文章编号:1674-7070(2009)01-0027-05

现代平差模型及其应用

陶本藻[1,2]

摘要

基于高斯-马尔柯夫模型,研究了现代平差模型,导出了秩亏自由网平差和配置(拟合推估)等方法的公式,研究了它们的基准及其转换方法. 最后针对模型误差作为应用例,给出了附加系统参数、附加系统权以及半参数等应用模型.

关键词

高斯-马尔柯夫模型;现代平差;模型误差;系统参数和系统权

中图分类号 P207.2

文献标志码 A

收稿日期 2009-04-15

作者简介

陶本藻,男,教授,博导,研究方向为现代测量数据处理和地壳形变及地球动力学解释. bztao@ sgg. whu. edu. cn

1 武汉大学 测绘学院,武汉,430079

2 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉,430079

0 引言

Introduction

测量数据处理的实质内容是建模、参数估计、统计分析和预报,目的是用最优化数学方法去拟合带有误差的数据,并消除和减弱系统误差和粗差对成果的影响,建模是其中的关键步骤,具有模型误差的平差模型很难取得好的平差成果.

测量数据所建平差模型包括函数模型和随机模型2类. 函数模型是描述观测量和待求未知量之间的数学关系的函数模型,随机模型则是描述平差问题中随机量(观测量,具有先验统计先验信息的参数)及其相互间统计相关性质的模型,所谓统计相关性质,指的是其先验的方差与协方差.

随着科学和生产实践中处理带有误差的观测数据的需要,18世纪末高斯发明了最小二乘平差,19世纪初到20世纪中叶,测量界主要研究的是基于偶然误差的平差理论和方法,取得了许多成果,这类平差方法统称为经典平差方法. 此后发展起来的才统称为现代平差理论和方法,在“3S”及其集成的数据处理中具有广泛的应用.

本文就现代平差方法的模型进行综述并说明其应用.

1 经典平差模型

Classical adjustment model

设有高斯-马尔柯夫模型,其函数模型和随机模型为

$$\underset{n1}{\boldsymbol{L}} = \underset{nt}{\boldsymbol{A}}\underset{t1}{\boldsymbol{X}} + \underset{n1}{\boldsymbol{\Delta}}, \tag{1}$$

$$E(\boldsymbol{\Delta}) = 0, \qquad \boldsymbol{D}_L = \boldsymbol{D}_\Delta = \sigma_0^2\boldsymbol{Q}. \tag{2}$$

经典模型特点是模型中 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = t, n > t$. $\boldsymbol{X}$ 为非随机参数, $\left|\boldsymbol{D}_L\right| \neq 0, R(\boldsymbol{D}) = n, \boldsymbol{D}$ 为满秩方阵.

与式(1)相应的误差方程为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}. \tag{3}$$

权阵 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1}$, $\boldsymbol{V}$ 为 $\boldsymbol{\Delta}$ 的负估值, $\hat{\boldsymbol{X}}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的估值.

在最小二乘准则

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V} = \min \tag{4}$$

下解误差方程,得其参数估值为

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}. \tag{5}$$

精度估计

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}}{n-t}. \tag{6}$$

$$\boldsymbol{D}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_{\hat{X}\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{N}^{-1}. \tag{7}$$

经典平差模型仍然是现今测量平差实践应用最为广泛的模型,也是平差基础模型,现代平差的发展都基于此模型.

2 现代平差模型

Modern adjustment model

随着工程中高精度的需要,经典平差模型经常不能应用,例如控制网优化设计,摄影测量数据处理以及与大地测量数据联合处理,动态数据处理及变形分析,大地测量反演,坐标变换与连结,重力场元素的拟合与推估,不同类数据的融合处理等,发展了现代平差理论和方法,下面分 2 种情形予以综合.

2.1 参数 X 非随机的平差模型

高斯-马尔柯夫模型仍为式(1)和式(2),其中 $\boldsymbol{X}$ 为非随机参数,$E(\boldsymbol{\Delta})=0$ 表示观测数据仅包含偶然误差,其中

$$R(\boldsymbol{A}) = u \leqslant t, R(\boldsymbol{D}_L) = q \leqslant n. \tag{8}$$

这是 X 非随机时的综合平差模型,当 $u=t, q=n$ 时就是第 2 节所述的经典平差模型(1)、(2). 故式(8)是更为普遍的平差模型.

1) 当 $R(\boldsymbol{A}) = u \leqslant t, R(\boldsymbol{D}_L) = n$ 时,模型(1)、(2)为秩亏自由网平差模型.

误差方程仍形如式(3),在 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \min F$,所得法方程为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL}. \tag{9}$$

因为法方程系数阵

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}$$

的秩

$$R(\boldsymbol{N}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}) = R(\boldsymbol{A}) = u < t.$$

具有秩亏 $d=t-u$,故 $\boldsymbol{N}$ 为奇异阵,其逆 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 不存在,此法方程不存在唯一解. 为求其最优唯一解,在最小二乘准则 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \min F$ 再增一准则,称为参数 $\boldsymbol{X}$ 的最小范数解(或部分参数的最小范数解),此准则为

$$\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\hat{\boldsymbol{X}} = \min. \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{P}_X$ 为基准权阵,视实际问题中需要什么基准而定,当 $\boldsymbol{P}_X = \boldsymbol{I}$(单位矩阵)准则为

$$\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}} = \min.$$

是全部参数的最小范数准则,在变形分析中就是拟稳基准,由此称为拟稳平差,现已普遍应用于变形分析中.

由最小范数准则(10)下,式(9)的解为

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{N}_{m(P_X)}^{-}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL}. \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{N}_{m(P_X)}^{-}$ 是 $\boldsymbol{N}$ 的带权 $\boldsymbol{P}_X$ 的最小范数广义逆,其计算式为[2]

$\boldsymbol{P}_X$ 正定,

$$\boldsymbol{A}_{m(P_X)}^{-} = \boldsymbol{P}_X^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP}_X^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-}, \tag{12}$$

$\boldsymbol{P}_X$ 半正定,

$$\boldsymbol{A}_{m(P_X)}^{-} = (\boldsymbol{P}_X + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_X + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{AT}\right)^{-}. \tag{13}$$

最小范数广义逆 $\mathrm{A}_{m(P_X)}^{-}$ 不唯一,不论取任何最小范数逆但其最小范数解是唯一的.

秩亏自由网平差模型可归结为

$$\begin{cases} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}, \\ \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \min, \\ \hat{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\hat{\boldsymbol{X}} = \min. \end{cases} \tag{14}$$

并已证明[1]模型(14)与下列附有基准约束的模型等价:

$$\begin{cases} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}, \\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\hat{\mathbf{X}} = 0, \\ \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \min. \end{cases} \tag{15}$$

式(15)中 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\hat{\boldsymbol{X}} = 0$ 就是平差问题基准约束条件,也就是最小范数准则的基准意义. 合理地选择基准是平差另一重要问题,基准的选择在这里可以运用最小范数准则来实现,这是平差一个理论问题,在变形分析等许多问题的应用可参考文献[1-2].

2) 当 $R(\boldsymbol{A}) = t$,列满秩,$R(\boldsymbol{D}_L) = q < n$,模型(1)、(2)为具有奇异协方差平差模型.

误差方程仍形如式(3),此时的最小二乘准则

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-}\boldsymbol{V} = \min. \tag{16}$$

$\boldsymbol{Q}^{-}$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 的广义逆,$R(\boldsymbol{Q}^{-}) = R(\boldsymbol{Q}) = R(\boldsymbol{D}_L) = q < n$,$\boldsymbol{Q}$ 的凯利逆 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 不存在,故 $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{Q}^{-1}$ 而是 $\boldsymbol{Q}^{-}$,在(16)准则下解误差方程(3),其法方程的解为

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-}\boldsymbol{L}. \tag{17}$$

式中注意到 $q > t$,固有 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}) = t$,$\hat{\boldsymbol{X}}$ 解唯一.

3) 普遍模型

当 $R(\boldsymbol{A}) = u \leqslant t, R(\boldsymbol{D}_L) = q \leqslant n$ 时,普遍模型也称广义高斯-马尔柯夫模型,在最小二乘准则下平差称为最小二乘平差的统一方法,由 Rao1972 年提出.

误差方程仍形如式(3),Rao 给出的最小二乘准

则是

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{AUA}^{\mathrm{T}})^{-}\boldsymbol{V}=\min. \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{U}$ 为对称阵,且 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{AUA}^{\mathrm{T}})\supset\boldsymbol{S}$,当 $\boldsymbol{Q}>0$,$\boldsymbol{U}=0$,在式(18)下参数估计式为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_U^{-}\boldsymbol{A})^{-}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_U^{-}\boldsymbol{L}, \tag{19}$$

$$Q_u=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{AUA}^{\mathrm{T}}. \tag{20}$$

只有当 $\boldsymbol{Q}_u$ 为非奇异阵时,解 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 才是唯一的,否则其解不唯一,即在式(18)下解误差方程(3)的最小二乘解一般不唯一. 于是就需要视平差实际问题要求增加基准条件或对参数 $\boldsymbol{X}$ 建立某种最小范数准则,求参数的唯一解,可利用秩亏自由网平差的思想.

2.2 参数 X 为随机的平差模型

1)最小二乘滤波

高斯-马尔柯夫模型的另一重要扩展是模型参考参数 $\boldsymbol{X}$ 为随机参数,此时在随机模型中要增加参数的先验统计性质,即 $\boldsymbol{X}$ 的期望和方差阵:

$$E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\mu}_X,D(\boldsymbol{X})=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_X=\sigma_0^2\boldsymbol{P}_X^{-1}.$$

在函数模型中

$$R(\boldsymbol{A})=t,R(\boldsymbol{D}_\Delta)=n.$$

此时的误差方程为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{L},$$

$$\boldsymbol{V}_X=\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_X,$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_\Delta & \\ & \boldsymbol{P}_X\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{P}_\Delta=\boldsymbol{Q}^{-1}$ 即为前述的观测权阵 $\boldsymbol{P}$,为与此处 $\boldsymbol{P}$ 的区别,记为 $\boldsymbol{P}_\Delta$,增加了虚拟误差方程从而式中 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 改变为非随机参数,这样滤波问题就转化为一般经典平差模型了,最小二乘准则为

$$(\boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{V}_X)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{P}_X\end{pmatrix}=\text{最小}.$$

即

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}_X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\boldsymbol{V}_X=\min. \tag{21}$$

可得参数 $\boldsymbol{X}$ 的唯一最优解.

2)最小二乘配置(拟合推估)

高斯-马尔柯夫模型的扩充函数模型为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{BX}_2+\boldsymbol{GY}+\boldsymbol{\Delta},$$

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\quad 0),\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}'\end{pmatrix}. \tag{22}$$

式(22)中:$\boldsymbol{X}$ 为随机参数,称为信号;$\boldsymbol{X}'$ 为非测量信号. $R\left(\underset{nt}{\boldsymbol{A}}\right)=t$,$\boldsymbol{Y}$ 为非随机参数,$R\left(\underset{nu}{\boldsymbol{G}}\right)=u$. 扩充的随机模型为

$$E(\boldsymbol{\Delta})=0,\boldsymbol{D}_\Delta=\sigma_0^2\boldsymbol{P}_\Delta^{-1},\boldsymbol{D}_X=\sigma_0^2\boldsymbol{P}_X^{-1},$$

$$\boldsymbol{D}_{X'}=\sigma_0^2\boldsymbol{P}_X^{-1},$$

$\boldsymbol{D}_{XX'}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}'$ 的协方差:

$$\boldsymbol{D}_{X_2\Delta}=0. \tag{23}$$

此时

$$\boldsymbol{D}_L\neq\boldsymbol{D}_\Delta,\boldsymbol{D}_L=\boldsymbol{BD}_{X_2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_\Delta,\mu_2=\begin{bmatrix}\mu_X\\ \mu_{X'}\end{bmatrix}.$$

平差时的误差方程

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{X}}_2+\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{Y}}-\boldsymbol{L},$$

$$\boldsymbol{V}_2=\hat{\boldsymbol{X}}_2-\boldsymbol{\mu}_2,$$

权阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_\Delta^{-1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{D}_{X_2}^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_{X_2}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_X & \boldsymbol{D}_{XX'}\\ \boldsymbol{D}_{X'X} & \boldsymbol{D}_{X'}\end{bmatrix}.$$

其最小二乘准则为

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Delta V}+\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{X_2}^{-1}\boldsymbol{V}_2=\min. \tag{24}$$

可见配置模型包含了经典平差、滤波和推合模型,也是一个综合模型. 可按经典平差模型求参数 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的最优解.

以上现代平差理论与方法可参读文献[3].

3 针对模型误差的平差应用模型

Application models of adjustment in the light of model error

3.1 模型误差

模型误差分为函数模型误差和随机模型 2 类,建立函数模型,其元素是观测值、求待定参数依据的基准数据、观测量与待定参数间函数关系的合理性和正确性,模型的线性化过程等都可能产生与实际不符,如果由此产生的误差属观测精度相应的偶然误差参数量级,就认为建模正确,不存在模型误差. 否则就说存在函数模型误差,模型误差属于系统误差和粗差性质.

观测量(参数)的先验方差经常是不能预先正确知道,从而产生定权误差,这是随机模型误差,其量级大于偶然误差.

模型误差的存在严重影响平差成果的精度,在利用现代"3S"技术所获取的测量数据构造模型时,模型误差几乎不可避免,研究模型误差理论及其平差补偿方法,已成为当前测量数据处理中一个重点研究方向.

3.2 模型误差检测模型

上述产生模型误差的原因,其结果必然会影响到参数估计的正确性,通过检验参数及参数间某种关系的正确性,可对模型误差进行检测. 为此,可建立如下检测模型,以高斯-马尔柯夫模型(1)、(2)为例.

设误差方程为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{L}. \tag{25}$$

检验的原假设建立如下条件方程:

$$\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{W}, \tag{26}$$

式中

$$R\left(\underset{nt}{\boldsymbol{A}}\right)=t, R\left(\underset{ct}{\boldsymbol{H}}\right)=c.$$

例如,网中有 u 个点,左边参数 $\boldsymbol{X}=(x_1,y_1,\cdots,x_u,y_u)$,为检验基准数据是否正确,设基准坐标已知为 $\bar{x}_1,\bar{y}_1$ 和 $\bar{x}_2,\bar{y}_2$,则检验条件方程(26)为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_1=\bar{x}_1,\hat{\boldsymbol{Y}}_1=\bar{y}_1,\hat{\boldsymbol{X}}_2=\bar{x}_2,\hat{\boldsymbol{Y}}_2=\bar{y}_2.$$

由此构成的 $\boldsymbol{H}$ 阵和 $\boldsymbol{W}$ 阵为

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{y}_1\\\bar{x}_2\\\bar{y}_2\end{bmatrix}.$$

对式(25)、式(26)平差,就是带有条件的间接平差,可得

$$\boldsymbol{\Omega}_H=\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{R}. \tag{27}$$

式中:$\boldsymbol{\Omega}_H$ 为平差的残差平方和,$\boldsymbol{\Omega}$ 为不顾及条件方程(26)的由(25)单独平差的残差平方和,$\boldsymbol{R}$ 为 2 者之差,也是一个 2 次型函数,利用 $\boldsymbol{R}$ 做统计量,通过 $\boldsymbol{F}$ 检验法来判断原假设是否成立,这是最为常用的检验模型,详细可参考文献[1,4].

3.3 模型误差模型化的补偿模型

所谓模型误差模型化,就是在了解模型误差对成果影响规律的基础上,将其量化改正函数模型或随机模型,并对模型误差显著性及其影响大小做出估计,所选模型称为误差模型化模型,平差方法常称为附加系统参数平差和附加系统权平差.

1) 附加系统参数平差

函数模型为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{Y}}-\boldsymbol{L}. \tag{28}$$

$\hat{\boldsymbol{Y}}$为模型误差,$\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{Y}}$为对函数模型的线性影响项.

例如,$\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_3$ 初判有粗差,则

$$\boldsymbol{Y}=(\varepsilon_1,\varepsilon_3)^{\mathrm{T}}.$$

此时,

$$\underset{n2}{\boldsymbol{G}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

随机模型仍为(2)式,$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$,将(28)式改写成

$$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{G})\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}\\\hat{\boldsymbol{Y}}\end{pmatrix}-\boldsymbol{L}.$$

按间接平差对$\hat{\boldsymbol{Y}}$作出估计,通过 $\boldsymbol{H}_0$: $\boldsymbol{Y}=0$,利用 3.2 的检验模型,对其显著性作出检验.

2) 附加系统权平差

函数模型仍为(1),误差方程为(3).

设 $\boldsymbol{L}$ 存在偶然误差和系统误差,分别改为 Δ 和 ε,则 $\boldsymbol{L}$ 的误差为

$$u=\Delta+\varepsilon.$$

通常系统误差 ε 亦具有随机性质,其精度也用方差表示,则有

$$\boldsymbol{D}(u)=\boldsymbol{D}(\Delta)+\boldsymbol{D}(\varepsilon). \tag{29}$$

$\boldsymbol{D}(\varepsilon)$为系统方差阵,$\boldsymbol{L}$ 的权为

$$\boldsymbol{P}_L=\varepsilon_0^2\boldsymbol{D}^{-1}(u). \tag{30}$$

在 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{V}=\min F$ 下做经典平差就是这种平差方法.

3.4 模型误差补偿的半参数模型

近十年来,数学中的半参数模型用来补偿平差模型误差取得了成绩,已成为当前热衷研究的课题. 研究结果表明,特别在系统误差平滑方面成果显著,但在其他消除系统误差源方面,此法的成果较少,值得注意.

半参数模型为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}+\hat{\boldsymbol{Y}}-\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}. \tag{31}$$

$\boldsymbol{Y}$ 为模型误差(亦可写成 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\varepsilon$),因为 $\boldsymbol{X}$ 为 $t\times1$ 向量,$\boldsymbol{Y}$ 为 $n\times1$ 向量,参数个数 $n+t$ 大于方程个数 n,为此该法给出补偿准则,其准则为

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}+\alpha\hat{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{Y}}=\min. \tag{32}$$

确定 α 和 $\boldsymbol{R}$ 是该法的难题,要结合实际问题确定.

针对模型误差视实际问题不同可灵活采用经典和现代平差理论和方法,除上述方法外还有许多方法,例如利用模型误差参数化及其先验信息用滤波和配置方法来补偿. 采用其参数的某种范数为最小的秩亏自由网平差以及参数的选取、模型的比较来寻找最优模型,从而也就消除和减弱模型误差,使达

到正确的平差模型,保证了平差成果的质量.

4 结论

Conclusion

本文综述了现代平差理论和方法从消除和减弱模型误差的角度,论述了现代平差的应用.在“3 S”及其集成的数据处理中如何灵活应用现代平差理论和方法,如何构造合理的平差模型,是当前研究的前沿课题,充分说明掌握和研究现代平差理论及其发展的重要性.

参考文献

References

[1] 陶本藻.测量数据处理的统计理论和方法[M].北京:测绘出版社,2007
TAO Benzao. Statistical theories and methods of geodesic data processing[M]. Beijing:Survey and cartography press,2007
[2] 陶本藻.自由网平差和变形分析(新版)[M].武汉:武汉测绘科技大学出版社,2001
TAO Benzao. Analysis of free net adjustment and deformation (new edition)[M]. Wuhan: Wuhan university of geodesy and geomatics technology press,2001
[3] 崔西琫,於宗涛,陶本藻,等.广义测量平差(新版)[M].武汉:武汉测绘科技大学出版社,2001
CUI Xifeng,YU Zongtao,TAO Benzao,et al. Generalized geodesic adjustment (new edition)[M]. Wuhan: Wuhan university of geodesy and geomatics technology press,2001
[4] Koch K R. Parameterschiitzung and hypothesentests in linearen modellen[M]. Bonn:Dimmler,1980

Modern adjustment model and its application

TAO Benzao[1,2]
1 School of Geodesy and Geomatics,Wuhan University,Wuhan 430079
2 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy for Ministry of Education,Wuhan 430079

Abstract There are so many methods of modern adjustment with their principles and applications different from each other. Based on Guass-Morkow model,modern adjustment models are dealt with in this paper,the formulas for the rank deficiency free net adjustment and collocation derived,and their adjustment datum and transformation methods discussed. Finally,as an application of modern adjustment in the light of model error,the application models with additional systematical parameter,additional systematical weight or semi-parameters are given.

Key words Guass-morkow model;modern adjustment;model error;systematical parameter and systematical weight