文章编号:1674-7070(2009)03-0247-05

综合国力非线性扩散模型稳定性分析

廖晓昕[1]

摘要

研究了一般综合国力非线性扩散数学模型及其相应简化的综合国力非线性扩散数学模型的全局渐近稳定性与部分变元全局稳定,其余部分变元稳定的构造性判据.具体方法是仅根据模型的系数,构造出在 $\mathbf{R}_+^n$ 内正定径向无界的 Lyapunov 函数,再估算 Lyapunov 函数沿模型的导数符号判别模型的解在 $\mathbf{R}_+^n$ 内关于平衡位置的全局稳定性与部分全局稳定性,并说明了各种综合指标的相互影响、相互制约以及比例协调对动态平衡的作用.

关键词

综合国力;非线性扩散模型;稳定性;Lyapunov 函数

中图分类号 O175.12;TP273.4

文献标志码 A

0 引言

Introduction

上世纪 80 年代后,人们开始考虑用数学模型分析综合国力[1-5].例如文献[1]介绍了 1981 年美国乔治敦大学战略与国际研究中心的克莱因等提出了如下的综合国力模型:

$$x_i = (a_iA + b_iE + c_iM)\cdot(s_i + w_i),\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

其中:x_i 为第 i 个综合国力分指标值;a_i 为国家基本实体对第 i 个综合国力分指标的影响系数;b_i 为国家综合经济实力第 i 个综合国力分指标的影响系数;c_i 为国防军事实力第 i 个综合国力分指标的影响系数;s_i 为国家对第 i 个综合国力分指标的战略规划;w_i 为政府及民众对第 i 个综合国力分指标战略的实现愿望.

文献[1]也介绍了 1987 年,日本综合研究所在《日本综合国力》中给出如下模型:

$$P = (C + E + M)\cdot(G + D). \tag{2}$$

其中:C 为国家基本实体;E 为国家综合经济实力;M 为国家综合军事实力;G 为国家政体实力;D 为国家外交实力.

文献[1]还介绍了 1998 年,黄硕风在研究《美苏争霸战略问题》中提出了如下综合国力数学模型:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho y\left(1 - \frac{y}{M}\right). \tag{3}$$

其中:$y(t)$ 为时刻 t 的综合国力;ρ、M 均为正参数.

王树禾[3]给出综合国力数学模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x\left(\dfrac{M - x}{M}\right) - \beta y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\gamma y + \delta(m - x)x.\end{cases} \tag{4}$$

其中:$x(t)$ 为时刻 t 国家物质发展水平(资源、经济、军事、科技等)综合指标,是综合国力安全发展的重要标志;$y(t)$ 为时刻 t 国家精神文明发展水平(政治、战略、教育、环境等)综合指标;α、β、M、γ、δ、m 均为正数.

文献[1]进一步提出了更一般的综合国力扩散模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = (\beta_i + \gamma_i x_i)\cdot\left(K_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right),\\ x_i(0) = x_j^{(0)},\ i = 1,2,\cdots,n.\end{cases} \tag{5}$$

收稿日期 2009-05-30

作者简介

廖晓昕,男,教授,博士生导师,主要研究动力系统稳定性的理论与应用.

xiaoxin_liao@hotmail.com

1 华中科技大学 控制科学与工程系,武汉,430070

其中：K_i 为第 i 种国力指标的目标值，即一个周期内的规划目标上界；β_i 为第 i 种国力指标在发展变化过程中的扩散率；γ_i 为国家政策对 i 种国力指标的影响率；a_{ij}为对第 i 种国力指标的增长能促进第 i 种国力指标的发展，则 $a_{ij}>0$，反之则 $a_{ij}\leqslant 0$；$K_i-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ 为第 i 种国力指标的发展剩余空间.

显然，模型(4)是模型(5)的特例，专著[1]对于模型(5)在 $n=2$ 的情况下，即二维综合国力扩散模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(\beta_1+\gamma_1 x)\cdot(k_1-a_{11}x-a_{12}y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(\beta_2+\gamma_2 x)\cdot(k_2-a_{21}x-a_{22}y).\end{cases}\tag{6}$$

给出了如下的定理：

定理 A 若 $\gamma_1k_1+\gamma_2k_2-a_{11}\beta_1-a_{22}\beta_2<0$，则式(6)在第一象限内无闭轨(即无周期解).

定理 B 若 $a_{12}a_{21}(\beta_1+x_0\gamma_1)\cdot(\beta_2+y_0\gamma_2)>0$，则式(6)的平衡位置 $\left(\dfrac{a_{22}k_1-a_{12}k_2}{\Delta},\dfrac{a_{11}k_2-a_{21}k_1}{\Delta}\right)$ 是鞍点.

但对于更一般的式(5)的平衡位置的稳定性未做任何讨论.

文献[1]也提出了简化的三维的综合国力非线性扩散模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(1-a_1x-b_1y-c_1z),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(1-a_2x-b_2y-c_2z),\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=z(1-a_3x-b_3y-c_3z).\end{cases}\tag{7}$$

且给出了平衡位置局部稳定的充分条件，但由于所构 Lyapunov 函数的限制，它的导数出现二次型与三次型之和，虽然在平衡位置的充分小的邻域，导数的二次型的负定性仍能保证整个导数的在充分小的邻域内负定，从而能保证局部渐近稳定，但吸引域多大也未能给出具体的估计式，从而应用较难.

本文提出更一般的简化的 n 维综合国力非线性扩散模型

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_i\Big(1-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big),\tag{8}$$

它包含(7)为特例.

本文的目的是：1)对于一般的综合国力系统(5)给出它的平衡位置全体变化在第一象限 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局渐近稳定的判据；同时给出了部分变元在 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局稳定部分变元稳定的充分条件；2)对于简化的 n 维非线性扩散模型(8)也给出了在第一象限 $\mathbf{R}_+^n$ 内全体变元全局渐近稳定的充分条件和部分变元全局渐近稳定，部分变元稳定的充分条件. 从而丰富和发展了专著[1]所提的综合国力非线性扩散模型的研究成果.

1 简化的综合国力扩散模型平衡位置稳定性分析

Stability analysis of equilibrium position of the simplified nonlinear diffusion model describing comprehensive national power

考虑简化的 n 维综合国力非线性扩散模型(8)，这个模型其实与熟知的生物数学中的 Lotka-Volterra 模型一致，即可完全引用生物数学中熟知的 Lyapunov 函数来研究式(8)在 $\mathbf{R}_+^n$ 内的平衡位置的稳定. 本文增加对部分变元的全局渐近稳定性的研究.

设

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\neq 0,$$

$$\Delta_i=\det\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1i-1}, & 1, & a_{1i+1}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{ni-1}, & 1, & a_{ni+1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\neq 0.$$

设$\dfrac{\Delta_i}{\Delta}>0$，故 $x_i=x_i^*>0,\quad i=1,\cdots,n$ 为式(8)在 $\mathbf{R}_+^n=\left\{\boldsymbol{x}\ \middle|\ x_i>0\quad i=1,\cdots,n\right\}$ 的唯一的平衡位置.

定理 1 若存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(c_i,\cdots,c_n)$ 使得 $\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}>0$ 正定，则式(8)的唯一平衡位置在 $\mathbf{R}_+^n$ 内是全局渐近稳定的.

若存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(c_i,\cdots,c_n)$ 和 $0<\varepsilon\ll 1$，及 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\overbrace{\varepsilon\cdots\varepsilon}^{m},0\cdots 0)$ 使得 $\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\geqslant 0$ 半正定，则式(8)的唯一平衡位置在 $\mathbf{R}_+^n$ 内关于部分变元 $x_1,\cdots,x_m$ 是全局渐近稳定的，关于部分变元 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 是稳定的.

证明 作 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}c_i\Big(x_i-x_i^*-x_i^*\ln\frac{x_i}{x_i^*}\Big),$$

显然 $V(\boldsymbol{x}^*)=0$，且 $V(\boldsymbol{x})\to\infty$，当 $x_i\to 0^+$ 或 $x_i\to+\infty$，故 $V(\boldsymbol{x})$ 是径向无界的.

又因为

$$\left.\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^*}=c_i\left(1-\frac{x_i^*}{x_i^*}\right)=0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}\right|_{x_i=x_i^*}=c_i\frac{x_i^*}{(x_i^*)^2}>0,$$

故 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 是 $V(\boldsymbol{x})$ 的极小值点. 从而 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 是关于平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 是正定和径向无界的.

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(8)}=\sum_{i=1}^{n}\left(c_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}-c_i\frac{x_i^*}{x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{x_i}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\left(-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j-x_j^*)\right)-$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^*\left(-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j-x_j^*)\right)=$$

$$\begin{pmatrix}x_1-x_1^*\\x_2-x_2^*\\\vdots\\x_n-x_n^*\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\begin{pmatrix}x_1-x_1^*\\x_2-x_2^*\\\vdots\\x_n-x_n^*\end{pmatrix}<0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_i^*|\neq 0.$$

故定理 1 的第一个条件满足时,式(8)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 关于全体变元在 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局渐近稳定. 当第二个条件满足时有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(8)}=$$

$$\begin{pmatrix}x_1-x_1^*\\x_2-x_2^*\\\vdots\\x_n-x_n^*\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\begin{pmatrix}x_1-x_1^*\\x_2-x_2^*\\\vdots\\x_n-x_n^*\end{pmatrix}-$$

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{m}(x_i-x_i^*)^2\leqslant-\varepsilon\sum_{j=1}^{m}(x_i-x_i^*)^2<0,$$

当 $\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_i^*|\neq 0$.

由关于部分变元稳定的定理[2]可知,式(8)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 关于 $x_1,\cdots,x_m$ 全局渐近稳定,关于 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 稳定.

例 1 考虑三维的综合国力扩散模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1(1-a_{11}x_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3),\\\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2(1-a_{21}x_1-a_{22}x_2-a_{23}x_3),\\\dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_3(1-a_{31}x_1-a_{32}x_2-a_{33}x_3).\end{cases}\tag{9}$$

设

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&1&a_{13}\\a_{21}&1&a_{23}\\a_{31}&1&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&1\\a_{21}&a_{22}&1\\a_{31}&a_{32}&1\end{vmatrix},$$

且设:$\dfrac{\Delta_1}{\Delta}>0,\dfrac{\Delta_2}{\Delta}>0,\dfrac{\Delta_3}{\Delta}>0,x_1^*=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},x_2^*=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},x_3^*=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ 为式(9)的唯一平衡位置,若存在 $c_i>0,i=1,2,3$,使得

$$\begin{pmatrix}2c_1a_{11}&c_1a_{12}+c_2a_{21}&c_1a_{13}+c_3a_{31}\\c_1a_{12}+c_2a_{21}&2c_2a_{22}&c_2a_{23}+c_3a_{32}\\c_1a_{13}+c_3a_{31}&c_2a_{23}+c_3a_{32}&2c_3a_{33}\end{pmatrix}$$

正定,则 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ 在 $\mathbf{R}_+^3$ 内全局渐近稳定.

若∃ $0<\varepsilon\ll 1$,使得

$$\begin{pmatrix}2c_1a_{11}-\varepsilon&c_1a_{12}+c_2a_{21}&c_1a_{13}+c_3a_{31}\\c_1a_{12}+c_2a_{21}&2c_2a_{22}-\varepsilon&c_2a_{23}+c_3a_{32}\\c_1a_{13}+c_3a_{31}&c_2a_{23}+c_3a_{32}&2c_3a_{33}\end{pmatrix}$$

半正定,则平衡位置 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ 关于 x_1,x_2 全局渐近稳定,关于 x_3 稳定.

注:由于有了 Matlab 线性矩阵不等式工具箱,求解矩阵不等式

$$\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}>0,\quad \boldsymbol{CA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\geqslant 0$$

易于反掌. 但 $\boldsymbol{A},\varepsilon$ 必须是数字而不是文字. 为了就一般文字定理 1 的条件也易于验证,本文给出以下推论:

推论 1 设 $a_{ii}>0$,若矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&-|a_{12}|&\cdots&-|a_{1n}|\\-|a_{21}|&a_{22}&\cdots&-|a_{2n}|\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-|a_{n1}|&-|a_{n2}|&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

是一个 $\boldsymbol{M}$ 矩阵,则定理 1 的条件必成立,从而定理 1 的结论为真. 这是因为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵能判定的稳定条件蕴涵在对角稳定能判的条件之中[7].

2 一般综合国力扩散模型平衡位置稳定性分析

Stability analysis of equilibrium position of the general nonlinear diffusion model describing comprehensive national power

仍考虑系统(5),令

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_i = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1}, & k_1, & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1}, & k_n, & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

且设 $x_i^* = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} > 0, i = 1,2,\cdots,n$, 于是, $\beta_i > 0, \gamma_i > 0, k_i > 0$, 故式(5)的平衡位置 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ 是唯一的. 根据具体问题的实际意义, 只须考虑在 $\mathbf{R}_+^n \{\boldsymbol{x} \mid x_i \geqslant 0\}$ 内的 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ 的稳定性, 作拓扑变换 $x_i = \mathrm{e}^{\gamma_i y_i} - \dfrac{\beta_i}{\gamma_i}$ 可将 $\boldsymbol{x}$ 的 $\mathbf{R}_+^n$ 半空间变为 $\boldsymbol{y}$ 的全空间 $\mathbf{R}^n$, 将式(5)变为

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = k_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathrm{e}^{\gamma_j y_j} - \frac{\beta_j}{\gamma_j}. \qquad (10)$$

因为 x_i^* 为式(5)的平衡位置, 则 $\mathrm{e}^{\gamma_i{}^* y_i^*} - \dfrac{\beta_i}{\gamma_i} = x_i^*$ 为式(10)的平衡位置, 改写式(10)为

$$\frac{\mathrm{d}(y_i - y_i^*)}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathrm{e}^{\tau_j y_j} - \mathrm{e}^{\tau_j y_j^*}). \qquad (11)$$

定理 2 若Ⅰ)存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(c_i, \cdots, c_n)$, 使得 $\boldsymbol{CA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} > 0$ 正定, 则式(11)的平衡位置 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^*$ 全局渐近稳定, 即式(5)的平衡位置 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局渐近稳定.

若Ⅱ)存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(c_i, \cdots, c_n)$ 和半正定对角矩阵 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\overbrace{0, \cdots, 0}^{m}, \overbrace{\varepsilon, \cdots, \varepsilon}^{n-m})$, $0 < \varepsilon \ll 1$, 使得 $\boldsymbol{CA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D} \geqslant 0$, 则式(11)的平衡位置 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^*$ 关于 $y_1, \cdots, y_m$ 稳定, 关于 $y_{m+1}, \cdots, y_n$ 全局渐近稳定, 亦即式(5)的平衡位置关于关于 $x_1, \cdots, x_m$ 稳定, 关于 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局渐近稳定.

证明 对式(11)作正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$V = 2\sum_{i=1}^n c_i \int_{y_i^*}^{y_i} (\mathrm{e}^{y_i \tau_i} - \mathrm{e}^{y_i^* \tau_i})\mathrm{d}y_i,$$

若条件Ⅰ)满足, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(11)} = \begin{pmatrix} e^{\tau_1 y_1} - e^{\tau_1 y_1^*} \\ e^{\tau_2 y_2} - e^{\tau_2 y_2^*} \\ \vdots \\ e^{\tau_n y_n} - e^{\tau_n y_n^*} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} (-\boldsymbol{CA} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}) \begin{pmatrix} e^{\tau_1 y_1} - e^{\tau_1 y_1^*} \\ e^{\tau_2 y_2} - e^{\tau_2 y_2^*} \\ \vdots \\ e^{\tau_n y_n} - e^{\tau_n y_n^*} \end{pmatrix} < 0,$$

当 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}^*$.

若条件Ⅱ)成立, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(11)} = \begin{pmatrix} e^{\tau_1 y_1} - e^{\tau_1 y_1^*} \\ e^{\tau_2 y_2} - e^{\tau_2 y_2^*} \\ \vdots \\ e^{\tau_n y_n} - e^{\tau_n y_n^*} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} (-\boldsymbol{CA} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) \begin{pmatrix} e^{\tau_1 y_1} - e^{\tau_1 y_1^*} \\ e^{\tau_2 y_2} - e^{\tau_2 y_2^*} \\ \vdots \\ e^{\tau_n y_n} - e^{\tau_n y_n^*} \end{pmatrix} - \sum_{i=m+1}^n \varepsilon(\mathrm{e}^{\tau_i y_i} - \mathrm{e}^{\tau_i y_i^*})^2 \leqslant -\sum_{i=m+1}^n \varepsilon(e^{\tau_i y_i} - e^{\tau_i y_i^*})^2 < 0,$$

当 $\sum\limits_{i=m+1}^n (e^{\tau_i y_i} - e^{\tau_i y_i^*})^2 \neq 0$.

故结论成立.

例 2 考虑一个二维综合国力扩散模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = (\beta_1 + \gamma_1 x)(k_1 - a_{11}x - a_{12}y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = (\beta_2 + \gamma_2 y)(k_2 - a_{21}x - a_{22}y). \end{cases} \qquad (12)$$

其中: $x(t)$ 表明时刻 t 国家物质发展水平的综合指标; $y(t)$ 表明时刻 t 国家精神文明发展水平综合指标.

由于一个国家的物质发展与精神文明发展是相互促进的, 相互影响且国家政府也是积极向上推进的, 故模型中相关系数均为正.

设

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} > 0, \quad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} > 0,$$

容易证明, 存在 $c_1 > 0, c_2 > 0$ 使得

$$\begin{pmatrix} 2c_1 a_{11} & c_1 a_{12} + c_{12} a_{21} \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{21} & 2c_2 a_{22} \end{pmatrix} > 0$$

的充要条件是 $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$. 故当 $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$, 根据定理 2, $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ 在 $\mathbf{R}_+^2$ 内是全局渐近稳定的.

若存在 $0 < \varepsilon \ll 1$, 使得 $c_{11}a_{11} - \varepsilon > 0$,

$$\begin{pmatrix} c_{11}a_{11} - \varepsilon & c_1 a_{12} + c_2 a_{21} \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{21} & c_2 a_{22} \end{pmatrix} \geqslant 0;$$

或 $c_2 a_{22} - \varepsilon > 0$,

$$\begin{pmatrix} c_{11}a_{11} & c_1 a_{12} + c_2 a_{21} \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{21} & c_2 a_{22} - \varepsilon \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

则式(12)的 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ 分别关于 $x_2(x_1)$ 在 $\mathbf{R}_+^2$ 内是全局渐近稳定, 关于 $x_2(x_1)$ 稳定.

推论 2 若式(5)的系数 a_{ij} 满足推论 1 的条件, 则定理 2 的结论必成立. 道理如推论 1 所述, 此略.

参考文献
References

[1] 杨万利,王铁宁.非线性动力学理论方法及应用[M].北京:国防工业出版社,2006
YANG Wanli,WANG Tiening. Theory and application of nonlinear dynamics[M]. Beijing:National Defence Industry Press,2006

[2] 黄硕风.综合国力与国情研究[J].中国国情国力,1992(1):13-19
HUANG Shuofeng. Study of comprehensive national power and situation [J]. China National Conditions and Strength,1992(1):13-19

[3] 王树禾.综合国力的数学建模[J].高校应用数学学报:A,1997(1):29-36
WANG Shuhe. Mathematical modeling for the synthetical national power [J]. Applied Mathematics Journal of Chinese Universities:A,1997(1):29-36

[4] 张曼清.应用常微分方程建立数学模型分析综合国力[J].长春工程学院学报:自然科学版,2007,8(1):86-88
ZHANG Manqing. Analysis of the comprehensive national power by applying math model based on regular differential equation [J]. Journal of Changchun Institute of Technology:Natural Sciences Edition,2007,8(1):86-88

[5] 余芳东.国外综合国力研究方法的评价[J].统计研究,1993(6):37-41
YU Fangdong. The evaluation of foreign research methods for comprehensive national power [J]. Statistical Research,1993(6):37-41

[6] 廖晓昕.动力系统的稳定性理论和应用[M].北京:国防工业出版社,2000
LIAO Xiaoxin. Theory and application of stability for dynamical system [M]. Beijing:National Defence Industry Press,2000

[7] 廖晓昕.稳定性的数学理论和应用[M].武汉:华中师范大学出版社,2001
LIAO Xiaoxin. Mathematical theory and application of stability [M]. Wuhan:Central China Normal University Press,2001

Stability analysis of nonlinear diffusion model describing comprehensive national power

LIAO Xiaoxin[1]

1 Department of Control Science and Engineering,Central China University of Science and Technology,Wuhan 430070

Abstract In this paper,the general nonlinear diffusion model of comprehensive national power and its corresponding simplified model are studied. And the latter model's constructive criteria for the asymptotic global stability of all arguments,the asymptotic global stability of some partial arguments as well as the stability of others are also researched. Concretely speaking,the Lyapunov Function with positive definite unbounded radial flow in $\mathbf{R}^n_+$ is constructed based on the coefficients of the model. Then the asymptotic global stability of all arguments and that of some partial arguments of the solutions,obtained from Lyapunov Function along the model of derivative sign criteria,in the model's equilibrium position within $\mathbf{R}^n_+$ are evaluated. The results show the effect of the interaction,mutual restriction and harmonious proportion among all comprehensive indexes on dynamic equilibrium.

Key words comprehensive national power;nonlinear diffusion model;stability;Lyapunov Function