值 $x_0, x_1 \in I$,割线法收敛到方程(1)在 I 中的唯一实根 x^*,且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^* - x_{n+1}|}{|x^* - x_n|^q} = \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|^{q-1},$$

其中收敛的阶 $q = \dfrac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1.618$.

引理3　如果当 $b \cdot d > 0$ 时,成立不等式 $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$,则对任意的实数 $m>0, n>0$,则有不等式 $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{ma+nc}{mb+nd} \leqslant \dfrac{c}{d}$ 成立.

由引理3得

引理4　假设 $\{x_n\}$ 是定义在区间 $[a,b] \subset I$ 上的数列, $f(x)$ 是 $[a,b] \subset I$ 上的可微函数,且有

$$f[x_{n-1},x_n] = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} \neq f'(x_n),$$

则对任意的非负实数 k 和 l 可得

$$\begin{aligned} &\min\{f'(x_n), f[x_{n-1},x_n]\} \leqslant \\ &\qquad D_{k,l}[x_{n-1},x_n] \leqslant \\ &\max\{f'(x_n), f[x_{n-1},x_n]\}, \\ &\qquad n = 1,2,3,\cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

定理5　设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b] \subset I$ 上的单根, $f(x) \in C^2[a,b]$ 且满足如下条件:

1) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

2) $\forall x \in [a,b], f'(x) \neq 0$;

3) $\forall x \in [a,b], f''(x)$ 保持非负或非正;

4) $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} \leqslant b, b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} \geqslant a$;

5) $\exists M, \forall \eta, \xi \in I$,满足 $\left|\dfrac{f''(\xi)}{2f'(\eta)}\right| \leqslant M$;

6) $d = Mr < 1$.

则对任意取自表1中的初始值 x_0, x_1, Newton 型方法(3)收敛到问题(1)的唯一实根 x^*.

证明　根据定理5条件1)-4)和引理1,可得对从表1中取得的任意初始值用 Newton-Raphson 方法(2)计算所得数列 $\{\widehat{x}_N^n\}$ 在区间 $[a,b] \subset I$ 上二阶收敛性到问题(1)的唯一实根 x^*;且由定理的凹凸性假设可知该数列是单调数列.

同理由,根据定理5条件1)、2)、5)、6)且引理2,可知对由表1中取得的任意初始值利用割线法公式计算得到的数列 $\{\widehat{x}_S^n\}_1^\infty$ 在区间 $[a,b] \subset I$ 上单调收敛到方程(1)在该区间内的唯一实根 x^*,且收敛的阶为

$$q = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.618.$$

假设 $\{x_n\}$ 是由式(3)计算得到的迭代数列,接下来证明该数列收敛到方程(1)在区间 $[a,b] \subset I$ 上的唯一实根 x^*.

不妨设$f''(x)>0,f'(x)>0$,且导函数$f'(x)$和$f''(x)$在区间$[a,b]$上连续.则可令

$$x_S^1=a,x_S^0=x_N^1=b,$$

于是有$x_S^1<x_N^1$且满足

1)当$n=2$时,可得

$$f[x_S^0,x_S^1]<f'(x_N^1),$$

又由引理4得

$$f[x_S^0,x_S^1]<D_{k,l}[x_S^1,x_N^1]<f'(x_N^1),$$

因此有

$$x_S^2<x_2<x_N^2,$$

其中:

$$x_S^2=x_S^1-f(x_S^1)\frac{x_S^1-x_S^0}{f(x_S^1)-f(x_S^0)};$$

$$x_2=x_N^1-\frac{f(x_N^1)}{D_{k,l}[x_S^0,x_N^1]};$$

$$x_N^2=x_N^1-\frac{f(x_N^1)}{f'(x_N^1)}.$$

如果有$f(x_2)\cdot f(x_S^2)>0$,则可令$x_S^2=x_2$;否则令$x_N^2=x_2$.于是得到不等式

$$x_S^1<x_S^2\leqslant x_2\leqslant x_N^2<x_N^1. \tag{5}$$

2)当$n=m$时,不妨设

$$x_S^m\leqslant x_m\leqslant x_B^m, \tag{6}$$

由式(6)和引理4得到

$$f[x_S^m,x_N^m]\leqslant D_{k,l}[x_S^m,x_N^m]\leqslant f'(x_N^m), \tag{7}$$

因此得

$$x_S^{m+1}\leqslant x_{m+1}\leqslant x_N^{m+1},$$

其中:

$$x_S^{m+1}=x_S^m-f(x_S^m)\frac{x_S^m-x_N^m}{f(x_S^m)-f(x_N^m)};$$

$$x_{m+1}=x_N^m-\frac{f(x_N^m)}{D_{k,l}[x_S^m,x_N^m]};$$

$$x_N^{m+1}=x_N^m-\frac{f(x_N^m)}{f'(x_N^m)}.$$

如果出现$f(x_S^{m+1})\cdot f(x_{m+1})>0$,则令$x_S^{m+1}=x_{m+1}$;否则令$x_N^{m+1}=x_{m+1}$.显然有$x_S^m<x_S^{m+1}$且$x_N^{m+1}<x_N^m$,于是得到重要不等式:

$$x_S^m<x_S^{m+1}\leqslant x_{m+1}\leqslant x_N^{m+1}<x_N^m.$$

综上所述,本文得到如下结论:

1)$x_S^m<x_S^{m+1}\leqslant x_{m+1}\leqslant x_N^{m+1}<x_N^m,\forall n\in N,n\geqslant 1$;

2)$\{x_S^n\}_1^\infty$是一个单调非递减的数列,有上界,因而收敛到方程(1)的单根x^*;

3)$\{x_N^n\}_1^\infty$是一个单调非递增数列,有下界,因而也收敛到方程(1)的单根x^*.

接下来证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$,为此考虑如下的区间套序列$\{[x_S^n,x_N^n]\}_{n=1}^\infty$.由计算数列$\{x_S^n\}_1^\infty$和$\{x_N^n\}_1^\infty$的过程可知$[x_S^n,x_N^n]\subset[\widehat{x}_S^{n-1},\widehat{x}_N^n]$(证明略).由

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{x}_S^n=x^*=\lim_{n\to\infty}\widehat{x}_N^n,$$

可证

$$x^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}[\widehat{x}_S^n,\widehat{x}_N^n],$$

且有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[\widehat{x}_S^n,\widehat{x}_N^n]\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_S^n,x_N^n].$$

因此有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_S^n,x_N^n]=x^*,$$

即有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x^*.$$

在满足定理5条件1)~6)时,同理可证数列$\{x_n\}$收敛到方程(1)的唯一实根x^*.

推论1 在满足定理5的条件下,Newton型迭代法(3)收敛到方程(1)的唯一实根x^*的阶数至少为$q=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\approx 1.618$.

定理6 在满足定理5的条件下,Newton型方法(3)具有事后误差估计式:

$$|x_n-x^*|\leqslant|x_{n+1}-x_n|,\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{9}$$

其中,$\{x_n\}$为Newton型迭代公式(3)的迭代数列.

证明 由定理5可知

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x^*)=0,$$

其中$\{x_n\}$和x^*的含义同定理5,因此有

$$|x_{n+1}-x_n|=\left|\frac{f(x_n)}{D_{k,l}[x_{n-1},x_n]}\right|=$$

$$\left|\frac{f(x_n)\left(|x_n-x_{n-1}|+\frac{l}{k}\right)}{\operatorname{sgn}(x_n-x_{n-1})(f(x_n)-f(x_{n-1}))+\frac{l}{k}f'(x_n)}\right|=$$

$$\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right|\cdot\left|\frac{|x_n-x_{n-1}|+\frac{l}{k}}{\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}|x_n-x_{n-1}|+\frac{l}{k}}\right|, \tag{10}$$

式(10)中ξ_n介于x_n和x_{n-1}之间的实数.于是由引理1的条件3)可得

$$0<\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}\leqslant 1,$$

于是式(10)右端

$$\geqslant\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right|=\left|\frac{f(x_n)-f(x^*)}{f'(x_n)}\right|=\left|\frac{f'(\eta_n)}{f'(x_n)}\right||x_n-x^*|.$$

其中,η_n 介于 x_n 和 x^* 之间,于是得不等式

$$|x_n - x^*| \leqslant \left|\frac{f'(x_n)}{f'(\eta_n)}\right| \cdot |x_{n+1} - x_n| \leqslant |x_{n+1} - x_n|,$$

上式中应用了不等式

$$0 < \frac{f'(x_n)}{f'(\eta_n)} \leqslant 1.$$

3 Newton 型迭代法的几何描述

Geometric description of the Newton-like iterative method

由图 1 可知,直线 BG 是曲线 $y=f(x)$ 的切线;B 是切点;$G(x_B,0)$ 是直线 BG 与 x 轴的交点;$\hat{F}(\hat{x},0)$ 是射线 $B\hat{F}$ 与 x 轴的交点;$E(x_A,0)$ 是割线 AB 与 x 轴的交点;x^* 是方程(1)在区间 $[a,b]$ 上的唯一实根.

令 $\theta = \angle B\hat{F}D$, $\theta_1 = \angle BED$, $\theta_2 = \angle BGD$,显然有

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, \text{且} \tan\theta_1 \leqslant \tan\theta \leqslant \tan\theta_2,$$

其中

$$\tan\theta_2 = f'(x_B);$$

$$\tan\theta_1 = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A};$$

$$\tan\theta = D_{k,l}[x_A, x_B].$$

由曲线弧 AFB 的凹凸性和单调性可得 $x_A \leqslant \hat{x} \leqslant x_B$,其中

$$\hat{x} = x_B - \frac{f(x_B)}{D_{k,l}[x_A, x_B]},$$

即 $\hat{x}$ 是比 x_A 和 x_B 更好的近似.

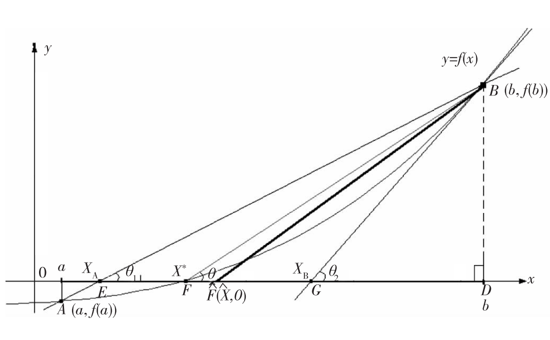

图 1 Newton 型方法示意

Fig. 1 Sketch map of Newton-like method

4 数值实验

Numerical experiments

本节给出 4 个实验 A、B、C 和 D,其中实验 A 和 B 满足定理的条件,是大区间求根问题,而实验 C 和 D 满足定理条件但是局部求根问题,搜索范围小. 试验中取固定误差限 $\varepsilon = 10^{-8}$,检验函数和初始值为:

A: $x(x+1)^2 - 1 = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2\,000$;

B: $x^4 - 256 = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2\,000$;

C: $x(x+1)^2 - 1 = 0$, $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.6$;

D: $e^{\sin(2x)} - x - 1 = 0$, $x_0 = 1.13$, $x_1 = 1.14$.

实验结果如表 3 和表 4 所示.

表 3 同一误差限的数值解

Table 3 Numerical solutions with the same error limit

实验编号	牛顿法	割线法	本文方法
A	0.465 571 231 876 8	0.454 041 213 487 0	0.465 571 231 876 8
B	4.000 000 000 000	3.641 557 454 104	4.000 000 000 000
C	0.465 571 2	0.465 571 2	0.465 571 2
D	1.138 911 262 815	1.138 911 262 814	1.138 911 262 815

表 4 迭代次数

Table 4 Iteration times for numerical solutions

实验号	牛顿法	割线法	本文方法
A	23	4 813 249	6
B	27	141 918 214	8
C	5	9	5
D	3	3	3

5 结论

Conclusions

1) 本文提出的 Newton 型迭代法是 Newton-Raphson 方法和割线法的耦合,当参数 $k=0, l\neq 0$ 时,迭代公式(3)就退化为 Newton-Raphson 公式;当 $l=0, k\neq 0$ 时,迭代公式(3)退化为割线法公式.

2) 表 3 和表 4 的结果表明,对满足定理 5 的规定的凹凸性条件的方程求根问题,当搜索范围很大时,本文新方法的收敛速度远远高于 Newton-Raphson 方法和割线法,收敛性优于割线法;实验 C 和 D 表明,满足定理 5 条件,但是对局部收敛性问题,本文算法的收敛速度几乎和 Newton-Raphson 方法相同,且优于割线法;当不满足凹凸性假设条件下本文算法可能不收敛.

3) 实际上,本文 Newton 型迭代法的收敛速度与两个参数的比值 $\frac{k}{l}$ 有关系,至于该比值如何影响迭代法的收敛速度需要进一步的研究,本文数值实验中令 $\frac{k}{l}=1$.

参考文献
References

[1] Yamamoto T. Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2000,124(1/2):1-23
[2] ZHENG Quan. A Steffensen-like method and its variants[J]. Applied Mathematics and Computation,2009,214(1):10-16
[3] WU Xinyuan. A new continuation Newton-like method and its deformation[J]. Applied Mathematics and Computation,2000,112(1):75-78
[4] HE Jihuan. A new itration method for solving algebraic equations[J]. Applied Mathematics and Computation,2003,135(1):81-84
[5] Vijesh V A,Subrahmanyam P V. A Newton-like method and its application[J]. J Math Anal Appl,2008,339(2):1231-1242
[6] SHEN Weiping,LI Chong. Kantorovich-type convergence criterion for inexact Newton methods[J]. Applied Numerical Mathematics,2009,59(7):1599-1611
[7] 林成森. 数值计算方法上册[M]. 1 版. 北京:科学出版社,1988
LIN Chengsen. Numerical calculation methods[M]. 1th ed. Beijing:Science Press,1988

A Newton-like iterative method for solving nonlinear equations

LEI Jingui[1] CHEN Wenbing[1]
1 School of Math & Physics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract In this paper,a class of Newton-like iterative method by combining Newton-Raphson method and secant method is proposed to solve non-linear equations. The nested interval theorem is used to prove the convergence of this kind of numerical calculation and a method of giving after-event error assessment is also presented. Numerical experiments indicate that,on condition that the concave-convex hypothesis in this paper is satisfied,this new method has better convergence rate than both Newton method and secant iteration,especially in the case of solving the single root of nonlinear equation in large interval.

Key words Newton-Raphson method;convergence rate;nested intervals;nonlinear equation;limit