文章编号:1674-7070(2009)03-0268-05

加法幂等半环上幂零矩阵的特征

官明友[1]

摘要

根据主子式、主对角元、幂零指数以及伴随矩阵给出了加法幂等半环上幂零矩阵的一些基本特征.

关键词

加法幂等半环;幂零矩阵;伴随矩阵

中图分类号 O151.21
文献标志码 A

0 引言
Introduction

幂零矩阵是一种重要的矩阵类型. 自20世纪60年代以来,许多学者探讨了一些特殊的幂等半环上幂零矩阵的性质,获得了许多重要的研究成果[1-11]. 1964年Give[3]证明了 n 阶格矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零的充要条件是 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$, Li[5]得到了模糊幂零矩阵的一些特征,这些结果被Tan[6]推广到幂零格矩阵上. Ren等[7]证明出模糊矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每1个主子式为0,这个结果被Tan[8]和Zhang[9]独自推广到格矩阵上. 近来,Han等[1]利用主子式、主对角元、幂零指数等刻画出在没有幂零元的坡上幂零矩阵的一些特征.

本文在上述基础上,进一步考虑一般加法幂等交换半环上幂零矩阵的一些性质,所得结果推广了文献[1,4-8]中相应的结论.

1 预备知识
Preliminaries

设 L 是1个非空集合,“$+$”与“$\cdot$”是 L 中的2个代数运算. 如果

1)$(L,+,0)$是1个交换幺半群,其中0为 L 的加法恒等元;

2)$(L,\cdot,1)$是1个幺半群,其中1为 L 的乘法恒等元;

3)对任意的 $a,b,c\in L$,均有
$$a(b+c)=ab+ac,\quad (b+c)a=ba+ca;$$

4)$\forall a\in L, 0\cdot a=a\cdot 0=0$;

5)$0\neq 1$,

则称 L 为1个半环,记为$(L,+,\cdot,0,1)$或简记为 L. 其中加法恒等元0称为半环 L 的零元,而乘法恒等元1称为半环 L 的单位元.

设$(L,+,\cdot,0,1)$是1个半环. L 称为交换半环,如果 $\forall a,b\in L$,均有 $ab=ba$;L 称为加法幂等半环,如果 $\forall a\in L$,均有 $a+a=a$. 显然布尔代数,Fuzzy代数,有界分配格以及坡均为特殊的加法幂等交换半环.

在加法幂等半环 L 上,定义关系“$\leqslant$”如下:
$$\forall x,y\in L,\quad x\leqslant y\Leftrightarrow x+y=y.$$
不难验证,关系“$\leqslant$”是 L 上的1个偏序关系. 另外,定义关系“$\geqslant$”如下:
$$\forall x,y\in L,\quad x\geqslant y \text{ 当且仅当 } y\leqslant x.$$

收稿日期 2009-07-22
资助项目 福建农林大学青年教师科研基金(08B23)

作者简介
官明友,男,硕士,讲师,主要研究代数学矩阵论. mingyouguan@126.com

1 福建农林大学 计算机与信息学院,福州,350002

根据上述关系易知 $\forall x\in L$,均有 $x\geqslant 0$. 若 $x\neq 0$,则记 $x>0$(或 $0<x$).

定义 1 设 L 是 1 个半环,$a\in L$. 如果存在 1 个正整数 k,使得 $a^k=0$,则称 a 是半环 L 上的 1 个幂零元.

设 L 是 1 个半环,用 $\boldsymbol{M}_n(L)$ 表示半环 L 上所有 n 阶矩阵组成之集.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(L)$,定义:

$$\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}\leqslant b_{ij},\quad i,j\in\underline{n};$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\sum_{k\in\underline{n}}a_{ik}b_{kj}).$$

其中:$\underline{n}$ 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$;$\boldsymbol{A}(i\Rightarrow j)$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 中用第 i 行替换第 j 行后所得的矩阵. 不难验证($\boldsymbol{M}_n(L)$,+,·)构成 1 个半环.

对于任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{M}_n(L)$,如果 $\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$,则易证 $\boldsymbol{AC}\leqslant\boldsymbol{BC}$,$\boldsymbol{CA}\leqslant\boldsymbol{CB}$.

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(L)$,令

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{l-1}\cdot\boldsymbol{A},\quad l=1,2,3,\cdots,$$

其中:$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵;$\boldsymbol{A}^l$ 中 (i,j) 处的元素记为 $a_{ij}^{(l)}$,即 $\boldsymbol{A}^l=(a_{ij}^{(l)})$. 不难证明

$$a_{ij}^{(l)}=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{l-1}\in\underline{n}}a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{l-1}j}.$$

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(L)$,$\boldsymbol{A}$ 的积和式 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A})$ 定义为 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A})=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i\in\underline{n}}a_{i\sigma(i)}$,其中 S_n 表示 n 阶对称群.

定义 3 设 $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant n$,并且 $1\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_r\leqslant n$,设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(L)$,用

$$\boldsymbol{A}[i_1,i_2,\cdots,i_r\mid j_1,j_2,\cdots,j_r]$$

表示 $\boldsymbol{A}$ 的 1 个 $r\times r$ 阶子矩阵,它在 (u,v) 处的元素等于 $a_{i_uj_v}(u,v\in\underline{r})$,用

$$\boldsymbol{A}(i_1,i_2,\cdots,i_r\mid j_1,j_2,\cdots,j_r)$$

表示在 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列之后所得的 $(n-r)\times(n-r)$ 阶子矩阵. 特别地,则称

$$\boldsymbol{A}[i_1,i_2,\cdots,i_r\mid i_1,i_2,\cdots,i_r]$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶主子矩阵,

$$\mathrm{per}(\boldsymbol{A}[i_1,i_2,\cdots,i_r\mid i_1,i_2,\cdots,i_r])$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶主子式.

$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$ 是 1 个 n 阶矩阵,它的 (i,j) 元素是 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(j\mid i))$.

定义 4 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(L)$,如果存在 1 个正整数 k,使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵. 其中 $\boldsymbol{O}$ 表示 n 阶零矩阵.

定义 5 设 L 是 1 个加法幂等交换半环,$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(L)$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的每 1 个主对角元为 0,则称 $\boldsymbol{A}$ 是反自反矩阵;如果 $\boldsymbol{A}^2\leqslant\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是传递矩阵.

定义 6 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(L)$,如果存在正整数 k 和 d,使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k+d}$,那么满足条件的最小的正整数 k 和 d 称为 $\boldsymbol{A}$ 的指数和周期,分别记为 $i(\boldsymbol{A})$ 和 $p(\boldsymbol{A})$. 相应地,在此情形下,则称 $\boldsymbol{A}$ 有指数,特别地,若 $p(\boldsymbol{A})=1$,则称 $\boldsymbol{A}$ 收敛于有限步.

如果 $\boldsymbol{A}\in M_n(L)$,$\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵,那么 $\boldsymbol{A}$ 收敛于有限步,此时 $i(\boldsymbol{A})$ 被称为 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数,即

$$i(\boldsymbol{A})=\min\{k\mid k\geqslant 1,\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}\}.$$

在本文中,若无特别声明,L 均表示加法幂等交换半环.

引理 1 如果 $\boldsymbol{A}\in M_n(L)$,那么

1) $\mathrm{per}(\boldsymbol{A})=\mathrm{per}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$,

2) $\mathrm{per}(\boldsymbol{A})=\sum_{j\in\underline{n}}a_{ij}\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i\mid j))$,$\forall i\in\underline{n}$,

3) $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=(\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}))^{\mathrm{T}}$.

证明从略

引理 2 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(L)$ 具有如下形式:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 是方阵,那么有 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A})=\mathrm{per}(\boldsymbol{B})\mathrm{per}(\boldsymbol{D})$.

证明类似于文献[12]中推论 4.1 的证明.

2 加法幂等半环上幂零矩阵的特征

Properties of the nilpotent matrices over an additively idempotent semi-ring

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(L)$,如果 $\forall k\in\underline{n}$,$\boldsymbol{A}^k$ 的所有主对角线上的元素均为 0,则 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}_n$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(L)$,$\boldsymbol{A}^n=(a_{ij}^{(n)})$,那么

$$a_{ij}^{(n)}=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\in\underline{n}}a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-1}j}.$$

记 $i_0=i$,$i_n=j$,则 $\{i_0,i_1,\cdots,i_n\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,故存在 $r,s\in\{0,1,\cdots n\}$,使得 $i_r=i_s$ 同时 $r<s$. 由于 $\forall k\in\underline{n}$,$\boldsymbol{A}^k$ 的所有主对角线的元素均为 0,所以 $\boldsymbol{A}^{s-r}$ 的所有主对角线的元素均为 0,从而

$$a_{i_ri_r}^{(s-r)}=\sum_{i_{r+1},i_{r+2},\cdots,i_{s-1}\in\underline{n}}a_{i_ri_{r+1}}a_{i_{r+1}i_{r+2}}\cdots a_{i_{s-1}i_r}=0,$$

因此,

$$\forall i_{r+1},\cdots,i_{s-1}\in\underline{n},$$

均有

$$a_{i_ri_{r+1}}a_{i_{r+1}i_{r+2}}\cdots a_{i_{s-1}i_r}=0,$$

于是

$$a_{ij}^{(n)}=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\in\underline{n}}a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-1}j}=$$

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\in \underline{n}} a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{r-1}i_r}(a_{i_ri_{r+1}}\cdots a_{i_{s-1}i_r})a_{i_si_{s+1}}\cdots a_{i_{n-1}j}=0$$

所以 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}_n$. 证毕.

推论 1 设 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_n(L)$ 是反自反且是传递的,那么 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(L)$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是传递的,故有 $\boldsymbol{A}^2\leqslant \boldsymbol{A}$,从而 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^2\leqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2\leqslant \boldsymbol{A}$. 一般地,有 $\forall k\in \underline{n}$,均有 $\boldsymbol{A}^k\leqslant \boldsymbol{A}$. 又由于 $\boldsymbol{A}$ 是反自反矩阵,即 $\forall i\in \underline{n}$,均有 $a_{ii}=0$,由此推出 $a_{ii}^{(k)}\leqslant a_{ii}=0$,从而有 $\forall k\in \underline{n}$,均有 $a_{ii}^{(k)}=0$. 由定理 1 知 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}_n$,所以 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵. 证毕.

定理 2 如果 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_n(L)$ 且 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式为 0,那么 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}_n$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{A}^n=(a_{ij}^{(n)})$,考虑 $a_{ij}^{(n)}$ 中的任意 1 项 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-1}j}$,必存在 s,t 使得 $0\leqslant s<t\leqslant n$,同时有 $i_s=i_t$(其中 $i_0=i,i_n=j$). 设

$$K=\{(p,q)\mid p<q,i_p=i_q\}.$$ 由于

$i_s=i_t$,故 $K\neq\varnothing$,从而存在 $(k,l)\in K$,满足 $l-k=\min\{q-p\mid(p,q)\in K\}$. 而 $a_{i_ki_{k+1}}a_{i_{k+1}i_{k+2}}\cdots a_{i_{l-1}i_l}$ 是主子式

$$\mathrm{per}(\boldsymbol{A}[i_k,i_{k+1},\cdots,i_{l-1}\mid i_k,i_{k+1},\cdots,i_{l-1}])$$

展开式的 1 项,并且

$$\mathrm{per}(\boldsymbol{A}[i_k,i_{k+1},\cdots,i_{l-1}\mid i_k,i_{k+1},\cdots,i_{l-1}])=0,$$

所以知

$$a_{i_ki_{k+1}}a_{i_{k+1}i_{k+2}}\cdots a_{i_{l-1}i_l}=0.$$

这样

$$a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-1}j}=a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}i_k}(a_{i_ki_{k+1}}a_{i_{k+1}i_{k+2}}\cdots a_{i_{l-1}i_l})a_{i_li_{l+1}}\cdots a_{i_{n-1}j}=0.$$

而 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-1}j}$ 是 $a_{ij}^{(n)}$ 中的任意一项,所以 $a_{ij}^{(n)}=0$,因此 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}_n$. 证毕.

引理 3 如果加法幂等半环 L 没有非零幂零元,且 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(L)$ 是幂零矩阵,则 $\forall i_1,i_2,\cdots,i_m\in \underline{n}$,均有 $a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{m-1}i_m}a_{i_mi_1}=0$,其中 m 是任意正整数.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵,故存在 1 个正整数 k,使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}_n$. 这样对于任意正整数 m,

$$\boldsymbol{A}^{mk}=(\boldsymbol{A}^k)^m=\boldsymbol{O}_n,$$

因此 $\forall i_1,i_2,\cdots,i_m\in \underline{n}$,均有

$$(a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{m-1}i_m}a_{i_mi_1})^k\leqslant a_{i_1i_1}^{(mk)}=0.$$

因为 $(a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{m-1}i_m}a_{i_mi_1})^k$ 是 $a_{i_1i_1}^{(mk)}$ 展开式的某一项,于是 $(a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{m-1}i_m}a_{i_mi_1})^k=0$. 由于 L 没有非零幂零元,因此 $a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{m-1}i_m}a_{i_mi_1}=0$. 证毕.

定理 3 如果加法幂等半环 L 没有非零幂零元,$\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_n(L)$,则下面条件等价:

1) $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵;

2) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式为 0;

3) $\boldsymbol{A}^n=O_n$;

4) $\boldsymbol{A}^k$ 的所有主对角线上的元素均为 0, $\forall k\in \underline{n}$.

证明 1)⇒2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,设

$$r\in \underline{n},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}[i_1,i_2,\cdots,i_r\mid i_1,i_2,\cdots,i_r]$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的任 1 个 r 阶主子矩阵,那么

$$\mathrm{per}(\boldsymbol{B})=\sum_{\sigma\in S_r}\prod_{t\in \underline{r}}a_{i_t\sigma(i_t)},$$

其中 S_r 表示集合 $\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$ 上的对称群. 对于 $\forall\sigma\in S_r$,再设 $(k_1k_2\cdots k_m)$ 是 σ 中的任 1 个循环(因为 σ 可以表为一些循环的乘积),则有 $a_{k_1k_2}a_{k_2k_3}\cdots a_{k_{m-1}k_m}a_{k_mk_1}=0$(根据引理 3). 又因为 $a_{k_1k_2}a_{k_2k_3}\cdots a_{k_{m-1}k_m}a_{k_mk_1}$ 是 $a_{i_1\sigma(i_1)}a_{i_2\sigma(i_2)}\cdots a_{i_r\sigma(i_r)}$ 中的 1 个因子,所以 $a_{i_1\sigma(i_1)}a_{i_2\sigma(i_2)}\cdots a_{i_r\sigma(i_r)}=0$,从而 $\mathrm{per}(\boldsymbol{B})=0$.

2)⇒3) 根据定理 2 可得,

3)⇒4) 根据引理 3 可得,

4)⇒1) 根据定理 1 可得.

证毕.

推论 2 如果加法幂等半环 L 没有非零幂零元,$\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_n(L)$ 是幂零矩阵,则 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A})=0$.

定理 4 如果加法幂等半环 L 没有非零幂零元,$\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_n(L)$ 是幂零矩阵,那么 $i(\boldsymbol{A})=n$ 当且仅当 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\neq 0$.

证明 “⇒”设 $i(\boldsymbol{A})=n$,故 $\boldsymbol{A}^{n-1}\neq \boldsymbol{O}$. 从而存在 $i_0,i_1,\cdots,i_{n-1}\in \underline{n}$,使得 $a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-2}i_{n-1}}>0$. 那么 $i_0,i_1,\cdots,i_{n-1}$ 必定两两不同,否则存在 s,t 满足 $i_s=i_t$ 同时 $0\leqslant s<t\leqslant n-1$. 根据引理 3 知

$$a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-2}i_{n-1}}=a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{s-1}i_s}(a_{i_si_{s+1}}\cdots a_{i_{t-1}i_t})a_{i_ti_{t+1}}\cdots a_{i_{n-2}i_{n-1}}=0$$

矛盾.

因此 $i_0,i_1,\cdots,i_{n-1}$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的 1 个排列. 于是 $a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-2}i_{n-1}}$ 是 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i_{n-1}\mid i_0))$ 展开式中的 1 项,所以 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i_{n-1}\mid i_0))>0$. 这就推出

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\neq 0.$$

“⇐”假设 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\neq 0$,当 $n=2$ 时,根据定理 3 知 $\boldsymbol{A}^2=O$,设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},$$

则

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}a_{22} & a_{12}\\ a_{21} & a_{11}\end{pmatrix},$$

故当 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 时,有 $\boldsymbol{A}\neq \boldsymbol{O}$,所以 $i(\boldsymbol{A})=2$.

现在考虑 $n\geqslant 3$ 的情形.

由 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 知存在 i,j 使得 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i\mid j))>0$,根据定理3可知 $i\neq j$,那么存在1个从 $\underline{n}\setminus\{i\}$ 到 $\underline{n}\setminus\{j\}$ 的双射 σ,使得

$$\prod_{s\in\underline{n}\setminus\{i\}} a_{s\sigma(s)}>0.$$

现定义1个双射 $\bar{\sigma}:\underline{n}\to\underline{n}$,使得

$$\bar{\sigma}(z)=\begin{cases} j, & z=i,\\ \sigma(z), & z\neq i.\end{cases}$$

那么 $\bar{\sigma}$ 是 $\underline{n}$ 的1个置换.

将证明对任意 $s\in\underline{n}\setminus\{i\}$,存在1个 $l(1\leqslant l\leqslant n-1)$ 使得 $\bar{\sigma}^l(s)=i$,假设存在某1个 $s\in\underline{n}\setminus\{i\}$ 使得 $\forall l\leqslant n-1$ 均有 $\bar{\sigma}^l(s)\neq i$. 因为 $\forall l\leqslant n-1$,均有 $\bar{\sigma}^l(s)=\sigma^l(s)$,那么

$$\{\sigma(s),\sigma^2(s),\cdots,\sigma^{n-1}(s)\}\subseteq\underline{n}\setminus\{i,j\}.$$

设

$$K=\{(p,q)\mid 1\leqslant p<q\leqslant n-1,\sigma^p(s)=\sigma^q(s)\},$$

则 $K\neq\varnothing$. 由于 $|\underline{n}\setminus\{i,j\}|=n-2$,选择1对元素 $(u,v)\in K$,满足 $v-u=\min\{q-p\mid(p,q)\in K\}$,那么 $\sigma^u(s),\sigma^{u+1}(s),\cdots,\sigma^{v-1}(s)$ 两两不同且 $\sigma^v(s)=\sigma^u(s)$. 所以根据引理3知

$$a_{\sigma^u(s)\sigma^{u+1}(s)}\cdots a_{\sigma^{v-1}(s)\sigma^v(s)}=0,$$

又由于 $a_{\sigma^u(s)\sigma^{u+1}(s)}\cdots a_{\sigma^{v-1}(s)\sigma^v(s)}$ 是乘积 $\prod\limits_{s\in\underline{n}\setminus\{i\}} a_{s\sigma(s)}$ 中的1个因子,所以

$$\prod_{s\in\underline{n}\setminus\{i\}} a_{s\sigma(s)}=0$$

矛盾. 这样,对任意 $s\in\underline{n}\setminus\{i\}$,存在1个 $l(1\leqslant l\leqslant n-1)$ 使得 $\bar{\sigma}^l(s)=i$. 对任意 $s\in\underline{n}\setminus\{i\}$,设 $l(s)=\min\{l\mid\bar{\sigma}^l(s)=i\}$,由于 $\bar{\sigma}$ 是双射,那么

$$l(1),\cdots,l(i-1),l(i+1),\cdots,l(n)\in\underline{n-1},$$

且两两不同. 因此存在1个 $t\in\underline{n}\setminus\{i\}$,使得 $l(t)=n-1$,即 $\bar{\sigma}^{n-1}(t)=i$. 易知 $t,\bar{\sigma}(t),\cdots,\bar{\sigma}^{n-2}(t)\in\underline{n}\setminus\{i\}$ 且两两不同,同时 $\forall r\in\underline{n-2}$,均有 $\bar{\sigma}^r(t)=\sigma^r(t)$,所以

$$\{t,\sigma(t),\cdots,\sigma^{n-2}(t)\}=\underline{n}\setminus\{i\}$$

且

$$\underline{n}\setminus\{j\}=\{\sigma(t),\sigma(\sigma(t)),\cdots,\sigma(\sigma^{n-2}(t))\}=\{\sigma(t),\sigma^2(t),\cdots,i\},$$

故

$$a_{ti}^{(n-1)}\geqslant a_{t\sigma(t)}a_{\sigma(t)\sigma^2(t)}\cdots a_{\sigma^{n-2}(t)i}=\prod_{s\in\underline{n}\setminus\{i\}}a_{s\sigma(s)}>0,$$

这表明 $\boldsymbol{A}^{n-1}\neq\boldsymbol{O}$,根据定理3知道 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}_n$,所以 $i(\boldsymbol{A})=n$. 证毕.

注:定理4把坡(特殊的加法幂等半环)上幂零矩阵的性质在文献[1]中的定理3.6推广到一般加法幂等半环上.

定理5 如果加法幂等半环 L 没有非零幂零元,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{M}_n(L)$ 是幂零矩阵,那么

1) $\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i\Rightarrow j))=0,(\forall i,j\in\underline{n})$,

2) $\boldsymbol{A}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})=\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证明 1) $\forall i\in\underline{n}$,根据推论2知

$\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i\Rightarrow i))=\mathrm{per}(\boldsymbol{A})=0$. $\forall i,j\in\underline{n},i\neq j$,有

$$\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i\Rightarrow j))=\sum_{\sigma\in S_n}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

对每1个 $\sigma\in S_n$,有2种情形需要讨论:

情形1:对所有的正整数 l,$\sigma^l(i)\neq j$. 在此情形下,存在1个 d 满足 $1\leqslant d\leqslant n-1$,$\sigma^d(i)=i$,同时 $i,\sigma(i),\cdots,\sigma^{d-1}(i)$ 两两不同且都不等于 j,根据引理3知

$$a_{i\sigma(i)}a_{\sigma(i)\sigma^2(i)}\cdots a_{\sigma^{d-1}(i)i}=0,$$

又由于

$$a_{i\sigma(i)}a_{\sigma(i)\sigma^2(i)}\cdots a_{\sigma^{d-1}(i)i}=0$$

是 $a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ 中的1个因子,所以

$$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}=0.$$

情形2:存在1个正整数 l 使得 $\sigma^l(i)=j$,在这种情形下,必存在1个正整数 $d(1\leqslant d\leqslant n)$,使得 $\sigma^d(j)=i$,且 $i,\sigma(j),\cdots,\sigma^{d-1}(j)$ 两两不同. 根据引理3知

$$a_{i\sigma(j)}a_{\sigma(j)\sigma^2(j)}\cdots a_{\sigma^{d-1}(j)i}=0,$$

又因为

$$a_{i\sigma(j)}a_{\sigma(j)\sigma^2(j)}\cdots a_{\sigma^{d-1}(j)i}$$

是 $a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ 中1个因子,所以

$$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}=0.$$

通过以上两种情形的讨论,可以得到 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i\Rightarrow j))$ 展开式中的每1项均为0,所以 $\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i\Rightarrow j))=0$.

2) 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})=(b_{ij})$,那么 $\forall i,j\in\underline{n}$,根据引理1,有

$$b_{ij}=\sum_{k\in\underline{n}}a_{ik}\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(j\mid k))=\mathrm{per}(\boldsymbol{A}(i\Rightarrow j))=0,$$

故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 由于

$$(\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),$$

由上面所证的等式知 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证毕.

注:定理5推广了文献[1]中的定理3.7.

定理6 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(L)$ 是幂零矩阵,那么 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 也是幂零矩阵.

证明 由定理 3 中的 2) 和引理 2 可推得.

注:定理 6 推广了文献[1]中的定理 3.8.

推论 3 设 $\boldsymbol{A}_{ii} \in \boldsymbol{M}_n(L)$ 是幂零矩阵($i \in \underline{r}$),那么

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rr} \end{pmatrix}$$

也是幂零矩阵.

参考文献

References

[1] Han S C, Li H X, Wang J Y. On nilpotent incline matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 406: 201-217

[2] Duan J S. The transitive closure, convergence of powers and adjoint of generalized fuzzy matrices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 145: 301-311

[3] Give'on Y. Lattice matrices[J]. Inform and Control, 1964(7): 477-484

[4] Hashimoto H. Reduction of a nilpotent fuzzy matrices[J]. Inform Sci, 1982(27): 223-243

[5] Li J X. Some results on the nilpotent fuzzy matrices[J]. Fuzzy Systems Math, 1989(3): 52-55

[6] Tan Y J. On nilpotent matrices over distributive lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151: 421-433

[7] Ren H T, Zhang Z, Liu Z S. A necessary and sufficient condition for nilpotent fuzzy matrices[J]. Acta Sci Natur Univ Neimonggol, 1996, 27: 594-596

[8] Tan Y J. On the powers of matrices over a distributive lattice[J]. Linear Algebra Appl, 2001, 336: 1-14

[9] Zhang K L. On the nilpotent matrices over D01-lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117: 403-406

[10] Lur Y Y, Pang C T, Guu S M. On simultaneously nilpotent fuzzy matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2003, 367: 37-45

[11] Lur Y Y, Pang C T, Guu S M. On nilpotent fuzzy matrices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 145: 87-299

[12] Han S C, Li H X. Invertible incline matrices and Cramer's rule over inclines[J]. Linear Algebra Appl, 2004, 389: 121-138

Properties of the nilpotent matrices over an additively idempotent semi-ring

GUAN Mingyou[1]

1 College of Computer and Information, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002

Abstract In this paper, we give some basic properties of the nilpotent matrices over an additively idempotent semi-ring in terms of principal minors, main diagonals, nilpotent indices and adjoint matrices.

Key words additively idempotent semi-rings; nilpotent matrix; adjoint matrix