文章编号:1674-7070(2009)03-0264-04

关于 Eberlein-Šmulian 定理的注记

朱杏华[1]　肖建中[1]

摘要

基于对证明方法的分析,利用度量化技巧与 Whitley 构造技术,给出 Eberlein-Šmulian 定理的一个细致简单的证明.此证明不借助完备性,因此不影响定理的实质;仅用到 Banach-Alaoglu 定理与 Hahn-Banach 定理,因此容易被初学者理解.

关键词

Eberlein-Šmulian 定理;Whitley 构造;弱拓扑;弱 * 拓扑

中图分类号 O177.3+1

文献标志码 A

收稿日期 2009-08-24

资助项目 南京信息工程大学自然科学基金(20080286)

作者简介

朱杏华,女,副教授,主要研究方向为泛函分析及应用.zhuxh@nuist.edu.cn

1　南京信息工程大学　数理学院,南京,210044

0　引言

Introduction

紧性是一个拓扑性质,也是泛函分析空间理论所讨论的对象之一.在拓扑空间 X 中,子集 A 有下列 4 种主要的紧性:

若 A 的每个开覆盖存在有限子覆盖,则称 A 为紧集;

若 A 的每个可数开覆盖存在有限子覆盖,则称 A 为可数紧集;

若 A 的每个无限子集在 A 中存在聚点,则称 A 为聚点紧集;

若 A 的每个序列都存在收敛的子序列收敛于 A 中的点,则称 A 为自列紧集.

显然,紧蕴涵可数紧;自列紧蕴涵聚点紧.已知在具有 T_1 分离性的拓扑空间中,可数紧性等价于聚点紧性.由于泛函分析中涉及到的空间大多是 Hausdorff 空间,故将聚点紧与可数紧不加区分,都称为可数紧.已知在度量空间或在范数拓扑下,紧、可数紧、自列紧这 3 种紧性等价.

紧性概念在应用上十分重要,与最大值的可达性、最佳逼近的存在性等有关.然而在无限维赋范空间中,闭单位球不是紧的.因此在无限维赋范空间中,范数拓扑下的这种紧性失去应有作用,需要用较弱的紧性来替代.

以下设 X 是赋范空间,X^* 与 X^{**} 分别表示 X 的共轭空间(即 X 上的连续线性泛函之集)与 2 次共轭空间,θ 代表这些空间的原点,$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集.$B[X^*]$ 与 $S(X^*)$ 分别是 X^* 的原点闭单位球与单位球面.X 上的范数拓扑记为 τ_N.按习惯,$\bar{A}$ 表示 X 的子集 A 关于 τ_N 的闭包.X 上除了范数拓扑外,可定义弱拓扑 $\tau(X,X^*)$,它表示使 X^* 中元在 X 上都连续的最弱的拓扑.J 表示从 X 到 X^{**} 的自然嵌入算子,JX 可看成 X^{**} 的子空间.在 X^* 上除了范数拓扑外,可定义弱 * 拓扑 $\tau(X^*,X)$,它表示使 X 中元(看成 X^{**} 中元)在 X^* 上都连续的最弱的拓扑.记号 $\tau(X^{**},X^*)$ 有同样含义,指 X^{**} 上的弱 * 拓扑.

所谓弱紧性是指在弱拓扑 $\tau(X,X^*)$ 下的紧性,而弱 * 紧性是指在弱 * 拓扑 $\tau(X^*,X)$ 下的紧性.著名的 Banach-Alaoglu 定理指出 $B[X^*]$ 是弱 * 紧的,因而弱紧性与弱 * 紧性在无限维赋范空间相关问题的讨论中确实能发挥重要作用.

当 X 的维数无限时,弱拓扑 $\tau(X,X^*)$ 与弱 * 拓扑 $\tau(X^*,X)$ 都是不可度量化的.一个重要的理论问题是:弱紧、弱可数紧、弱自列紧是否仍然等价?弱 * 紧、弱 * 可数紧、弱 * 自列紧是否仍然等价?

文献[1]中的反例表明,弱 * 紧、弱 * 可数紧、弱 * 自列紧是不等价的.1940 年与 1947 年,Šmulian 与 Eberlein 分别发现并证明弱紧、弱

可数紧、弱自列紧 3 者是等价的[1],即有下述定理:

Eberlein-Šmulian 定理 设 X 是赋范空间,$A\subset X$,则下列性质等价:

(a) A 是弱紧的;

(b) A 是弱自列紧的;

(c) A 是弱可数紧的.

国内外经典的泛函分析教科书都介绍了这一定理. 有些教科书(例如,文献[2-3])只给出结论而略去了定理的证明. 从方法论角度说,介绍证明是必要的. 但证明如果深奥到不容易被初学者理解,证而不明,则其内容便失去作为教育数学的本质意义. 本文的目的是希望对 Eberlein-Šmulian 定理给出一个细致简单的证明.

1 证明方法的分析

Analysis of its proofs

证明 Eberlein-Šmulian 定理有多种方法. 一般来说,如果利用高深工具,证明篇幅短但不易懂;如果仅限用弱拓扑与弱 * 拓扑的最基本工具,则篇幅会很长,也会增加理解的难度. 无论采取什么方法,都不能避开使用 Banach-Alaoglu 定理,因为它是处理这方面问题最基本的工具.

自 Eberlein-Šmulian 定理问世以来,陆续有学者提出"新证法"与"初等的证法",例如文献[4-6]. 文献[4] 利用基序列来证,方法精巧,但篇幅不短,还用到完备性,就是说,在 Banach 空间的条件下证明了 Eberlein-Šmulian 定理. 文献[7]指出该方法不能避开完备性的使用. 完备的空间中弱 * 紧集必是有界集,而在不完备的空间中弱 * 紧集却未必是有界集[1],差异太大. 因此用基序列方法未能真正完成证明. 文献[6]利用双极限准则来证,方法自然,篇幅不长. 但只是写得简短而已,略去了序列构造的关键步骤,有证而不明之嫌. 文献[5]的证法是经典的,基本思想来源于文献[8]. 其中的关键技术已被众多文献采用,如文献[9] 称之为 Day 引理,文献[7] 称之为 Whitley 结构,文献[10] 称之为 Whitley 构造. 文献[11]在一般局部凸空间中对 Eberlein-Šmulian 定理的后续研究也用了 Whitley 构造技术. 因而 Whitley 构造极具教育价值,为作者所推崇. 另外,文献[5]对于弱紧蕴涵弱自列紧的证法也是十分自然的. 对无限维空间而言,弱拓扑一般不可度量化. 如果能在某子集上实现度量化,那么度量拓扑下两种紧性等价的结果就能利用.

度量化技巧与 Whitley 构造技术是本文下面的证明所采用的主要方法.

2 Eberlein-Šmulian 定理的证明

Proof of the Eberlein-Šmulian theorem

引理 1[2-3,7-10,12](Banach-Alaoglu 定理) 设 X 是赋范空间,则 X^* 的原点闭单位球 $B[X^*]$ 关于弱 * 拓扑 $\tau(X^*,X)$ 是弱 * 紧集.

利用 Hahn-Banach 凸集隔离定理容易得到:

引理 2[3,9,12] 设 X 是赋范空间,A 是 X 的非空凸集. 则 A 的关于 $\tau(X,X^*)$ 的闭包 $c_w(A)$ 与关于 τ_N 的闭包 $\overline{A}$ 相等.

利用恒等映射的连续性容易推出:

引理 3[3,12] 设 τ_1 与 τ_2 都是集合 Y 上的拓扑,$\tau_1\subset\tau_2$. 若 τ_1 是 Hausdorff 拓扑,τ_2 是紧拓扑,则 $\tau_1=\tau_2$.

设 Y 是紧拓扑空间,$C(Y)$ 表示 Y 上连续函数全体. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(Y)$. 若当 $x,y\in Y$, $x\neq y$ 有 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|f_n(x)-f_n(y)|>0$,则称$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$分离 Y 的点.

引理 4[3,12] 设 Y 是紧拓扑空间. 若存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(Y)$ 且分离 Y 的点,则 Y 是可度量化的.

令 $\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}M_n^{-1}|f_n(x)-f_n(y)|$,

其中 $M_n=\sup\limits_{x\in Y}|f_n(x)|$. 则 ρ 为 X 上的度量,从而利用引理 3 的结论,引理 4 也是容易验证的.

由于从赋范空间 X 到 X^{**} 的自然嵌入算子 J 是从拓扑线性空间$(X,\tau(X,X^*))$到拓扑线性空间$(JX,\tau(X^{**},X^*))$的线性同胚映射,故下述结论成立.

引理 5[12] 设 X 是赋范空间,$A\subset X$. 则 A 是 $\tau(X,X^*)$紧的当且仅当 JA 是 $\tau(X^{**},X^*)$紧的.

引理 6 设 X 是赋范空间,E^{**} 是 X^{**} 的有限维子空间. 则在 X^* 的单位球面 $S(X^*)$上存在一有限集 F^* 使得对于每个 $z^{**}\in E^{**}$ 有

$$\max\left\{|z^{**}(y^*)|:y^*\in F^*\right\}\geqslant\frac{\|z^{**}\|}{2}.$$

证明 因为 E^{**} 是有限维的,单位球面 $S(E^{**})$ 按范数拓扑是紧的,故有有限$\frac{1}{4}$-网

$$\left\{e_1^{**},e_2^{**},\cdots,e_n^{**}\right\}\subset S(E^{**}).$$

因为 $1=\|e_j^{**}\|=\sup\limits_{\|x^*\|=1}|e_j^{**}(x^*)|$,故可选取 $y_j^*\in S(X^*)$使

$$e_j^{**}(y_j^*)>\frac{3}{4},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

令 $F^*=\{y_1^*,\cdots,y_n^*\}$. 则 $F^*\subset S(X^*)$. 当 $z^{**}\in E^{**}$ 时,不妨设 $z^{**}\neq\theta$,则 $e^{**}=\dfrac{z^{**}}{\|z^{**}\|}\in S(E^{**})$,必存在 $j(1\leqslant j\leqslant n)$ 使 $\|e_j^{**}-e^{**}\|<\dfrac{1}{4}$. 于是

$$e^{**}(y_j^*)=e_j^{**}(y_j^*)-[e_j^{**}(y_j^*)-e^{**}(y_j^*)]\geqslant\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

即 $z^{**}(y_j^*)\geqslant\dfrac{\|z^{**}\|}{2}$. 因此引理 6 的结论是成立的.

Eberlein-Šmulian 定理的证明 首先证明(a)$\Rightarrow$(b). 设 A 是 X 的弱紧集,$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是 A 中任意点列. 令 $A_0=\overline{\operatorname{span}}\{a_n\}_{n=1}^\infty$. 由于 A_0 是闭线性子空间,故由引理 2 知 A_0 是弱闭的. 于是 $A\cap A_0$ 是弱紧集. 由于 A_0 是可分的,故可设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 A_0 的可数稠密集. 由 Hahn-Banach 定理,可选取 A_0 的共轭空间 A_0^* 中单位球面上的元素 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 使得 $x_n^*(x_n)=\|x_n\|$, $n\in\mathbf{Z}^+$. 于是 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty\subset C(A\cap A_0)$. 设

$$x,y\in A\cap A_0,\quad x\neq y,\quad \delta=\frac{\|x-y\|}{4}>0.$$

因为存在 x_k 使 $\|x_k-(x-y)\|<\delta$, 故 $\|x-y\|-\|x_k\|<\delta$. 于是

$$\begin{aligned}&|x_k^*(x)-x_k^*(y)|=\\&|x_k^*(x_k)-x_k^*(x_k-x+y)|\geqslant\\&|x_k^*(x_k)|-|x_k^*(x_k-x+y)|\geqslant\\&\|x_k\|-\|x_k^*\|\|x_k-(x-y)\|\geqslant\\&\|x_k\|-\delta\geqslant\|x-y\|-2\delta>0,\end{aligned}$$

即 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 分离 $A\cap A_0$ 的点. 由引理 4, $A\cap A_0$ 是可度量化的. 由于在度量空间中紧性与自列紧性是等价的,故 $A\cap A_0$ 是弱自列紧集. 因为 $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset A\cap A_0$, 故 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 有子点列 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ 在 $A\cap A_0$ 中弱收敛于 a. 这表明 A 是弱自列紧的.

(b)$\Rightarrow$(c)是显然的. 下面证明(c)$\Rightarrow$(a)设 A 是 X 的弱可数紧集. 根据引理 6,要证明 A 关于 $\tau(X,X^*)$ 是紧集,只须证明 JA 关于 $\tau(X^{**},X^*)$ 是紧集,其中 J 为从 X 到 X^{**} 的自然嵌入算子. 因为 A 是有界的,故 JA 是有界的,按 Banach-Alaoglu 定理(引理 1),只须证明 JA 关于 $\tau(X^{**},X^*)$ 是闭的.

为了证明 JA 关于 $\tau(X^{**},X^*)$ 是闭的,设 $c(JA)$ 为 JA 的 $\tau(X^{**},X^*)$ 闭包,只要证明由 $x^{**}\in c(JA)$ 得出存在 $a\in A$ 使 $Ja=x^{**}$. 由于 $c(JA-x^{**})=c(JA)-x^{**}$,即拓扑线性空间中集的闭包具有可平移性,故只要由 $\theta\in c(JA)$ 证明 $\theta\in A$. 采用反证法,假设 $\theta\notin A$,则 $\theta\in c(JA)\setminus JA$. 利用 θ 的每个 $\tau(X^{**},X^*)$ 邻域含有 JA 中元素这一事实,现构造递增的 $S(X^*)$ 的有限子集的序列 $\{F_n^*\}_{n=1}^\infty$ 与点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset A$ 使当 $i\neq j$ 时有 $a_i\neq a_j$,且满足

$$\max\{|Ja_{n+1}(y^*)|:y^*\in F_n^*\}<\frac{1}{(n+1)};\qquad(1)$$

$$\max\{|z^{**}(y^*)|:y^*\in F_n^*\}\geqslant\frac{\|z^{**}\|}{2},$$

$$\forall z^{**}\in\operatorname{span}\{Ja_1,Ja_2,\cdots,Ja_n\}.\qquad(2)$$

取 $a_1\in A$, $y_1^*\in S(X^*)$, 使 $|Ja_1(y_1^*)|\geqslant\dfrac{\|y_1^*\|}{2}$,记 $F_0^*=F_1^*=\{y_1^*\}$,则(1)与(2)成立.

设已构造递增的 $S(X^*)$ 的有限子集的序列 $\{F_i^*\}_{i=1}^{n-1}$ 与互异点列 $\{a_i\}_{i=1}^n\subset A$ 使(1)与(2)满足. 由于 $\left\{x^{**}\in X^{**}:|x^{**}(y^*)|<\dfrac{1}{(n+1)},\quad y^*\in F_n^*\right\}$ 是 θ 的 $\tau(X^{**},X^*)$ 邻域,故存在 $a_{n+1}\in A$ 使

$$Ja_{n+1}\in JA\setminus\{Ja_i\}_{i=1}^n$$

并满足(1). 利用引理 6,在 $S(X^*)$ 上存在一有限集 G_n^* 使得对于 $\forall z^{**}\in\operatorname{span}\{Ja_1,Ja_2,\cdots,Ja_n\}$ 有

$$\max\{|z^{**}(y^*)|:y^*\in G_n^*\}\geqslant\frac{\|z^{**}\|}{2}.$$

令 $F_n^*=F_{n-1}^*\cup G_n^*$,

则(2)成立. 由归纳法便完成了 $\{F_n^*\}_{n=1}^\infty$ 与 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 的构造.

令 $D^*=\bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n^*$,则由(2)推出

$$\sup\{|z^{**}(y^*)|:y^*\in D^*\}\geqslant\frac{\|z^{**}\|}{2},$$

$$\forall z^{**}\in\operatorname{span}\{Ja_n\}_{n=1}^\infty.\qquad(3)$$

现设 $z_0^{**}\in\overline{\operatorname{span}}\{Ja_n\}_{n=1}^\infty$. 则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $z^{**}\in\operatorname{span}\{Ja_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\|z_0^{**}-z^{**}\|<\varepsilon$,由(3),存在 $y_0^*\in D^*$ 使 $|z^{**}(y_0^*)|\geqslant\dfrac{\|z^{**}\|}{2}-\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}&|z_0^{**}(y_0^*)|\geqslant\\&|z^{**}(y_0^*)|-|z^{**}(y_0^*)-z_0^{**}(y_0^*)|\geqslant\\&\frac{\|z^{**}\|}{2}-2\varepsilon>\frac{\|z_0^{**}\|}{2}-3\varepsilon.\end{aligned}$$

从而有 $\sup\{|z_0^{**}(y^*)|:y^*\in D^*\}\geqslant\dfrac{\|z_0^{**}\|}{2}$. 因此,

$$\sup\{|z^{**}(y^*)|:y^*\in D^*\}\geqslant\frac{\|z^{**}\|}{2},$$

$$\forall z^{**}\in\overline{\operatorname{span}}\{Ja_n\}_{n=1}^\infty.\qquad(4)$$

由于 A 是弱可数紧的,故可设存在 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 的弱聚点 $x\in A$. 由于按引理 2, $\overline{\operatorname{span}}\{a_n\}$ 是弱闭的,所以

$x \in \overline{\mathrm{span}}\{a_n\}$. 由此可知 $Jx \in \overline{\mathrm{span}}\{Ja_n\}$. 根据(4)得

$$\sup\left\{ |Jx(y^*)| : y^* \in D^* \right\} \geqslant \frac{\|Jx\|}{2}. \qquad (5)$$

注意到对 $\forall y^* \in D^*$ 有

$$|Jx(y^*)| \leqslant |(Jx - Ja_n)(y^*)| + |Ja_n(y^*)|. \qquad (6)$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 x 是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的弱聚点, 故 Jx 的 $\tau(X^{**}, X^*)$ 邻域

$$\left\{ x^{**} \in X^{**} : |x^{**}(y^*) - Jx(y^*)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

含 $\{Ja_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的无限多个元 $\{Ja_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, 即

$$|Ja_{n_j}(y^*) - Jx(y^*)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $y^* \in F_{n_i}$, 其中 $n_i \in \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$. 则由 $\{F_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 的递增性, 当 $n \geqslant n_i$ 有 $y^* \in F_n$. 于是对任意 $j \in \mathbf{Z}^+$, 当 $j > i$ 且使 $n_j > \frac{2}{\varepsilon}$ 时, 根据式(1)有

$$|(Ja_{n_j})(y^*)| < \frac{1}{n_j} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

故在式(6)中取 $n = n_j (j > i)$ 有 $|Jx(y^*)| < \varepsilon$. 这表明

$$\sup\left\{ |Jx(y^*)| : y^* \in D^* \right\} = 0. \qquad (7)$$

结合式(5)与式(7)知 $Jx = \theta, \theta = x \in A$, 矛盾. 因此 JA 是 $\tau(X^{**}, X^*)$ 闭的. 证毕.

3 结束语

Concluding remarks

以上证明不涉及 X 的完备性, 不影响定理的实质. 其证明的主要思想方法来源于文献[5], 但不同于文献[5], 也不同于现有其它文献. 确切地说, 本文给出的证明避开了关于相对弱拓扑的讨论. 弱拓扑下的证明结果自然适用于相对弱拓扑, 因此由相对弱拓扑的讨论产生的繁冗是多余的. 另外, 本文(a)⇒(b)部分的证明可以看做是文献[5]相应部分证明的细致化; 而(c)⇒(a)部分的证明利用了向量平移技巧, 避免了 F_n^* 中的点的排序, 可以看做是文献[5]相应部分证明的简化. 与其它文献比较, 本文中的证明细致简单, 且篇幅也不长, 更容易被初学者理解.

参考文献

References

[1] 汪林. 泛函分析中的反例[M]. 北京:高等教育出版社,1994
WANG Lin. Counterexamples in functional analysis [M]. Beijing: Higher Education Press,1994

[2] Conway J B. A course in functional analysis [M]. Berlin/Heidelberg/New York:Springer Verlag,2003

[3] Rudin W. Functional analysis [M]. Beijing: China Machine Press,2004:46-52

[4] Pelczyński A. A proof of the Eberlein-Šmulian theorem by an application of basic sequences [J]. Bull Polon Sci Ser Math Astr et Phys,1964,12:543-548

[5] Whitley R. An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem [J]. Mathematische Annalen,1967,172(3):116-118

[6] Kremp S. An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem and the double limit criterion [J]. Archiv der Mathematik,1986,47(1):66-69

[7] 定光桂. 泛函分析新讲[M]. 北京:科学出版社,2007:304-355
DING Guanggui. New theory in functional analysis [M]. Beijing: Science Press,2007:304-355

[8] Day M M. Normed linear spaces [M]. Berlin/Heidelberg:Springer,1958:102-150

[9] Megginson R E. An introduction to Banach spaces theory [M]. Berlin/Heidelberg/New York:Springer Verlag,2003:211-256

[10] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海:华东师大出版社,1986:75-107
YU Xintai. Theory of geometry in Banach space [M]. Shanghai: Huadong Normal University Press,1986:75-107

[11] 武俊德,李容录,曲文波. Eberlein-Šmulian 定理在局部凸空间中的推广[J]. 数学学报,1991,41(3):663-666
WU Junde, LI Ronglu, QU Wenbo. The extension of Eberlein-Šmulian theorem in locally convex spaces [J]. Acta Mathematica Sinica,1991,41(3):663-666

[12] 肖建中,李刚. 抽象分析基础[M]. 北京:清华大学出版社,2009:280-290
XIAO Jianzhong, LI Gang. Fundamentals of abstract analysis [M]. Beijing:Tsinghua University Press,2009:280-290

A note on the Eberlein-Šmulian theorem

ZHU Xinghua[1] XIAO Jianzhong[1]

1 School of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044

Abstract The Eberlein-Šmulian theorem is one of the basic and profound results in functional analysis. There are many proofs of it. In this paper, based on the analysis of the proofs, a brief and careful proof of the Eberlein-Šmulian theorem is given by use of the metrization skill and the Whitley structure. The completeness is not necessary in the proof, thus it will not hurt the essence of the theorem at all. Only the Banach-Alaoglu theorem and the Hahn-Banach theorem are used in the proof, so as to be easy for students to understand.

Key words Eberlein-Šmulian theorem; Whitley structure; weak topology; weak * topology