文章编号:1674-7070(2009)03-0258-06

以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的无偏 GM(1,1)模型

熊萍萍[1]　门可佩[1]　吴香华[1]

摘要

根据灰色系统理论的新信息优先原理,在建模过程中赋予新信息较大的权重可以显著提高灰色建模的功效. 将无偏 GM(1,1)模型的初始条件由 $x^{(1)}(1)$ 改为 $x^{(1)}(n)$,对原模型进行改进,从而提高了所建模型的模拟预测精度. 通过实例验证了所建模型的实用性和可靠性.

关键词

无偏 GM(1,1)模型;初始条件;预测

中图分类号 O159;C931

文献标志码 A

收稿日期 2009-05-20

资助项目 国家统计局全国统计科研计划重点项目(2008LZ022)

作者简介

熊萍萍,女,讲师,研究方向为灰色系统理论、宏观经济数理分析. xpp8125@163.com

1 南京信息工程大学 数理学院,南京,210044

0 引言

Introduction

灰色预测理论是灰色系统理论的主要内容之一,而 GM(1,1)模型又是灰色预测理论中最核心的模型,因此,该模型在灰色系统理论中占有十分重要的地位[1-3]. 自 Deng[1]、邓聚龙[2]提出该模型以来,该模型已经被广泛用于工农业生产、经济、能源、气象等各个领域,解决了诸多生产、生活以及科学研究中的预测问题. 针对 GM(1,1)建模方法存在偏差的问题,文献[4]给出了具有指数律重合性的 GM(1,1)模型,即无偏 GM(1,1)模型. 穆勇在文献[4]的基础上,提出了无偏 GM(1,1)的直接建模方法[5]. 吉培荣等[6]分别建立了无偏 GM(1,1)模型,提高了建模的精度,扩大了模型的使用范围. 但是以上学者都是以 $X^{(1)}$ 的第一个分量 $x^{(1)}(1)$ 作为灰微分方程的初始条件,这样就造成对新信息利用不够充分. 根据灰色系统理论的新信息优先原理,在建模时,赋予新信息较大的权重可以提高灰色建模的功效[3]. 文献[7]正是利用新信息优先原理,在原始 GM(1,1)模型的基础上,将初始条件由 $x^{(1)}(1)$ 改为以 $x^{(1)}(n)$,作为灰色微分模型的初始条件对原模型进行改进,从而使模型的模拟预测精度得到提高.

基于以上灰色系统理论的新信息优先原理,借鉴以上学者对模型的改进得到很好的理论价值和应用价值,本文将无偏 GM(1,1)模型的初始条件由 $x^{(1)}(1)$ 改为以 $x^{(1)}(n)$ 作为灰色微分模型的初始条件,这样可以大大提高原无偏 GM(1,1)模型的模拟预测精度. 通过计算发现,将 $x^{(1)}(n)$ 作为无偏 GM(1,1)模型的初始条件时,模拟预测精度显著提高,与实际值更加接近,这正体现了新信息优先原理. 本文还分别对 $x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)$ 赋予权重

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\quad \alpha_n = 1-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{n-1},\quad 0\leqslant \alpha_i\leqslant 1,$$

以 $x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)$ 的加权平均作为初始条件,即以

$$x^{(1)}(t)\Big|_{t=\theta} = \alpha_1 x^{(1)}(1)+\alpha_2 x^{(1)}(2)+\cdots+\alpha_n x^{(1)}(n)$$

为初始条件,并求出参数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 及 θ 所满足的表达式.

1 无偏 GM(1,1)模型

Unbiased GM(1,1) model

系统某特征量的观测值为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$

其一次累加生成序列为

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(1)}(i),k=1,2,\cdots,n.$

对 $X^{(1)}$ 建立一阶线性微分方程模型:

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b. \qquad (1)$$

引理[5] 若 $x^{(1)}(t)$ 满足一阶线性微分方程(1),以 $x(t)=x(t_0)$ 为初始条件的解为

$$x^{(1)}(t)=\left[x(t_0)-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}+\frac{b}{a},$$

则

1) 存在 $\lambda_1=\frac{1}{a}-\frac{1}{\mathrm{e}^a-1}$, 使得

$$[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)]+a[\lambda_1x^{(1)}(k-1)+(1-\lambda_1)x^{(1)}(k)]=b,$$

其中 $k=2,3,\cdots,n.$

2) 存在 $\lambda_2=\frac{a(1+\mathrm{e}^{-a})}{2(1-\mathrm{e}^{-a})}$, 使得

$$\lambda_2[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)]+\frac{a}{2}[x^{(1)}(k-1)+x^{(1)}(k)]=b,$$

其中 $k=2,3,\cdots,n.$

3) 存在 $\lambda_3=\frac{a}{\mathrm{e}^a-1}$, 使得

$$\lambda_3[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)]+ax^{(1)}(k)=b,$$

其中 $k=2,3,\cdots,n.$

由此,可以对具有灰指数律的数据列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

建立下面3种无偏GM(1,1)模型.

1) $[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)]+a[\lambda_1x^{(1)}(k-1)+(1-\lambda_1)x^{(1)}(k)]=b,$

其中:$\lambda_1=\frac{1}{a}-\frac{1}{\mathrm{e}^a-1}$;$k=2,3,\cdots,n.$

2) $\lambda_2[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)]+\frac{a}{2}[x^{(1)}(k-1)+x^{(1)}(k)]=b,$

其中:$\lambda_2=\frac{a(1+\mathrm{e}^{-a})}{2(1-\mathrm{e}^{-a})}$;$k=2,3,\cdots,n.$

3) $\lambda_3[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)]+ax^{(1)}(k)=b,$

其中:$\lambda_3=\frac{a}{\mathrm{e}^a-1}$;$k=2,3,\cdots,n.$

将 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 分别代入模型1)、2)、3),则3种模型均可化成下列形式

$$x^{(1)}(k)=\mathrm{e}^{-a}x^{(1)}(k-1)+\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-a}),$$

令

$$\beta_1=\mathrm{e}^{-a},\beta_2=\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-a}), \qquad (2)$$

以上3种无偏GM(1,1)模型的白化微分方程均为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b.$$

2 改进的无偏GM(1,1)模型

The improved unbiased GM(1,1) model

2.1 以 $x^{(1)}(t)\big|_{t=1}=x^{(1)}(1)$ 为初始条件

定理1 设 $X^{(0)}$ 为系统某特征量的观测序列,$X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的1-AGO序列(一次累加生成序列),若 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}}$ 为参数,且

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x^{(1)}(1)&1\\x^{(1)}(2)&1\\\vdots&\vdots\\x^{(1)}(n)&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x^{(1)}(2)\\x^{(1)}(3)\\\vdots\\x^{(1)}(n)\end{pmatrix}.$$

则无偏GM(1,1)微分方程

$$x^{(1)}(k)=\beta_1x^{(1)}(k-1)+\beta_2$$

的最小二乘估计参数列满足:

$$(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}, \qquad (3)$$

将式(3)代入式(2)得

$$\hat{a}=-\ln\hat{\beta}_1,\quad \hat{b}=\frac{\hat{\beta}_2}{1-\hat{\beta}}\hat{a}. \qquad (4)$$

证明参见文献[5].

定理2 设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{\beta},\hat{a},\hat{b}$ 为定理1所述条件,$(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C},\hat{a}=-\ln\hat{\beta}_1,\hat{b}=\frac{\hat{\beta}_2}{1-\hat{\beta}}\hat{a}$,则无偏GM(1,1)微分方程

$$x^{(1)}(k)=\beta_1x^{(1)}(k-1)+\beta_2$$

在初始条件 $\hat{x}(1)=x^{(1)}(1)$ 下,模型的离散响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(k-1)}+\frac{b}{a},k=2,3,\cdots,n;$$

还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1),k=2,3,\cdots,n.$$

2.2 以 $x^{(1)}(t)\big|_{t=n}=x^{(1)}(n)$ 为初始条件

定理3 设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{\beta},\hat{a},\hat{b}$ 为定理1所述条件,$(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C},\hat{a}=-\ln\hat{\beta}_1,\hat{b}=\frac{\hat{\beta}_2}{1-\hat{\beta}}\hat{a}$, 则

1) 白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 在初始条件 $x^{(1)}(t)\Big|_{t=n} = x^{(1)}(n)$ 下的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \left[x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right]e^{-a(t-n)} + \frac{b}{a}.$$

2) 无偏 GM(1,1) 微分方程

$$x^{(1)}(k) = \beta_1 x^{(1)}(k-1) + \beta_2$$

的离散响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left[x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right]e^{-a(k-n)} + \frac{b}{a}, k = 2,3,\cdots,n.$$

3) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = \left[x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right](1 - e^{a})e^{-a(k-n)}, k = 2,3,\cdots,n.$$

证明 1) 因为 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的通解为

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at}, \tag{5}$$

c 为任意常数. 将

$$x^{(1)}(t)\Big|_{t=n} = x^{(1)}(n)$$

代入式(5)得

$$c = \left[x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right]e^{an},$$

从而得白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \left[x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right]e^{-a(t-n)} + \frac{b}{a}.$$

2) 由 1) 的证明结果, 令 $t = k$ 得

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left[x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right]e^{-a(k-n)} + \frac{b}{a}, k = 2,3,\cdots,n.$$

3) 由累减还原显然可得[3].

2.3 以 $x^{(1)}(t)\Big|_{t=\theta} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(1)}(i)$ 为初始条件 ($\alpha_n = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1}$)

定理 4 设 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{\beta}, \hat{a}, \hat{b}$ 为定理 1 所述条件, $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^{T} = (\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{C}, \hat{a} = -\ln\hat{\beta}_1, \hat{b} = \frac{\hat{\beta}_2}{1-\hat{\beta}}\hat{a}$, 则

1) 白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 在初始条件

$$x^{(1)}(t)\Big|_{t=\theta} = \alpha_1 x^{(1)}(1) + \alpha_2 x^{(1)}(2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(n),$$

$$\alpha_n = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1}$$

下的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = [\alpha_1 x^{(1)}(1) + \alpha_2 x^{(1)}(2) + \cdots + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1})x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}]e^{-a(t-\theta)} + \frac{b}{a}.$$

2) 无偏 GM(1,1) 微分方程

$$x^{(1)}(k) = \beta_1 x^{(1)}(k-1) + \beta_2$$

的离散响应式为

$$x^{(1)}(k) = [\alpha_1 x^{(1)}(1) + \alpha_2 x^{(1)}(2) + \cdots + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1})x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}]e^{-a(k-\theta)} + \frac{b}{a}, k = 2,3,\cdots,n.$$

3) 还原值为

$$-\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = [\alpha_1 x^{(1)}(1) + \alpha_2 x^{(1)}(2) + \cdots + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1}) \cdot x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}](1 - e^{a})e^{-a(k-\theta)},$$
$$k = 2,3,\cdots,n.$$

证明 1) 因为 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的通解为

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at}, \tag{6}$$

c 为任意常数. 将

$$x^{(1)}(t)\Big|_{t=\theta} = \alpha_1 x^{(1)}(1) + \alpha_2 x^{(1)}(2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(n)$$

代入式(6)得

$$c = \left[\alpha_1 x^{(1)}(1) + \alpha_2 x^{(1)}(2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right]e^{a\theta},$$

从而得白化方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = [\alpha_1 x^{(1)}(1) + \alpha_2 x^{(1)}(2) + \cdots + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1})x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}]e^{-a(t-\theta)} + \frac{b}{a}.$$

2) 由 1) 的证明结果, 令 $t = k$ 得

$$x^{(1)}(k) = [\alpha_1 x^{(1)}(1) + \alpha_2 x^{(1)}(2) + \cdots + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1}) \cdot x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}]e^{-a(k-\theta)} + \frac{b}{a}, k = 2,3,\cdots,n.$$

3) 由累减还原显然可得[3].

2.4 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 及 θ 的求解

关于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 以及 θ 的求解可以采用类似

最小二乘原则的方法,建立一个无约束优化模型,求解 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 和 $x^{(0)}(k)$ 误差平方和最小,也就是求解最优化问题

$$\min_{\alpha}\sum_{k=2}^{n}[\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)]^2.$$

根据定理4中结论(3),令

$$S=\sum_{k=2}^{n}[\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)]^2=\sum_{k=2}^{n}\Big\{\Big[\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\frac{b}{a}\Big](1-e^a)e^{-a(k-\theta)}-x^{(0)}(k)\Big\}^2,$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial\alpha_1}=2\sum_{k=2}^{n}\Big\{\Big[\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\dfrac{b}{a}\Big](1-e^a)e^{-a(k-\theta)}-x^{(0)}(k)\Big\}\cdot(1-e^a)e^{-a(k-\beta)}[x^{(1)}(1)-x^{(1)}(n)]=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial\alpha_2}=2\sum_{k=2}^{n}\Big\{\Big[\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\dfrac{b}{a}\Big](1-e^a)e^{-a(k-\theta)}-x^{(0)}(k)\Big\}\cdot(1-e^a)e^{-a(k-\beta)}[x^{(1)}(2)-x^{(1)}(n)]=0,\\ \vdots\\ \dfrac{\partial S}{\partial\alpha_{n-1}}=2\sum_{k=2}^{n}\Big\{\Big[\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\dfrac{b}{a}\Big](1-e^a)e^{-a(k-\theta)}-x^{(0)}(k)\Big\}\cdot(1-e^a)e^{-a(k-\beta)}[x^{(1)}(n-1)-x^{(1)}(n)]=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial\theta}=2\sum_{k=2}^{n}\Big\{\Big[\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\dfrac{b}{a}\Big](1-e^a)e^{-a(k-\theta)}-x^{(0)}(k)\Big\}\cdot(1-e^a)ae^{-a(k-\theta)}\Big[\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\dfrac{b}{a}\Big]=0,\end{cases}$$

由于 $x^{(1)}(k)\neq x^{(1)}(n)$, $k=1,2,\cdots n-1$, 且易知

$$\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\frac{b}{a}\neq0,$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 θ 满足下列关系式:

$$\sum_{k=2}^{n}\Big\{\Big[\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\frac{b}{a}\Big](1-e^a)e^{-a(k-\theta)}-x^{(0)}(k)\Big\}=0,$$

即

$$\Big[\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})x^{(1)}(n)-\frac{b}{a}\Big](1-e^a)\sum_{k=2}^{n}e^{-a(k-\beta)}=\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k).$$

3 实例分析

Example analysis

例1 设有一真实系统 $X(t)=e^{0.5t}$,取一组原始数据列 $X^{(0)}$,它有随机偏差 $\varepsilon(k)$. 取 $\varepsilon(k)=(-1)^{k-1}\varepsilon,\varepsilon=0.01$,其中 $k=1,2,\cdots,n$. 取该系统生成的前7个数据组成的序列

$$X^{(0)}=(1.0100,1.6387,2.7283,4.4717,7.3991,12.1725,20.0955),$$

取前5个数据

$$X^{(0)\prime}=(1.0100,1.6387,2.7283,4.4717,7.3991)$$

建立模型,其一次累加生成序列为

$$X^{(1)}=(1.0100,2.6487,5.3770,9.8487,17.2478),$$

则由前5个数据建立的无偏GM(1,1)模型在以 $x^{(1)}(t)\Big|_{t=n}=x^{(1)}(n)$ 为初始条件下得到时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k)=18.74503e^{0.501101(k-5)}-1.49723,$$

还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k)=7.3882e^{0.501101(k-5)},$$

原无偏 *GM*(1,1)模型的平均相对误差为

$$\Delta=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{5}\Delta_k=0.83\%,$$

改进后的模型的平均相对误差为

$$\Delta=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{5}\Delta_k=0.28\%.$$

从表1可以看出,改进后的无偏GM(1,1)模型的模拟精度比原模型的模拟精度高,而改进后的模

型预测精度比原模型的预测精度有所提高. 如当原序列 $k=6$ 时，$x^{(0)}(6)=12.172\,5$，改进后的模型预测值为12.194 5，原模型预测值为12.105 2；$k=7$ 时，$x^{(0)}(7)=20.095\,5$，改进后的模型预测值为20.105 3，原模型预测值为19.980 0.

表1　两种模型的模拟预测值与实际值及其相对误差

Table 1　The forecasting values simulated by the unbiased model and improved unbiased model and their relative error to the actual value in example one

k	实际值	无偏 GM(1,1)模型		以 $x^{(1)}(t)\big\vert_{t=n}=x^{(1)}(n)$ 为初始条件的无偏 GM(1,1)模型	
		模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%
2	1.638 7	1.631 1	0.46	1.643 1	0.27
3	2.728 3	2.692 1	1.33	2.712 0	0.60
4	4.471 7	4.443 4	0.63	4.476 2	0.10
5	7.399 1	7.334 0	0.88	7.388 2	0.15
6	12.172 5	12.105 2	0.55	12.194 5	0.18
7	20.095 5	19.980 0	0.57	20.105 3	0.05

注：$k=2,3,\cdots,5$ 为模拟值；$k=6,7$ 为预测值.

例2　设有一真实系统 $X(t)=e^{0.5t}$，取一组原始数据列 $X^{(0)}$，它有随机偏差 $\varepsilon(k)$. 取 $\varepsilon(k)=(-1)^{k-1}\varepsilon$，$\varepsilon=0.01$，其中 $k=1,2,\cdots,n$. 取该系统生成的前7个数据组成的序列

$X^{(0)}=(1.010, 3.310\,1, 11.033\,2, 36.588\,2, 121.520\,4, 403.418\,8, 1\,339.440\,8)$[8].

取前5个数据

$X^{(0)'}=(1.010, 3.310\,1, 11.033\,2, 36.588\,2, 121.520\,4)$

建立模型，其一次累加生成序列为

$X^{(1)}=(1.010, 4.320\,1, 15.353\,3, 51.941\,5, 173.461\,9)$，

则由前5个数据建立的无偏 $GM(1,1)$ 模型在以 $x^{(1)}(t)\big|_{t=n}=x^{(1)}(n)$ 为初始条件下得到时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k)=173.852\,4e^{1.200\,159(k-5)}-0.390\,5,$$

还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k)=121.505\,4e^{1.200\,159(k-5)}. \tag{7}$$

原无偏 $GM(1,1)$ 模型的平均相对误差为

$$\Delta=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{5}\Delta_k=2.02\%,$$

改进后的模型的平均相对误差为

$$\Delta=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{5}\Delta_k=0.10\%.$$

从表2可以看出，改进后的无偏 GM(1,1) 模型的模拟精度比原模型的模拟精度高，而改进后的模型预测精度比原模型的预测精度有明显提高. 如当原序列 $k=6$ 时，$x^{(0)}(6)=403.418\,8$，改进后的模型预测值为 403.476 3，原模型预测值为 395.199 0. $k=7$ 时，$x^{(0)}(7)=1339.440\,8$，改进后的模型预测值为 1339.801 4，原模型预测值为 1 312.315 7.

表2　两种模型的模拟预测值与实际值及其相对误差

Table 2　The forecasting values simulated by the unbiased model and improved unbiased model and their relative error to the actual value in example two

k	实际值	无偏 GM(1,1)模型		以 $x^{(1)}(t)\big\vert_{t=n}=x^{(1)}(n)$ 为初始条件的无偏 GM(1,1)模型	
		模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%
2	3.310 1	3.250 3	1.81	3.318 4	0.25
3	11.033 2	10.793 2	2.18	11.020 5	0.12
4	36.588 2	35.840 2	2.04	36.585 3	0.01
5	121.520 4	119.012 7	2.06	121.505 4	0.01
6	403.418 8	395.199 0	2.04	403.476 3	0.01
7	1 339.440 8	1 312.315 7	2.03	1339.801 4	0.03

注：$k=2,3,\cdots,5$ 为模拟值；$k=6,7$ 为预测值.

4　结语

Conclusion

本文通过对无偏 GM(1,1)模型的初始条件进行改进，把 $X^{(1)}$ 的第 n 个分量 $x^{(1)}(n)$ 作为灰微分方程的初始条件，这样更加符合灰色系统理论的新信息优先原理，而且显著提高了对模型的模拟预测精度；同时将

$$x^{(1)}(t)\Big|_{t=\theta}=\alpha_1x^{(1)}(1)+\alpha_2x^{(1)}(2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(n)$$

作为无偏 GM(1,1) 模型的初始条件，求出原始序列的模拟值，并得出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 及 θ 之间的关系式.

参考文献

References

[1] Deng J L. Introduction to grey system theory[J]. The Journal of Grey System(UK), 1989(1): 1-24

[2] 邓聚龙. 灰色理论基础[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2002
DENG Julong. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhang University of Science & Technology, 2002

[3] 刘思峰，党耀国，方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 3版. 北京：科学出版社，2004
LIU Sifeng, DANG Yaoguo, FANG Zhigent. Grey system theory and its application[M]. 3en Ed. Beijing: Science Press, 2004

[4] 穆勇.具有白指数律重合性的 GM(1,1)模型[J].数学的实践与认识,2002(1):15-19
MU Yong. The GM(1,1) model with white index law and overlapping nature[J]. Mathematic in Practice and Theory,2002(1):15-19
[5] 穆勇.无偏灰色无偏 GM(1,1)模型的直接建模法[J].系统工程与电子技术,2003,25(9):1094-1096
MU Yong. A direct modeling method of the unbiased GM(1,1) [J]. Systems Engineering & Electronics,2003,25(9):1094-1096
[6] 吉培荣,黄巍松,胡翔勇.无偏灰色预测模型[J].系统工程与电子技术,2000,22(6):6-8
JI Peirong, HUANG Weisong, HU Xiangyong. An unbiased grey forecasting model[J]. Systems Engineering & Electronics,2000,22(6):6-8
[7] 党耀国,刘思峰,刘斌.以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM 模型[J].中国管理科学,2005,13(1):132-135
DANG Yaoguo, LIU Sifeng, LIU Bin. The GM models that $x^{(1)}(n)$ be taken as initial value[J]. Chinese Journal of Management Science,2005,13(1):132-135
[8] 王正新,党耀国,刘思峰.无偏 GM(1,1)模型的混沌特性分析[J].系统工程理论与实践,2007(11):153-158
WANG Zhengxin, DANG Yaoguo, LIU Sifeng. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law[J]. Systems Engineering-Theory & Practice,2007(11):153-158

Unbiased GM(1,1) models with $x^{(1)}(n)$ initial condition

XIONG Pingping[1] MEN Kepei[1] WU Xianghua[1]

1 School of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044

Abstract Based on the principle in which the new information should be used fully in the grey system theory GM(1,1), the efficacy can be significantly increased if we pay more attention to the new information or endow them more weights in the modeling process. Regarding the n-th vector($x^{(1)}(n)$) as the initial condition instead of the first vector($x^{(1)}(1)$), the unbiased GM(1,1) models are improved, which improve the forecasting precision. Finally, the practicability and reliability of the models are validated using examples.

Key words unbiased GM(1,1) model; initial condition; forecasting