文章编号:1674-7070(2009)01-0050-09

一类神经网络的 Lagrange 全局指数稳定性

陈艳艳[1]　罗琦[1]

摘要

考虑 3 种不同的有界激励函数,利用 Lyapunov 函数法和不等式分析技巧,研究了一类具有变时滞的中立型 Cohen-Grossberg 神经网络的 Lagrange 全局指数稳定性,并给出了系统模型具有全局指数吸引集的构造性证明;研究结果既适用于分析单稳态系统也适用于多稳态系统;最后通过数值算例及仿真对结果进行了验证.

关键词

Cohen-Grossberg 神经网络;全局指数稳定;滞后型;中立型

中图分类号 TP183
文献标志码 A

收稿日期 2009-04-10
资助项目 国家自然科学基金(60874110)

作者简介

陈艳艳(通信作者),女,硕士生,主要研究神经网络的稳定性. cyywlj1984@163. com

罗琦,男,博士,教授,主要研究动力系统的稳定性. hgy2-503@163. com

1　南京信息工程大学 信息与控制学院,南京,210044

0　引言
Introduction

Cohen-Grossberg 神经网络模型是由 Cohen 和 Grossberg 在 1983 年提出的[1]. 由于许多著名应用模型,诸如 Lotka-Volterra 生态系统模型,Gilpia-Analg 竞争生态系统模型,Hopfield 神经网络模型,递归神经网络模型等均可作为 Cohen- Grossberg 神经网络模型的特例,所以在产生之初就引起了众多学者的广泛关注. 至今,关于该模型已获得大量的理论研究和实际应用成果,特别是系统的稳定性研究取得系列成果,文献[2]研究了具有变时滞和分布时滞的 Cohen-Grossberg 神经网络模型的全局稳定性;文献[3]研究了具有分布参数的 Cohen-Grossberg 神经网络模型的镇定问题;文献[4]研究了具有时滞的离散型 Cohen- Grossberg 双向联想记忆神经网络模型的稳定性等[5-8]. Cohen- Grossberg 神经网络主要的应用领域包括信号处理、并行计算、模式识别、参数优化、联想记忆、图像处理以及非线性方程的求解等.

通过查阅大量文献[9-16],笔者发现关于 Cohen-Grossberg 神经网络模型稳定性研究的成果大多是讨论其 Lyapunov 稳定性,特别是全局渐近稳定性(其中,影响最大也最具代表性的成果是文献[16]),即假设 Cohen- Grossberg 神经网络模型是单稳态系统,或者说把假设其平衡点是存在且唯一的作为讨论稳定性的前提条件. 然而,一般情况下,该系统的平衡态并不唯一[17-18],其中某些平衡态还可能是不稳定的. 那么,如何研究系统具有多稳态情形的稳定性呢? 到目前为止,研究系统的 Lagrange 稳定性仍是最有效的方法. 最早涉及 Lagrange 稳定性的文献有[19-21],1994 年,文献[17-18,22]系统研究了细胞神经网络数学理论,其中重点研究了细胞神经网络的 Lagrange 稳定性(耗散性),随后文献[23]又进一步研究了时滞神经网络的 Lagrange 稳定性.

Lagrange 稳定性较 Lyapunov 稳定性的不同之处在于,Larange 稳定性实际上是指整个系统所有解的有界性,而不是某个平衡点的稳定性. 所以在研究系统的 Larange 稳定性时,不需要考虑平衡点的数量及位置,特别是 Lagrange 渐进稳定性,只要系统的解最终进入某一个紧集(有界闭集),就称该系统具有 Lagrange 渐进稳定性. 并且这一稳定性概念同时也适用于单稳态系统,且具有较小的保守性.

由于研究 Lagrange 稳定性的技巧性较强,计算量较大,至今,类似的文献仍不多见.本文吸收文献[19-21]的思想与方法,研究了一类具有变时滞的中立型 Cohen-Grossberg 神经网络的 Lagrange 全局指数稳定性.模型较[21]更具一般性,笔者针对该模型定义了3类不同的激活函数,利用 Lyapunov 函数方法及不等式分析技巧,证明并给出了该系统模型具有 Lagrange 全局指数稳定性的多个全局指数吸引集的具体构造.作为推论,本文给出了一般滞后型 Cohen-Grossberg 神经网络模型 Lagrange 全局指数稳定的吸引集,也得到了一些实用结果.

1 系统描述与预备知识

System description and preliminaries

考虑具变时滞的中立型 Cohen-Grossberg 神经网络模型

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \alpha_i(x_i(t))\Big[-d_i x_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j(t))) + \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} g_j(\dot{x}_j(t-\tau_j(t))) + I_i(t)\Big], \\ x_i(t) = \psi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ \dot{x}_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中:$i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2$;$x_i$ 表示第 i 个神经元的状态变量;d_i 表示大于0的常数;a_{ij},b_{ij}和 c_{ij}分别表示神经元之间的联接权、时滞联接权和中立项联接权,其相应的矩阵分别表示为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$,并且定义 $\boldsymbol{A}$ 的关联矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$为

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i=j \ \& \ a_{ii}<0, \\ 0, & i=j \ \& \ a_{ii}\geqslant 0, \\ a_{ij}, & i\neq j. \end{cases}$$

引进 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 是为了充分利用激活函数的性质减少定理证明条件的保守性.时滞 $\tau_j(t)$ 满足$0\leqslant\tau_j(t)\leqslant\tau$,$\tau$ 为常数.f_j,g_j 表示激励函数,α_i 表示有界函数,满足 $0<\alpha_i^-\leqslant\alpha_i(\cdot)\leqslant\alpha_i^+$,其中 α_i^-,α_i^+ 为常数.令函数 $R_i(\cdot)/\alpha_i(\cdot)$满足 $\dot{R}_i(\cdot)\geqslant 0$.$I_i(t)$为偏差输入满足 $|I_i(t)|\leqslant I_i$,I_i 为常数.当 $c_{ij}=0,i,j=1,\cdots,n$,模型(1)将变为变时滞 Cohen-Grossberg 神经网络模型

$$\dot{x}_i(t) = \alpha_i(x_i(t))\Big[-d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j(t))) + I_i(t)\Big]. \tag{2}$$

神经网络模型区别于其它模型的特点是其非线性函数为有界的激励函数,为使讨论尽可能全面,下面考虑神经网络模型(1)常见的3类激励函数,分别为

1)一般有界连续函数类

$$B:=\left\{f_i(\cdot)\left|\begin{array}{l} f_i(\cdot)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),\exists k_i>0, s.t. \\ |f_i(\cdot)|\leqslant k_i,\forall x_i\in\mathbf{R}, i=1,\cdots,n \end{array}\right.\right\},$$

其中 k_i 为常数.这类激活函数不要求在区间上的单调性和在原点的函数值为0.

2)Sigmoid 函数Ⅰ类

$$F_1:=\left\{f_i(\cdot)\left|\begin{array}{l} f_i(0)=0, f_i(x_i)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ \mathrm{D}^+ f_i(x_i)\geqslant 0,\ |f_i(x_i)|\leqslant k_i \\ \forall x_i\in\mathbf{R} \end{array}\right.\right\},$$

其中 $\mathrm{D}^+ f_i(x_i)$表示$f_i(x_i)$的右上 Dini 导数.紧集 F_1 表示的是在区间上连续、非减且原点函数值为0的一类函数.

3)Sigmoid 函数Ⅱ类

$$F_2:=\left\{f_i(\cdot)\left|\begin{array}{l} f_i(0)=0, f_i(x_i)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ 0\leqslant \mathrm{D}^+ f_i(x_i)\leqslant L_i,\ |f_i(x_i)|\leqslant k_i \\ \forall x_i\in\mathbf{R} \end{array}\right.\right\},$$

其中 L_i 为常数.显然,$F_2\subseteq F_1\subseteq B$.

假设 $\boldsymbol{g}(\cdot)$为 B 类函数,$\boldsymbol{f}(\cdot)$函数可以为 B 类、F_1 类或 F_2 类.令 $C_{[-\tau,0]}$为连续函数 $\psi:[-\tau,0]\to\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\varphi}:[-\tau,0]\to\mathbf{R}^n$ 的 Banach 空间,且 $\|\boldsymbol{\psi}\|=\sup\limits_{s\in[-\tau,0]}|\boldsymbol{\psi}(s)|$,$\|\boldsymbol{\varphi}\|=\sup\limits_{s\in[-\tau,0]}|\boldsymbol{\varphi}(s)|$.

定义空间 $C_{[-\tau,0]}$的两个子集

$$C_{[-\tau,0]}^{H}=\{\boldsymbol{\psi}\in C_{[-\tau,0]},\|\boldsymbol{\psi}\|\leqslant H\},$$

$$C_{[-\tau,0]}^{E}=\{\boldsymbol{\varphi}\in C_{[-\tau,0]},\|\boldsymbol{\varphi}\|\leqslant E\},$$

其中,E,H 为常数且满足 $E>0$,$H>0$.令 Γ 为所有非负连续函数 $K:C_{[-\tau,0]}\to[0,+\infty]$的紧集.若考虑初始条件,系统(1)在 $t\geqslant t_0$ 时刻的解可以表示为 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi})$;否则表示为 $\boldsymbol{x}(t)$.

令 Ω 为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 上的紧集(即有界闭集),则其补集可以表示为 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$.定义任意空间变量 $\boldsymbol{x}$ 与 Ω 的距离为

$$\forall \boldsymbol{x}\in \mathbf{R},\rho(\boldsymbol{x},\Omega):=\inf_{y\in\Omega}\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|.$$

当$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega,t\geqslant t_0$ 时,满足

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(\boldsymbol{x}(t),\Omega)=0,$$

则称紧集 Ω 为系统(1)的全局指数吸引集.

如果系统(1)存在全局指数吸引集,则显然它是最终有界的.

为了更好地阐述本文的结论现给出如下的定义和引理.

定义 1 若对于任何大于 0 的常数 H 和 E,存在常数 $\bar{K}$ 满足 $\bar{K}=K(H,E)>0$,使得当

$$\boldsymbol{\psi}\in C^H_{[-\tau,0]},\ \boldsymbol{\varphi}\in C^E_{[-\tau,0]},\ t\geqslant t_0$$

时,

$$\left|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\varphi})\right|<\bar{K}$$

成立,则称系统(1)是 Lagrange 意义下一致稳定.

定义 2 若存在常数 $\mu>0$,函数 $K\in\Gamma$,使得当 $t\geqslant t_0$ 时,系统(1)的所有解 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega$,满足

$$\rho(\boldsymbol{x}(t),\Omega)\leqslant K(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi})e^{-\mu(t-t_0)},$$

则称紧集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为系统(1)的全局指数吸引集.

因为定义 2 应用不便,所以可以给出另一个定义:

定义 3 若存在常数 $l>0,\mu>0$ 以及正定径向无界的 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$,使得当 $t\geqslant t_0$ 时,系统(1)的所有解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t))$,满足

$$V(\boldsymbol{x}(t))>l$$

且

$$V(\boldsymbol{x}(t))-l\leqslant K(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi})e^{-\mu(t-t_0)},$$

则称系统(1)是关于 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 全局指数吸引,紧集

$$\Omega:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid V(t)\leqslant l\}$$

为系统(1)的全局指数吸引集.

定义 4 若存在常数 $l_i>0,\mu_i>0$,以及正定径向无界的 Lyapunov 函数 $V_i(\boldsymbol{x})$,使得当 $t\geqslant t_0$ 时,系统(1)的所有解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t))$,满足

$$V_i(x_i(t))>l_i$$

且

$$V_i(x_i(t))-l_i\leqslant K_i(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi})e^{-\mu_i(t-t_0)},$$

则称系统(1)是关于 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 全局指数吸引,紧集

$$\Omega:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid V_i(x_i)\leqslant l_i\mid\right\}$$

为系统(1)的全局指数吸引集.

下面给出一个在主要定理证明过程中经常使用的引理.

引理[20] 令 $V(x)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$是一个正定径向无界的函数,如果存在常数 $\mu>0,\beta>0$,使得

$$\mathrm{D}^+V(x)\leqslant-\mu V(x)+\beta,$$

则当 $t\geqslant t_0,V(x(t))>\dfrac{\beta}{\mu}$时,

$$V(x(t))-\frac{\beta}{\mu}\leqslant\left(V(x(t_0))-\frac{\beta}{\mu}\right)e^{-\mu(t-t_0)}$$

成立.

2 主要定理及证明

Main theorems and their demonstration

2.1 $\boldsymbol{f}(\cdot)$与$\boldsymbol{g}(\cdot)$同属于B 类函数

假设函数 $\boldsymbol{f}(\cdot),\boldsymbol{g}(\cdot)$ 都是有界的,且 $\left|f_i(\cdot)\right|\leqslant k_i,\left|g_i(\cdot)\right|\leqslant l_i,k_i,l_i$ 为大于 0 的常数.

为简化证明过程,可定义如下的常数

$$N_i^{(1)}:=\frac{\alpha_i^+}{2}\left\{\sum_{j=1}^n\Big((|a_{ij}|+|b_{ij}|)k_j+|c_{ij}|l_j\Big)+|I_i|\right\}.$$

定理 1 若 $\boldsymbol{f}(\cdot),\boldsymbol{g}(\cdot)\in B$,则系统(1)是 Lagrange 全局指数稳定的,且紧集

$$\Omega_1:=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{2}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n(N_i^{(1)})^2/\varepsilon_i}{2\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^-d_i-\varepsilon_i)},0<\varepsilon_i<\alpha_i^-d_i\right\},$$

$$\Omega_2:=Q_1\times Q_2\cdots\times Q_n,$$

$$Q_i:=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,|x_i|\leqslant\frac{2N_i^{(1)}}{\alpha_i^-d_i},i=1,2\cdots,n\right\},$$

$$\Omega_3:=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\sum_{i=1}^n|x_i|\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n2N_i^{(1)}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^-d_i)}\right\},$$

都是系统(1)的全局指数吸引集,从而交集

$$\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3$$

为系统(1)更加理想的全局指数吸引集.

证明 首先证明紧集 Ω_1 为系统(1)的全局指数吸引集,为此,构造如下正定径向无界的 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^nx_i^2.\tag{3}$$

令常数 ε_i 满足 $0<\varepsilon_i<\alpha_i^-d_i(i=1,2\cdots,n)$,沿着系

统(1)的正半轨线对 Lyapunov 函数(3)求导

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} = \sum_{i=1}^{n} x_i\dot{x}_i \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i(t))\left[\sum_{j=1}^{n}\left(|a_{ij}|k_j + |b_{ij}|k_j + |c_{ij}|l_j\right)|x_i(t)| - d_ix_i^2(t) + |I_i(t)||x_i(t)|\right] \leqslant$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^- d_ix_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^+\left[\sum_{j=1}^{n}\left(|a_{ij}|k_j + |b_{ij}|k_j + |c_{ij}|l_j + |I_i(t)|\right)\right]|x_i(t)| \leqslant$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^- d_ix_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n}2N_i^{(1)}|x_i(t)| \leqslant$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^- d_ix_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_ix_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(1)})^2}{\varepsilon_i} \leqslant$$

$$-2\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i - \varepsilon_i)V(\boldsymbol{x}(t)) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(1)})^2}{\varepsilon_i} := -\mu V(\boldsymbol{x}(t)) + \beta.$$

其中,$\mu = 2\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i - \varepsilon_i)$,$\beta = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(1)})^2}{\varepsilon_i}$,当 $V(\boldsymbol{x}(t)) > \frac{\beta}{\mu}$,$V(\|\boldsymbol{\varphi}\|,\|\boldsymbol{\psi}\|) \geqslant V(\boldsymbol{x}(t_0)) > \frac{\beta}{\mu}$,$t \geqslant t_0$,据引理,可以得到

$$V_i(x_i(t)) - \frac{\beta}{\mu} \leqslant \left(V_i(x_i(t_0)) - \frac{\beta}{\mu}\right)e^{-\mu(t-t_0)} \leqslant \left(V_i(\|\varphi_i\|,\|\psi_i\|) - \frac{\beta}{\mu}\right)e^{-\mu(t-t_0)}. \qquad (4)$$

因此,紧集 Ω_1 为系统(1)的全局指数吸引集.

再证紧集 Ω_2 为系统(1)的全局指数吸引集,构造另一个正定径向无界的 Lyapunov 函数

$$V_i(\boldsymbol{x}) = |x_i|, \quad i = 1,2,\cdots,n, \qquad (5)$$

沿系统(1)的正半轨线求 Lyapunov 函数(5)的 Dini 导数

$$\mathrm{D}^+V_i(\boldsymbol{x}(t))\Big|_{(1)} \leqslant -\alpha_i^- d_i|x_i(t)| + \alpha_i^+\sum_{j=1}^{n}\left(|a_{ij}|k_j + |b_{ij}|k_j + |c_{ij}|l_j + |I_i(t)|\right)|x_i(t)| \leqslant -\alpha_i^- d_iV_i + 2N_i^{(1)} := \mu V_i + \beta.$$

其中 $\mu = \alpha_i^- d_i$,$\beta = 2N_i^{(1)}$,当 $V(\boldsymbol{x}(t)) > \frac{\beta}{\mu}$,$V(\|\boldsymbol{\varphi}\|,\|\boldsymbol{\psi}\|) \geqslant V(\boldsymbol{x}(t_0)) > \frac{\beta}{\mu}$,$t \geqslant t_0$,据引理,便有如下估计式

$$V_i(x_i(t)) - \frac{\beta}{\mu} \leqslant \left(V_i(x_i(t_0)) - \frac{\beta}{\mu}\right)e^{-\mu(t-t_0)} \leqslant \left(V_i(\|\varphi_i(t)\|,\|\psi_i(t)\|) - \frac{\beta}{\mu}\right)e^{-\mu(t-t_0)}.$$

因此,紧集

$$Q_i := \left\{\boldsymbol{x}\ \Big|\ |x_i| \leqslant \frac{2N_i^{(1)}}{\alpha_i^- d_i}, i = 1,2,\cdots,n\right\}$$

是系统(1)相对于变量 x_i 的全局指数吸引集,而紧集 $\Omega_2 := Q_1 \times Q_2 \cdots \times Q_n$ 是相对于所有变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的全局指数吸引集.

最后证明紧集 Ω_3 亦为系统(1)的全局指数吸引集,构造正定径向无界的 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n}|x_i(t)| \qquad (6)$$

沿系统(1)的正半轨线求 Lyapunov 函数(6)的 Dini 导数

$$\mathrm{D}^+V_i(\boldsymbol{x}(t))\Big|_{(1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} -\alpha_i^- d_i|x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n}2N_i^{(1)} \leqslant -\min_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i^- d_iV_i(\boldsymbol{x}(t)) + \sum_{i=1}^{n}2N_i^{(1)} := \mu V_i + \beta.$$

其中 $\mu = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)$,$\beta = \sum\limits_{i=1}^{n}2N_i^{(1)}$.

当 $V(\boldsymbol{x}(t)) > \frac{\beta}{\mu}$,$V(\|\boldsymbol{\varphi}\|,\|\boldsymbol{\psi}\|) \geqslant V(\boldsymbol{x}(t_0)) > \frac{\beta}{\mu}$,$t \geqslant t_0$ 据引理,可以导出式(4),因此,紧集 Ω_3 是系统(1)的全局指数吸引集.

综合上述证明可知,紧集

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$$

为系统(1)更精确的全局指数吸引集.

定理 1 证明完毕.

2.2 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 为 F_1 类函数,$\boldsymbol{g}(\cdot)$ 为 B 类函数

假设 $\boldsymbol{f}(\cdot) \in F_1$,$\boldsymbol{g}(\cdot) \in B$,且 $|f_i(\cdot)| \leqslant k_i$,$\mathrm{D}^+f_i(x_i) \geqslant 0$,$\boldsymbol{f}(0) = 0$,$|g_i(\cdot)| \leqslant l_i$.

同样为了简化证明过程,定义如下的常数:

$$N_i^{(2)} := \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\Big((|p_{ij}| + |b_{ij}|)k_j + |c_{ij}|l_j\Big) + |I_j|\right],$$

$$N_i^{(3)} := \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\Big((|p_{ij}| + |b_{ij}|)k_j + |c_{ij}|l_j\Big) + |I_j|\right]k_i.$$

定理 2 若 $\boldsymbol{f}(\cdot) \in F_1$, $\boldsymbol{g}(\cdot) \in B$, 定义矩阵 $\boldsymbol{P}(p_{ij})_{n\times n}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}$ 满足

1) $\bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} < 0$, 且存在常数 ε 满足 $0 < \varepsilon \ll 1$, $\bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} + \varepsilon \boldsymbol{I}_n \leqslant 0$, 则紧集

$$\Omega_4 := \left\{\boldsymbol{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i^{(2)})^2}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)\varepsilon}\right\}$$

为系统(1)的 Lagrange 全局指数吸引集.

2) $\bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \leqslant 0$, 则紧集

$$\Omega_5 := \left\{\boldsymbol{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i \leqslant \frac{N^{(3)}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)\varepsilon}\right\}$$

为系统(1)的 Lagrange 全局指数吸引集.

从而,紧集

$$\Omega = \Omega_4 \cap \Omega_5$$

为系统(1)更佳的全局指数吸引集.

证明 先证明 Ω_4 为系统(1)的 Lagrange 全局指数吸引集,取 Lyapunov 函数如下

$$V(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i. \tag{7}$$

由于 $f_i(x_i)$ 及 $\alpha_i(x_i)$ 的性质,容易证明 $V(\boldsymbol{x})$ 是正定且径向无界的. 沿系统(1)的正半轨线对 Lyapunov 函数(7)求导

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} = &\sum_{i=1}^{n}\Big[-d_i x_i f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + p_{ij})f_i(x_i)f_j(x_j) - \\ &\sum_{j=1}^{n}p_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j) + \\ &\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + \\ &\sum_{j=1}^{n}c_{ij}g_j(\dot{x}_j(t-\tau_{ij}(t)))f_i(x_i) + f_i(x_i)I_i(t)\Big] \leqslant \\ &-\sum_{i=1}^{n}d_i x_i f_i(x_i) + f^{\mathrm{T}}(x)\Big(\frac{\bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2}\Big)f(x) + \\ &\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(|p_{ij}|k_j + |b_{ij}|k_j + |c_{ij}|l_j\Big) + \\ &|I_i|\Big]|f_i(x_i)| \leqslant \\ &-\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)}\frac{f_i(s)}{\alpha_i(s)}\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(2)})^2}{\varepsilon} = \\ &-\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)V(x(t)) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(2)})^2}{\varepsilon} := \\ &-\mu V + \beta.\end{aligned}$$

其中 $\mu = -\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)$, $\beta = \sum_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(2)})^2}{\varepsilon}$. 当 $V(\boldsymbol{x}(t)) > \frac{\beta}{\mu}$, $V\big(\|\boldsymbol{\varphi}\|, \|\boldsymbol{\psi}\|\big) \geqslant V(\boldsymbol{x}(t_0)) > \frac{\beta}{\mu}$, $t \geqslant t_0$, 由引理容易推出式(4),因此, Ω_4 是系统(1)的全局指数吸引集.

为证明紧集 Ω_5 为系统(1)的 Lagrange 全局指数吸引集,仍取 Lyapunov 函数(6),沿系统(1)的正半轨线对式(6)进行求导

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} \leqslant &-\sum_{i=1}^{n}d_i x_i f_i(x_i) + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})(\bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \\ &\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(|p_{ij}|k_j + |b_{ij}|k_j + \\ &|c_{ij}|l_j\Big) + |I_i|\Big]k_i \leqslant \\ &-\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)V(\boldsymbol{x}(t)) + N^{(3)} := \\ &-\mu V + \beta.\end{aligned}$$

其中 $\mu = -\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)$, $\beta = N^{(3)}$. 当 $V(\boldsymbol{x}(t)) > \frac{\beta}{\mu}$, $V\big(\|\boldsymbol{\varphi}\|, \|\boldsymbol{\psi}\|\big) \geqslant V(\boldsymbol{x}(t_0)) > \frac{\beta}{\mu}$, $t \geqslant t_0$, 据引理可得式(4),因此,紧集 Ω_5 系是系统(1)的全局指数吸引集.

于是, $\Omega = \Omega_4 \cap \Omega_5$ 为系统(1)更少保守的全局指数吸引集.

定理 2 证明完毕.

注 1 如果 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} < 0$ 或 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \leqslant 0$, 则在定理 2 中可取 $\boldsymbol{P} \equiv 0$.

2.3 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 为 $\boldsymbol{F}_2$ 类函数, $\boldsymbol{g}(\cdot)$ 为 B 类函数

假设 $\boldsymbol{f}(\cdot) \in F_2$, $\boldsymbol{g}(\cdot) \in B$, 且 $|f_i(\cdot)| \leqslant k_i$, $0 \leqslant D^+ f_i(x_i) \leqslant L_i$, $f(0) = 0$, $|g_i(\cdot)| \leqslant l_i$.

定理 3 若 $\boldsymbol{f}(\cdot) \in F_2$, $\boldsymbol{g}(\cdot) \in B$, 定义矩阵 $\boldsymbol{P}(p_{ij})_{n\times n}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}$ 满足:

1) $\bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} + \mathrm{diag}\Big(\frac{-d_1}{L_1}, \frac{-d_2}{L_2}, \cdots, \frac{-d_n}{L_n}\Big) < 0$, 且存

在常数 ε,ξ_1 满足 $0<\varepsilon\ll,0<\xi_1\ll 1$,使得

$$\left(\frac{\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)+\xi_1\mathrm{diag}\left(\frac{-d_1}{l_1},\frac{-d_2}{L_2},\cdots,\frac{-d_n}{L_n}\right)+\varepsilon I_n\leqslant 0,$$

则紧集

$$\Omega_6:=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i^{(2)})^2}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i(1-\xi_1))\varepsilon}\right\}$$

为系统(1)的 Lagrange 全局指数吸引集.

2) $\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}\leqslant 0$,则紧集

$$\Omega_7=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i\leqslant\frac{N^{(3)}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)}\right\}$$

为系统(1)的 Lagrange 全局指数吸引集. 而紧集

$$\Omega=\Omega_6\cap\Omega_7$$

为更好的全局指数吸引集.

证明 采用 Lyapunov 函数(6),沿系统(1)的正半轨线对式(6)求导

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}=\\
&-\sum_{i=1}^{n}(1-\xi_1)d_ix_if_i(x_i)-\xi_1\sum_{i=1}^{n}d_ix_if_i(x_i)+\\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j)+\\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))+\\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}f_i(x_i)g_j(\dot{x}_j(t-\tau_{ij}(t)))+\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)I_i(t)\leqslant\\
&-\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i(1-\xi_1))V(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\cdot\\
&\left\{\frac{\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}}{2}+\xi_1\mathrm{diag}\left(\frac{-d_1}{L_1},\frac{-d_2}{L_2},\cdots,\frac{-d_n}{L_n}\right)\right\}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\\
&\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left((|p_{ij}|+|b_{ij}|)k_j+|c_{ij}|l_j\right)+|I_i|\right]|f_i(x_i)|\leqslant\\
&-\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i(1-\xi_1))V(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\cdot\\
&\left\{\frac{\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}}{2}+\xi_1\mathrm{diag}\left(\frac{-d_1}{L_1},\frac{-d_2}{L_2},\cdots,\frac{-d_n}{L_n}\right)+\varepsilon I_n\right\}\cdot\\
&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(2)})^2}{\varepsilon}\leqslant\\
&-\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i(1-\xi_1))V(\boldsymbol{x}(t))+\sum_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(2)})^2}{\varepsilon}:=\\
&-\mu V+\beta.
\end{aligned}$$

其中 $\mu=-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i(1-\xi_1))$,$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(N_i^{(2)})^2}{\varepsilon}$.

当 $V(\boldsymbol{x}(t))>\frac{\beta}{\mu}$,$V\left(\|\boldsymbol{\varphi}\|,\|\boldsymbol{\psi}\|\right)\geqslant V(x(t_0))>\frac{\beta}{\mu}$,$t\geqslant t_0$,据引理,可推出式(4),因此,紧集 Ω_6 是系统(1)的全局指数吸引集.

再证明紧集 Ω_7 是系统(1)的全局指数吸引集. 仍采用 Lyapunov 函数(6),沿系统(1)的正半轨线对式(6)求导

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}\leqslant&\\
&-\sum_{i=1}^{n}d_ix_if_i(x_i)+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})(\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j)+\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)I_i(t)+\\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))+\\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}f_i(x_i)g_j(\dot{x}_j(t-\tau_{ij}(t)))\leqslant\\
&-\sum_{i=1}^{n}d_ix_if_i(x_i)+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})(\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\\
&\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(|p_{ij}|k_j+|b_{ij}|k_j+|c_{ij}|l_j\right)+|I_i|\right]k_i\leqslant\\
&-\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)V(\boldsymbol{x}(t))+N^{(3)}:=\\
&-\mu V+\beta.
\end{aligned}$$

其中 $\mu=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)$,$\beta=N^{(3)}$. 当 $V(\boldsymbol{x}(t))>\frac{\beta}{\mu}$,$V\left(\|\boldsymbol{\varphi}\|,\|\boldsymbol{\psi}\|\right)\geqslant V(x(t_0))>\frac{\beta}{\mu}$,$t\geqslant t_0$,据引理,可得如下估计式(4),因此,紧集 Ω_7 是系统(1)的全局指数吸引集,而紧集

$$\Omega=\Omega_6\cap\Omega_7$$

为更佳的全局指数吸引集.

定理 3 证明完毕.

注 2 如果

$$\frac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}+\mathrm{diag}\left(\frac{-d_1}{L_1},\frac{-d_2}{L_2},\cdots,\frac{-d_n}{L_n}\right)<0,$$

或

$$A+A^{\mathrm{T}}\leqslant 0,$$

则在定理 3 中可取 $\boldsymbol{P}\equiv 0$.

3 主要推论

Main corollaries

当 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}=0$,系统(1)为具变时滞的 Cohen-Grossberg 神经网络模型(2),将系统(1)的主要结论应用到系统(2),获得如下推论:

推论 1 令 $\boldsymbol{f}(\cdot)\in B$,

$$N_i^*:=\frac{\alpha_i^+}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(|a_{ij}|+|b_{ij}|\right)k_j+|I_i|\right],$$

则下列紧集

$$\Omega_1^* :=\left\{x \left| \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^n (N_i^*)^2/\varepsilon_i}{2\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i-\varepsilon_i)}, 0<\varepsilon_i<\alpha_i^- d_i\right.\right\},$$

$$\Omega_2^* :=Q_1\times Q_2\cdots\times Q_n,$$

$$Q_i :=\left\{x \left| \, |x_i| \leqslant \frac{2N_i^*}{\alpha_i^- d_i}, i=1,2,\cdots,n\right.\right\},$$

$$\Omega_3^* :=\left\{x \left| \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n 2N_i^*}{\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)}\right.\right\}$$

为系统(2)的 Lagrange 全局指数吸引集,而

$$\Omega^* =\Omega_1^*\cap\Omega_2^*\cap\Omega_3^*$$

为系统(2)更好的 Lagrange 全局指数吸引集.

推论 2 令 $\boldsymbol{f}(\cdot)\in F_1, \overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}$.

$$N_i^* :=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^2\left((|p_{ij}|+|b_{ij}|)k_j\right)+|I_j|\right],$$

$$\widehat{N}_i^{(3)} :=\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^n\left((|p_{ij}|+|b_{ij}|)k_j\right)+|I_j|\right]k_i,$$

则下列紧集

$$\Omega_4^* :=\left\{x \left| \sum_{i=1}^n\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n(\overline{N}_i^*)^2}{\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)\varepsilon}\right.\right\},$$

$$\Omega_5^* :=\left\{x \left| \sum_{i=1}^n\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i \leqslant \frac{\widehat{N}^*}{\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)}\right.\right\}.$$

为系统(2)的 Lagrange 全局指数吸引集,其中,常数 ε 满足 $0<\varepsilon\ll 1, \overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{I}_n\leqslant 0$. 而

$$\Omega^* =\Omega_4^*\cap\Omega_5^*$$

为系统(2)更加精确的全局指数吸引集.

推论 3 $\boldsymbol{f}(\cdot)\in F_2, \overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}$ 则下列紧集

$$\Omega_6^* :=\left\{x \left| \sum_{i=1}^n\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n(\overline{N}_i^*)^2}{\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i(1-\xi_1))\varepsilon}\right.\right\},$$

$$\Omega_7^* :=\left\{x \left| \sum_{i=1}^n\int_0^{x_i}\frac{f_i(x_i)}{\alpha_i(x_i)}\mathrm{d}x_i \leqslant \frac{\widehat{N}^*}{\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i^- d_i)}\right.\right\}.$$

为系统(2)的 Lagrange 全局指数吸引集. 其中,常数 ε,ξ_1 满足 $0<\varepsilon,\xi_1<<1$,

$$\frac{\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2}+\xi_1\mathrm{diag}\left(\frac{-d_1}{L_1},\frac{-d_2}{L_2},\cdots,\frac{-d_n}{L_n}\right)\leqslant 0.$$

而

$$\Omega^* =\Omega_6^*\cap\Omega_7^*$$

为系统(2)更佳的全局指数吸引集.

4 数值例子及仿真

Numerical examples and simulations

例 1 考虑下面 2 阶的变时滞中立型 Cohen-Grossberg 神经网络模型

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(x_1(t)) & 0\\ 0 & \alpha(x_2(t))\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-d_1x_1(t)\\ -d_2x_1(t)\end{pmatrix}+\right.$$
$$\begin{pmatrix}-0.5 & -0.1\\ -0.1 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(x_1(t))\\ f(x_2(t))\end{pmatrix}+$$
$$\begin{pmatrix}-0.2 & -0.2\\ -0.1 & 0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(x_1(t-\tau_1(t)))\\ f(x_2(t-\tau_2(t)))\end{pmatrix}+$$
$$\left.\begin{pmatrix}-0.2 & 0.1\\ -0.2 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g(\dot{x}(t-\tau_1(t)))\\ g(\dot{x}(t-\tau_2(t)))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}I_1(t)\\ I_2(t)\end{pmatrix}\right],$$

其中

$$\alpha(x)=\frac{1}{1+e^x},$$
$$f(x)=\sin x,$$
$$g(\dot{x})=\arctan\dot{x},$$
$$\tau(t)=0.5+\sin t,$$
$$I_1=I_2=d_1=d_2=1,$$
$$x_1(0)=x_2(0)=1.$$

据定理 1,令 $\alpha^-=\alpha^+=1, \varepsilon_1=\varepsilon_2=0.8$,可知紧集

$$\Omega_1=\{x_1{}^2+x_2{}^2\leqslant 26.6\},$$
$$\Omega_2=\{|x_1|\leqslant 1.3, |x_2|\leqslant 1.6\},$$
$$\Omega_3=\{|x_1|+|x_2|\leqslant 2.9\},$$
$$\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3$$

为系统(3)的全局指数吸引集. 通过仿真验证得到图 1.

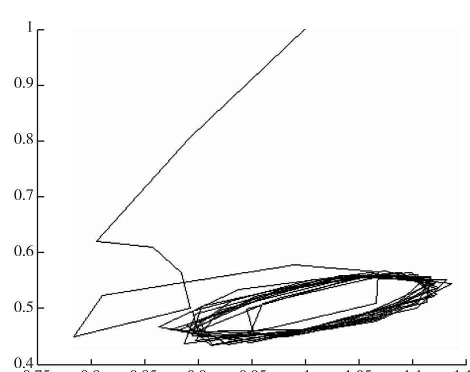

图 1 2 阶实例系统仿真

Fig. 1 Simulation of a 2-dimensional neural network system

例 2 考虑下面 3 阶的变时滞中立型 Cohen-Grossberg 神经网络模型

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\alpha(x_1(t))\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-d_1x_1(t)\\-d_2x_2(t)\\-d_3x_3(t)\end{pmatrix}+\right.$$

$$\begin{pmatrix}-0.5&-1&2.5\\1&-3.4&3\\-2.5&-3&1.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(x_1(t))\\f(x_2(t))\\f(x_3(t))\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}-2&-1&0.5\\-1&-2.5&1.8\\0.4&-3.2&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(x_1(t-\tau_1(t)))\\f(x_2(t-\tau_1(t)))\\f(x_3(t-\tau_3(t)))\end{pmatrix}+$$

$$\left.\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&0.5&0.25\\1.2&0.34&1.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g(\dot{x}_1(t-\tau_1(t)))\\g(\dot{x}_2(t-\tau_1(t)))\\g(\dot{x}_3(t-\tau_3(t)))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}I_1(t)\\I_2(t)\\I_3(t)\end{pmatrix}\right].$$

其中

$$\alpha(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}},$$
$$f(x)=\tanh x,$$
$$g(\dot{x})=\arctan\dot{x},$$
$$\tau(t)=0.5+\sin t,$$
$$I_1=I_2=I_3=d_1=d_2=d_3=1,$$
$$x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=1.$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的关联矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-0.5&-1&2.5\\1&-3.4&3\\-2.5&-3&0\end{pmatrix},$$

据定理 2，则满足

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}$$

的矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1.6\end{pmatrix},$$

显然

$$\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\leqslant 0,$$

取 $\alpha^-=\alpha^+=1$，则紧集

$$\Omega=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,e^{x_1}+e^{-x_1}+e^{x_2}+e^{-x_2}+e^{x_3}+e^{-x_3}\leqslant 27.89\right\}$$

为系统的全局指数吸引集.

通过仿真验证得到图 2.

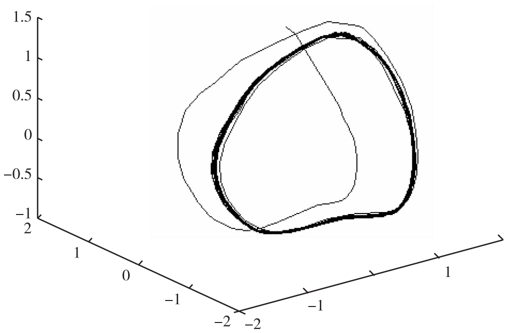

图 2　3 阶实例系统仿真

Fig. 2　Simulation of a 3-dimensional neural network system

5　结束语

Concluding remarks

本文研究了一类具有变时滞的中立型 Cohen-Grossberg 神经网络的 Lagrange 全局指数稳定性. 通过构造合适的 Lyapunov 函数和利用不等式分析技巧，获得了关于该系统在 3 类不同激励函数作用下的 Lagrange 全局指数稳定的若干全局指数吸引集. 仿真实例说明了所得结果的有效性.

参考文献

References

[1]　Cohen M A, Grossberg S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1983, 13(1): 815-826

[2]　Li T, Fei S M, Zhu Q. Global stability of Cohen-Grossberg neural networks with time-varying and distributed delays [J]. Control Theory & Application, 2008, 6(4): 449-454

[3]　罗琦，邓飞其，包俊东. 具分布参数的广义随机神经网络的镇定[J]. 武汉科技大学学报：自然科学版，2003，26(4)：420-423
LUO Q, DENG F Q, BAO J D. Stabilization of a generalized stochastic neural network with distributed parameters [J]. Journal of Wuhan University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2003, 26(4): 420-423

[4]　Zhao Y, Xia Y H. The stability of discrete-time Cohen- Grossberg BAM neural networks with delays [J]. Annals of Differential Equations, 2008, 24(4): 498-505

[5]　汪海洋. 一类具脉冲干扰的 Cohen-Grossberg 时滞神经网络模型的全局指数稳定[J]. 数学理论与应用，2008，28(4)：36-39
WANG Haiyang. Global exponential stability of delayed Cohen-Grossberg neural networks with impulses [J]. Mathematical Theory and Applications, 2008, 28(4): 36-39

[6]　王占山，张化光，余文，等. 基于 LMI 的时变时滞 Cohen-Grossberg 神经网络鲁棒稳定性[J]. 电子学报，2008，36(11)：2220-2223
WANG Zhanshan, ZHANG Huaguang, YU Wen, et al. An LMI approach to Robust stability analysis of Cohen-Grossberg neural networks with time varying delay [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(11): 2220-2223

[7]　Jiang M H, Shen Y, Liao X X. Boundedness and global exponential stability for generalized Cohen-Grossberg neural networks with variable delay [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 172: 379-393

[8]　孟益民，黄立宏，郭振远. 具不连续激励函数 Cohen-Grossberg 神经网络周期解的全局指数稳定性[J]. 应用数学学报，2009，32(1)：154-168
MENG Yimin, HUANG Lihong, GUO Zhenyuan. Global exponential stability of periodic solution of delayed Cohen-Grossberg neural networks with discontinuous neuron activations [J]. Acta Math-

ematicae Applicatiae Sinica, 2009, 32(1): 154-168

[9] LUO Qi, DENG Feiqi, MAO Xuerong, et al. Stability theory and application of stochastic reaction diffusion systems[J]. Science in China E, 2007, 37(10): 1272-1284

[10] Liao X X, Wang J, Zeng Z G. Global asymptotic stability and global exponential stability of delayed cellular networks [J]. IEEE Transactions on Circuit System-Ⅱ, 2005, 52: 403-409

[11] Zeng Z G, Wang J, Liao X X. Global exponential stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays [J]. IEEE Transactions on Circuit System-I, 2003, 50: 1353-1358

[12] Liao X X, Wang J. Algebraic criteria for global exponential stability of cellular networks with multiple time delays[J]. IEEE Transactions on Circuit System-I, 2003, 50: 268-275

[13] Liao X F, Li C G, Wong K W. Criteria for exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks[J]. Neural Networks, 2004, 17 (1): 1401-1414

[14] Chen T P, Rong L B. Robust global exponential stability of Cohen-Grossberg neural Networks with delays [J]. IEEE Transactions Neural Networks, 2004, 15: 203-206

[15] Wang L, Zou X. Exponential stability of Cohen- Grossber gneural network[J]. Neural Networks, 2002, 15: 415-422

[16] Liao Xiaoxin. Stability of general ecological systems and neutral neuworks systems[R]. Proc of the first world congress of nonlinear analyst, Walter de Gruyter Berlin New York, 1996: 1325-1340

[17] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ⅰ)[J]. 中国科学 A, 1994, 24(9): 902-910
LIAO Xiaoxin. The mathematical theory of cellular neural networks (Ⅰ)[J]. Science in China A, 1994, 24(9): 902-910

[18] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ⅱ)[J]. 中国科学 A, 1994, 24(10): 1037-1046
LIAO Xiaoxin. The mathematical theory of cellular neural networks (Ⅱ)[J]. Science in China A, 1994, 24(10): 1037-1046

[19] LaSalle J. Some extensions of Lyapunov's second method[J]. IEEE Transactions Circuit Theory, 1960, 7(4): 520-527

[20] Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method[J]. Mathematical Society of Japan, Japan, Tokyo, 1966

[21] Passino K M, Burgess K L. Lagrange stability and boundedness of discrete event system[J]. Discrete Event Dynamical System: Theory & Application, 1995, 5: 383-403

[22] Liao X X, Wang J. Global dissipativity of continuous-time recurrent neural networks with time delays[J]. Phys Rev E68 (2003) 016118-1

[23] Liao X X, Luo Q, Zeng Z G, et al. Global exponential stability in Lagrange sense for recurrent neural networks with time delays[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9: 1535-1557

Global exponential stability in Lagrange sense for a class of neural networks

CHEN Yanyan[1] LUO Qi[1]

1 College of Information and Control, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044

Abstract Considering three types of bounded activation functions, and employing appropriate Lyapunoy functions method and inequality analyzing technique, this paper studies the global exponential stability in Lagrange sense for a class of neutral-type Cohen-Grossberg neural networks (NCGNN) with time-varying delays. Then several global exponential attractive sets in which all trajectories converge are obtained and the structural demonstrations of the system model are also presented. These results apply to the analysis of both monostable and multistable neural networks. Finally, some numerical examples as well as their simulation are given to verify our results.

Key words Cohen-Grossberg neural network; global exponential stability; time delay type; neutral type