

单峰映射揉搓序列的特性

张爱华¹ 张华¹

摘要

为了更好地解释 Feigenbaum 现象,研究了单峰映射的揉搓序列,利用分析的方法证明了单峰映射揉搓序列极大性的一些性质,进而给出了一个序列作为允许揉搓序列的一个等价条件;利用单峰映射 f 和 $T_p f$ 的揉搓序列之间的关系,给出了重正化算子 T_p 不动点的揉搓序列的特征.

关键词

单峰映射;揉搓序列;允许揉搓序列;极大性;重正化算子

中图分类号 O189.1

文献标志码 A

0 引言

Introduction

动力系统作为非线性学科的一个重要组成部分,自 19 世纪末 Poincaré 关于天体力学方面的研究开始已有数百余年的发展历史,其理论早已不局限于力学,而是渗透到了全部科学当中. 作为动力系统的两个概念,单峰映射和揉搓序列扮演着十分重要的角色. 对于前者,一方面,它是虫口差分方程的数学模型,正是基于对这类单峰映射族迭代的研究,Feigenbaum 才发现了惊人的普适现象;另一方面,单峰映射因其具有很好的性态而常被假设成重正化算子的不动点进行研究,而且重正化算子也确实存在一类单峰映射的不动点. 对于后者,它最早是由 Milnor-Thurston^[1] 提出的,之后许多学者^[2-6] 把它应用到解释普适现象的工作中. 可以说揉搓序列是一维动力系统研究中的一个重要工具^[1,5,7-9],由于揉搓序列不仅反映了系统的重要的拓扑性质,而且它本身是个拓扑不变量,因此研究单峰映射的揉搓序列显得十分必要. 本文围绕 Feigenbaum 的理论,研究了单峰映射揉搓序列极大性的一些性质,给出了一个序列作为允许揉搓序列的一个等价条件,利用单峰映射 f 和 $T_p f$ 的揉搓序列之间的关系,给出了重正化算子 T_p 不动点的揉搓序列的特征.

定义 1 称 A 是有限序列,如果 $A = C$,或对 $n > 1, A = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} C$;称 A 是无限序列,如果 $A = a_1 a_2 \cdots$,这里 a_i 是 R 或 L . 记所有这样的序列集合为 $\mathcal{A}$,在 $\mathcal{A}$ 中定义线性次序“ $<$ ”如下:

首先,规定 $L < R < C$;

其次,设 $A = a_1 a_2 \cdots, B = b_1 b_2 \cdots$ 是一对满足 $a_i \neq b_i, a_k = b_k, \forall k < i$ 的序列. 规定 $A < B$,如果有下列情形之一成立:

1) 在 $a_1 a_2 \cdots a_{i-1} = b_1 b_2 \cdots b_{i-1}$ 中有偶数个 R ,且 $a_i < b_i$,

2) 在 $a_1 a_2 \cdots a_{i-1} = b_1 b_2 \cdots b_{i-1}$ 中有奇数个 R ,且 $a_i > b_i$,

如不然,则 $A > B$.

定义 2 称 $A \in \mathcal{A}$ 是极大的,如果

1) 当 $A = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} C$ 是有限序列时,对每个 $i = 1, 2, \cdots, n-1$ 有 $\sigma^i A \leq A$,这里 $\sigma^i A$ 表示去掉 A 左边前 i 个字母.

2) $A = a_1 a_2 \cdots$,是无限序列时,对所有的 $i \geq 1$ 都有 $\sigma^i A \leq A$.

定义 3 设 f 为 $[a, b]$ 上的以 c 为临界点的单峰映射,点 $x \in [a, b]$ 在 f 之下的路径 $I_f(x)$ 是一个有限或无限序列,具体地:

收稿日期 2009-10-12

作者简介

张爱华,女,博士,副教授,主要从事拓扑动力系统的研究. aiwa_zhang2000@yahoo.com.cn

- 1) 若 $x = c$, 则 $I_f(x) = C$.
- 2) 若存在 $n > 0$ 使得 $f^n(x) = c$, 但当 $0 \leq i \leq n - 1$ 时, $f^i(x) \neq c$, 则 $I_f(x) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n C$. 其中:

$$\alpha_i = \begin{cases} R, & \text{若 } f^{i-1}(x) > c \text{ 时;} \\ L, & \text{若 } f^{i-1}(x) < c \text{ 时,} \end{cases}$$

- 3) 若对任何 $n \geq 0, f^n(x) \neq 0$ 则 $I_f(x) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots$, 其中:

$$\alpha_i = \begin{cases} R, & \text{若 } f^{i-1}(x) > c \text{ 时;} \\ L, & \text{若 } f^{i-1}(x) < c \text{ 时,} \end{cases}$$

特别地, 称路径 $I_f(f(c))$ 为 f 的揉搓序列, 记作 $K(f)$. $K(f)$ 是一个很重要的概念, 它在一定程度上决定着映射 f 的动力性质^[1].

1 揉搓序列极大性的判定

Determination of kneading sequence's maximality

揉搓序列是一维动力系统中的一个重要概念, 而揉搓序列的一个重要性质是极大性. 下面, 本文首先给出极大性的一些性质, 然后再给出无穷序列作为允许揉搓序列的一个等价条件.

命题 1 若 $I_f(x) < I_f(x')$, 这里 $x, x' \in [a, b]$, 则 $x < x'$.

命题 2 若 $x, x' \in [a, b]$ 且 $x < x'$, 则 $I_f(x) \leq I_f(x')$.

上面两个命题的证明参见文献[1]. 由此有如下结论:

定理 1 若 f 是单峰映射使得

$$I_f(x) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n C,$$

则 α 为极大的当且仅当对每个 $i = 1, 2, \cdots, n - 1$ 有 $f^i(x) < x$.

证明 若 α 极大, 则对 $0 \leq i \leq n - 1$, 有 $I_f(f^i(x)) = \sigma^i \alpha < \alpha$, 则由命题 1 知, $f^i(x) < x$.

反之, 如果对每个 $i = 1, 2, \cdots, n - 1$ 有 $f^i(x) < x$, 则由命题 2 知, $\sigma^i \alpha = I_f(f^i(x)) \leq I_f(x) = \alpha$, 从而 α 是极大的.

注记 上述定理 1 对无穷序列也是成立的.

下述推论 1 是定理 1 的直接推论, 推论 2 则可由极大序列的定义简单推出.

推论 1 若 f 是单峰映射, 则 $K(f)$ 为极大的.

推论 2 不以 RL 开头的极大序列只能是 R^∞, L^∞, RL 以及 C 这四种情形.

记 $\mathcal{E}$ 为所有的 C^1 单峰映射赋予 C^1 拓扑所构成的拓扑空间, 并设 $\mu \rightarrow f_\mu$ 是从 $[c, d]$ 到 $\mathcal{E}$ 的一个映射, 满足

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_\mu(x) - f_{\mu_0}(x)| + |f'_\mu(x) - f'_{\mu_0}(x)| \rightarrow 0, \mu \rightarrow \mu_0,$$

则有下列的

引理 1^[5] (文献[5]定理 III. 1. 1) 设 α 是一个满足 $K(f_c) < \alpha < K(f_d)$ 的极大序列, 则存在一个 $\mu \in (c, d)$ 使得 $K(f_\mu) = \alpha$.

若一个无穷序列可以作为某个单峰映射的揉搓序列, 则称这样的序列为允许揉搓序列. 下面, 本文给出一个无穷序列作为允许揉搓序列的等价条件.

定理 2 序列 $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots)$ 是允许揉搓序列当且仅当 α 是极大的, 也即对于所有的 $n \geq 1$ 都有

$$\sigma^n(\alpha) \leq \alpha,$$

等号当且仅当 α 是周期序列时成立.

证明 设 $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots)$ 是允许揉搓序列, 则存在一个单峰映射 f 使 $K(f) = \alpha$. 由推论 1 知 α 是极大的.

反过来, 设 α 是极大的, 则由推论 2 知 α 只能是下列 3 种情形:

(i) $\alpha = L^\infty$; (ii) $\alpha = R^\infty$; (iii) $\alpha = RL\alpha_3\alpha_4\cdots$.

对于 (i) 可选取单峰映射 $f_1 = x(1 - x)$;

对于 (ii) 可选取单峰映射 $f = 2.5x(1 - x)$;

对于 (iii) 若 $\alpha = RL^\infty$, 则可选取单峰映射 $f_4 = 4x(1 - x)$; 若 α 是其他情形, 构造一个从 $[1, 4]$ 到 $\mathcal{E}$ 的映射

$$\mu \rightarrow f_\mu = \mu x(1 - x),$$

则满足

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_\mu(x) - f_{\mu_0}(x)| + |f'_\mu(x) - f'_{\mu_0}(x)| \rightarrow 0, \mu \rightarrow \mu_0,$$

也即在 C^1 拓扑下是连续的. 又 $K(f_1) < \alpha < K(f_4)$, 故由引理 1 可知, 存在一个 $\mu \in (1, 4)$ 使得 $K(f_\mu) = \alpha$.

2 重正化算子 $\mathcal{T}_p$ 的不动点的揉搓序列的特征

Characters of the kneading sequence of the fixed points of the renormalization operator $\mathcal{T}_p$

设 f 是 $[-1, 1]$ 上的满足 $f(0) = 1$ 的单峰映射. 记 $\mathcal{F}$ 为 $[-1, 1]$ 上所有这样的单峰映射的集合赋予紧致开拓扑而构成的拓扑空间.

本文考虑作用在 $\mathcal{F}$ 上的重正化算子

$$\mathcal{T}_p: f \rightarrow \frac{1}{\lambda} f^p \lambda. \tag{1}$$

其中: $p \geq 2$ 为整数, $\lambda = f^p(0)$.

在验证 Feigenbaum 的理论过程中, 弄清 f 与 $\mathcal{T}_p f$

之间的揉搓序列的关系是十分重要的. 为此引入如下定义.

定义 4 设 $n > 1, \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} C$ 为序列, 对任何 $\beta \in \mathcal{A}, \alpha * \beta$ 为

1) 若 $\beta = \beta_1 \beta_2 \cdots$ 无限, 则

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha \beta_1 \alpha \beta_2 \cdots, & \text{当 } \alpha \text{ 中有偶数个 } R \text{ 时;} \\ \alpha \bar{\beta}_1 \alpha \bar{\beta}_2 \cdots, & \text{当 } \alpha \text{ 中有奇数个 } R \text{ 时.} \end{cases}$$

2) 若 $\beta = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m C$ 有限, 则

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha \beta_1 \cdots \alpha \beta_m \alpha C, & \text{当 } \alpha \text{ 中有偶数个 } R \text{ 时;} \\ \alpha \bar{\beta}_1 \cdots \alpha \bar{\beta}_m \alpha C, & \text{当 } \alpha \text{ 中有奇数个 } R \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 $\bar{L} = R, \bar{R} = L$ 并且 $\alpha \beta_i = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \beta_i$.

容易验证: 对任何 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$, 如果 α, β 是长度大于 1 的有限序列, 则

$$\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma.$$

因此, $\alpha * \beta * \gamma$ 有意义. 特别地, 把 n 个 α 的连 $*$ -积记为 α^{*n} , 并把无穷多个 α 的连 $*$ -积简记为 $\alpha^{*\infty}$.

关于 f 与 $T_p f$ 之间的揉搓序列的关系, 有如下的引理:

引理 2 设 $f, g \in \mathcal{F}$ 满足 $T_p f = g$. 如果 $K(g) = \beta$ 是以 RL 开头的有限或无限序列, 则存在唯一确定的极大序列 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p-1} C$ 使得 $K(f) = \alpha * \beta$.

引理 3 设 $f \in \mathcal{F}, \alpha, \beta \in \mathcal{A}$ 极大且满足: α 的长度是不小于 2 的有限数 $p, R^p \leq \beta < RL^p$, 如果

$$K(f) = \alpha * \beta, \text{ 则 } T_p f \in \mathcal{F} \text{ 且 } K(T_p f) = \beta.$$

上述两个引理参见文献[10]. 利用这两个引理, 本文讨论 T_p 的不动点的揉搓序列的特征.

定义 5 设 α 为序列, 称集合

$$\sum_{\alpha} = \{f \in \mathcal{F} \mid K(f) = \alpha\}$$

为一个曲面.

对给定的 α , 如果 $\sum_{\alpha} \neq \emptyset$, 且 $T_p(\sum_{\alpha}) \subset \sum_{\alpha}$, 就称 $\sum_{\alpha}$ 是 T_p 的不变曲面.

定理 3 若 f 是 T_p 的不动点, 即 $T_p f = f$. 则存在极大序列 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p-1} C$ 使得

1) $K(f) = \alpha^{*\infty}$;

2) $\sum_{\alpha^{*\infty}}$ 是 T_p 的不变曲面.

证明 1) 若 $T_p f = f$, 亦即 $f(x) = \frac{1}{\lambda} f^p(\lambda x)$, 则由归纳法, 对每一个 $n > 0$ 有

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^n} f^{p^n}(\lambda^n x).$$

取 $x = 0$, 再令 $n \rightarrow \infty$ 可知

$$f^{p^n}(0) = \lambda^n \rightarrow 0,$$

据此不难推出 $f(1) < 0$, 从而 $K(f)$ 形如 $RL \cdots$, 经反复利用引理 2, 即可得证.

2) 显然 $\sum_{\alpha^{*\infty}} \neq \emptyset$, 对任意的 $g \in \sum_{\alpha^{*\infty}}$, $K(g) = \alpha^{*\infty}$, 由于 $\alpha^{*\infty}$ 可视作 $\alpha * \alpha^{*\infty}$, 据引理 3, 只须验证不等式

$$R^{\infty} \leq \alpha^{*\infty} < RL^{\infty} \quad (2)$$

成立就够了, 把 $\alpha^{*\infty}$ 写作 $\alpha^{*2} * \alpha^{*\infty}$, 由于 α 成为 RC 或 $RL \cdots C$, 据 $*$ -积, α^{*2} 总是形如 $RL \cdots$, 进而对某个 $k \geq 1$, α^{*k} 形如 $RL^k R \cdots$, 因此式 (2) 成立.

3 结束语

Concluding remarks

单峰映射是其研究领域内广泛关注的研究课题, 揉搓序列是单峰映射研究中经常用到的一个重要工具. 本文研究了单峰映射揉搓序列的特性, 这些研究有助于更好地理解 Feigenbaum 现象.

参考文献

References

- [1] Milnor J, Thurston W. On iterated maps of the interval, dynamical systems[C] // Lecture notes in math. Berlin-New York: Springer, 1988; 1342, 465-563
- [2] Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations[J]. J Stat Phys, 1987(19): 25-52
- [3] Feigenbaum M J. The universal metric properties of nonlinear transformations[J]. J Stat Phys, 1979(21): 669-760
- [4] Collet P, Eckmann J P, Lanford O E. Universal properties of maps on an interval[J]. Comm Math Phys, 1980(76): 211-254
- [5] Collet P, Eckmann J P. Iterated maps on the interval as dynamical systems[M]. Boston: Birkhauser, 1980
- [6] Eckmann J P, Epstein H, Wittwer P. Fixed points of Feigenbaum's type for the equation $f^p(\lambda x) = \lambda f(x)$ [J]. Comm Math Phys, 1984(93): 495-516
- [7] DeMelo J, Jewellington, Van Strien Sebastian. One-dimensional dynamics[C] // Ergebnisse der Mathematic und ihrer Grenzgebiete (3). Berlin: Springer-Verlag, 1983
- [8] 张爱华, 廖公夫, 严珍珍. 单峰映射允许揉搓序列的维数和测度[J]. 数学年刊, 2006, 27A(2): 255-258
ZHANG Aihua, LIAO Gongfu, YAN Zhenzhen. Dimension and measure of unimodal map's admissible kneading sequences[J]. Chinese ann Math, 2006, 27A(2): 255-258.
- [9] 张爱华, 陈二才. 允许揉搓序列在乘积度量下的维数和测度[J]. 数学学报, 2009, 52(6): 1207-1210
ZHANG Aihua, CHEN Ercai. Dimension and measure of admissible kneading sequences with product metric measurement[J]. Acta Math, 2009, 52(6): 1207-1210
- [10] LIAO Gongfu, ZHANG Aihua. Renormalization operators and kneading sequences[J]. Northeast Math J, 1994, 10(2): 249-255

Characters of the unimodal map’s kneading sequence

ZHANG Aihua¹ ZHANG Hua¹

1 Department of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210046

Abstract In order to explain Feigenbaum phenomenon better, this paper researches on the unimodal map’s kneading sequence. An analytical method is used to prove some characters of this sequence’s maximality, and give a further equivalence condition under which a sequence can be regarded as an admissible kneading sequence. Using the relationship between the unimodal map $\mathcal{F}$ and the kneading sequence $\mathcal{T}_p$, this paper proposes the characters of the kneading sequence in terms of the fixed points of the renormalization operator $\mathcal{T}_p$.

Key words unimodal map ; kneading sequence ; admissible kneading sequence ; renormalization operator