文章编号:1674-7070(2009)01-0016-03

有扭仿射李代数赋值模的某些性质

高永存[1]

摘要

设 g 为有限维复单李代数,$\hat{g}[\sigma]$ 为对应的有扭仿射李代数,$U_1,\cdots,U_r$ 为不可约 g-模,$z_1,\cdots,z_r$ 为互不相同的非零复数.利用生成函数的方法证明赋值模 $U_1(z_1)\otimes\cdots U_r(z_r)$ 为 $\hat{g}[\sigma]$-模范畴 E 中不可约模并证明其同构定理.

关键词

仿射李代数;范畴;赋值模

中图分类号 O152

文献标志码 A

0 引言

Introduction

仿射李代数赋值模是一类重要的模. Chari 和 Pressley 分别在文献[1]、[2]中证明无扭仿射李代数任何有限维不可约模必为赋值模.文献[3]中对无扭仿射李代数引入了模范畴 E 并用生成函数的方法证明当 $U_r,\cdots,U_r$ 为不可约 g-模,$z_1,\cdots,z_r$ 为互不相同的非零复数时,无扭仿射李代数 $\hat{g}$-赋值模 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 为模范畴 E 中不可约模并证明其同构定理.本文将该结果推广到有扭仿射李代数的情形.

1 概念与引理

Concepts and lemmas

设 g 为复数域上一有限维单李代数,$(\cdot,\cdot)$ 为 g 上一非退化不变双线性型.设 σ 为 g 的一阶为 N 的自同构,$\varepsilon=\exp\dfrac{2\pi i}{N}$.则

$$g=\bigoplus_{i=0}^{N-1}g_i,\quad g_i=\{a\in g\mid\sigma(a)=\varepsilon^i a\}.$$

设 $\hat{g}[\sigma]$ 为对应的有扭仿射李代数,即:

$$\hat{g}[\sigma]=\bigoplus_{i=0}^{N-1}g_i\otimes t^{\frac{i}{N}}C[t,t^{-1}]+Ck.$$

则有

$$\left[a\otimes t^{m+\frac{i}{N}},b\otimes t^{n+\frac{j}{N}}\right]=[a,b]t^{m+n+\frac{i+j}{N}}+\left(m+\frac{i}{N}\right)(a,b)\delta_{m+\frac{i}{N},-n-\frac{j}{N}}k,\quad(1)$$

其中:$a\in g_i$;$b\in g_j$;$m,n\in\mathbf{Z}$;k 为一非零中心元.

对 $a\in g_i$,定义生成函数

$$a(x)=\sum_{n\in Z}(a\otimes t^{n+\frac{i}{N}})x^{-n-\frac{i}{N}-1}\in\hat{g}[\sigma]\left[\left[x^{\frac{1}{N}},x^{-\frac{1}{N}}\right]\right].$$

线性扩张下 g 中元有生成函数.利用生成函数,式(1)等价于

$$[a(x_1),b(x_2)]=[a,b](x_2)x_1^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+$$

$$(a,b)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_1^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right]k.\quad(2)$$

对 $a\in g_i$,$n\in\mathbf{Z}$,记 $a(n)$ 为对应于元 $a\otimes t^{n+\frac{i}{N}}$ 在 $\hat{g}[\sigma]$-模上的作用.

收稿日期 2009-04-15

资助项目 天元基金(10726057);中国传媒大学基金(G08382317)

作者简介

高永存,男,理学博士,教授.主要研究方向为无限维李代数、顶点算子代数及其表示理论. gaoycjy@cuc.edu.cn

1 中国传媒大学 理学院,北京,100024

有如下引理[4]:

引理 1 设 A_1、A_2 为具有单位元的结合代数,U_1、U_2 分别为不可约 A_1、A_2 - 模. 若 $\mathrm{End}_{A_1}U_1=C$ 或 A_1 维数可数,则 $U_1\otimes U_2$ 为不可约 $A_1\otimes A_2$ - 模.

2 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 的不可约性及同构定理

Irreducibility about $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ and the isomorphism theorem

定义 1 记 E 为 $\hat{g}[\sigma]$ 的满足下述条件的模 W 构成的范畴:对 W,存在(与 W 有关)的非零多项式 $p(x)\in C[x]$,使得

$$p(x)a(x)w=0,\ a\in g,w\in W.$$

命题 1 对 E 中任何模,$\hat{g}[\sigma]$ 的中心作用为零.

证明:设 W 为 E 中 $\hat{g}[\sigma]$ - 模. 有非零多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)a(x)W=0,a\in g$.

若 $p(x)$ 为一常数,则对任何 $a\in g$,有 $a(x)=0$. 所以 $a(n)=0,a\in g,n\in\mathbf{Z}$. 由式(1)有 k 在 W 上的作用为零.

设 $p(x)$ 的次数大于 0,则 $p'(x)\neq 0$. 取 $a,b\in g_0$ 使得 $(a,b)=1$. 由式(2)有

$$0=p(x_1)p(x_2)[a(x_2),b(x_2)]=kp(x_1)p(x_2)x_1^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

而

$$\mathrm{Res}_{x_2}p(x_1)p(x_2)x_1^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=$$

$$-\mathrm{Res}_{x_2}p(x_1)p'(x_2)x_1^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=-p(x_1)p'(x_1),$$

因此 $kp(x_1)p'(x_1)=0$,所以 k 在 W 上的作用为 0.

设 U 为一 g - 模,z 为一非零复数. 取定一 $z^{\frac{1}{N}}$,令 $\hat{g}[\sigma]$ 在 U 上的作用如下:

$$a(n)u=\sum_{i=0}^{N-1}z^{n+\frac{i}{N}}(a_iu),\ a=\sum_{i=0}^{N-1}a_i\in g,$$

$$n\in\mathbf{Z},\ kU=0.$$

则 U 在上述作用下成为 $\hat{g}[\sigma]$ 的水平为 0 的模,记做 $U(z)$. 若 U 为不可约 g - 模,显然有 $U(z)$ 为不可约 $\hat{g}[\sigma]$ - 模. 进一步,设 $U_1,\cdots,U_r$ 为 g - 模,$z_2,\cdots,z_r$ 为互不相同的复数,$\hat{g}[\sigma]$ - 模的张量积 $\otimes_{k=1}^{r}U_k(z_k)$ 称为赋值模.

下面证明赋值模 $\otimes_{k=1}^{r}U_k(z_k)$ 在范畴 E 中. 设 $a\in g_i,u_k\in U_k(z_k)=U_k$,有

$$a(x)(u_1\otimes\cdots\otimes u_r)=$$

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{k=1}^{r}z_k^{n+\frac{i}{N}}x^{-n-\frac{i}{N}-1}(u_1\otimes\cdots\otimes au_k\otimes\cdots\otimes u_r)=$$

$$\sum_{k=1}^{r}x^{-1}\left(\frac{z_k}{x}\right)^{\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{z_k}{x}\right)(u_1\otimes\cdots\otimes au_k\otimes\cdots\otimes u_r).\quad(3)$$

因为 $(x-z_k)\delta\left(\frac{z_k}{x}\right)=0,k=1,\cdots,r$,有

$$(x-z_1)\cdots(x-z_r)a(x)(u_1\otimes\cdots\otimes u_r)=0.$$

因此有

命题 2 设 $U_1,\cdots,U_r$ 为不可约 g - 模,$z_1,\cdots,z_r$ 为非零复数. 则对赋值 $\hat{g}[\sigma]$ - 模 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(Z_r)$ 有

$$(x-z_1)\cdots(x-z_r)a(x)=0,\ a\in g.$$

特别地,赋值 $\hat{g}[\sigma]$ - 模 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 在范畴 E 中.

命题 3 设 $U_1,\cdots,U_r$ 为不可约 g - 模,$z_1,\cdots,z_r$ 为互不相同的非零复数,则 $\hat{g}[\sigma]$ - 赋值模 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 为不可约模.

证明:因为泛包络代数 $U(\hat{g}[\sigma])$ 为可数维代数,由引理 1 及数学归纳法 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 为不可约 $\hat{g}[\sigma]\oplus\cdots\oplus\hat{g}[\sigma]$ - 模.

设 π 为对应的表示. 对 $1\leqslant j\leqslant r$,记 ψ_j 为 $\hat{g}[\sigma]$ 到 $\hat{g}[\sigma]\oplus\cdots\oplus\hat{g}[\sigma]$ 的第 j 个分量的嵌入映射,$\psi=\psi_1+\cdots+\psi_r$. 在 $\hat{g}[\sigma][[x,x^{-1}]]$ 对 ψ 及 $\psi_1,\cdots,\psi_r$ 上作自然线性扩张.

设 $1\leqslant j\leqslant r$,令 $p_j(x)=\prod_{k\neq j}(x-z_k)/(z_j-z_k)$,则

$$p_j(x)\delta\left(\frac{z_k}{x}\right)=p_j(z_k)\delta\left(\frac{z_k}{x}\right)=\delta_{j,k}\delta\left(\frac{z_k}{x}\right),\ k=1,\cdots,r.$$

由式(3)对 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 得

$$p_j(x)\pi\psi_k(a(x))=\delta_{j,k}\pi\psi_k(a(x)),$$
$$1\leqslant j,k\leqslant r,a\in g.$$

因此在 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 上,

$$p_j(x)\pi\psi(a(x))=\pi\psi_j(a(x)),$$
$$1\leqslant j\leqslant r,a\in g.$$

所以

$$\pi\psi_j(\hat{g}[\sigma])\subset\pi\psi(\hat{g}[\sigma]),\ j=1,\cdots,r.$$

由此得

$$\pi\psi(\hat{g}[\sigma])=\pi\psi_1(\hat{g}[\sigma])+\cdots+\pi\psi_r(\hat{g}[\sigma]).$$

所以 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 为不可约 $\hat{g}[\sigma]$ - 模.

命题 4 设 $U_1,\cdots,U_r,V_1,\cdots,V_r$ 为非平凡不可约 g - 模,$z_1,\cdots,z_r,\xi_1,\cdots,\xi_s$ 为 2 组两两互不相同的非零复数. 则 $\hat{g}[\sigma]$ - 模 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 与

$V_1(\xi_1)\otimes\cdots\otimes V_s(\xi_s)$同构的充要条件为 $r=s$ 且在最多相差一个置换的意义下 $z_j=\xi_j, U_j\cong V_j$.

证明:充分性显然. 下面证明必要性. 设 U 为范畴 E 中任一 $\hat{g}[\sigma]$-模. 则有唯一的次数最低的首项系数为 1 的多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)a(x)U=0, a\in g$. 显然 E 中同构的 $\hat{g}[\sigma]$-模有相同的次数最低的首项系数为 1 的多项式. 若 $U=U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$,下面证明

$$p(x)=(x-z_1)\cdots(x-z_r).$$

首先, 由命题 1 在 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 上, 有 $p(x)a(x)=0, a\in g$. 设 $q(x)$为任一使得在 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ 上对任何 $a\in g$ 满足 $q(x)a(x)=0$ 的多项式. 令

$$p_j(x) = \prod_{k\neq j}(x-z_k)/z_j-z_k \ ,j=1,\cdots,r.$$

对 $a\in g_i, u_j\in U_j, j=1,\cdots,r$,有

$$0 = q(x)p_j(x)a(x)(u_1\otimes\cdots\otimes u_r) = q(x)x^{-1}\left(\frac{z_j}{x}\right)^{\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{z_j}{x}\right)(u_1\otimes\cdots\otimes au_j\otimes\cdots\otimes u_r) = q(z_j)x^{-1}\left(\frac{z_j}{x}\right)^{\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{z_j}{x}\right)(u_1\otimes\cdots\otimes au_j\otimes\cdots\otimes u_r).$$

因为每一 U_j 为非平凡 g-模, 有 $q(z_j)=0, j=1,\cdots,r$. 因此 $p(x)$整除 $q(x)$. 所以 $p(x)$为对应的次数最低的首项系数为 1 的多项式.

设 $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$与 $V_1(\xi_1)\otimes\cdots V_s(\xi_s)$同构且 Φ 为同构映射. 则 2 张量模具有相同的首项系数为 1 的多项式. 因此$(x-z_1)\cdots(x-z_r)=(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_s)$. 所以 $r=s$ 且在最多相差一置换的意义下 $z_j=\xi_j, j=1,\cdots,r$. 设 $z_j=\xi_j, j=1,\cdots,r$. 对 $1\leqslant j\leqslant r, a\in g_i, u_k\in U_k, v_k\in V_k, k=1,\cdots,r$,则有

$$p_j(x)a(x)(u_1\otimes\cdots u_r) = x^{-1}\left(\frac{z_j}{x}\right)^{\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{z_j}{x}\right)(u_1\otimes\cdots\otimes au_j\otimes\cdots\otimes u_r),$$

$$p_j(x)a(x)(v_1\otimes\cdots\otimes v_r) = x^{-1}\left(\frac{z_j}{x}\right)^{\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{z_j}{x}\right)(v_1\otimes\cdots\otimes av_j\otimes\cdots\otimes v_r),$$

因此

$$\begin{aligned}\Phi(u_1\otimes\cdots\otimes au_j\otimes\cdots\otimes u_r) &= \mathrm{Res}_x x^{-1}\delta\left(\frac{z_j}{x}\right)(u_1\otimes\cdots\otimes au_j\otimes\cdots\otimes u_r) = \\ \mathrm{Res}_x x^{-1}\left(\frac{z_j}{x}\right)^{-\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{z_j}{x}\right)\Phi(p_j(x)a(x)u_1\otimes\cdots\otimes u_r) &= \\ \mathrm{Res}_x x^{-1}\left(\frac{z_j}{x}\right)^{-\frac{i}{N}}\delta\left(\frac{z_j}{x}\right)p_j(x)a(x)\Phi(u_1\otimes\cdots\otimes u_r) &= \\ \sigma_j(a)\Phi(u_1\otimes\cdots\otimes u_r).\end{aligned}$$

其中:$a\in g_i; v_1\in V_1,\cdots,v_r\in V_r; \sigma_j(a)(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)=v_1\otimes\cdots\otimes av_j\otimes\cdots\otimes v_r$. 由此得 U_j 同构于 $V_j, j=1,\cdots,r$.

3 结论

Conclusion

顶点算子代数理论及生成函数的广泛使用极大地推动了李代数理论及相关学科的发展. 仿射李代数模范畴 E 及模范畴 C 的引入及利用生成函数方法对其进行的深入讨论给出了一种将不同类型仿射李代数模综合研究的可能性. 本文将非扭仿射李代数范畴 E 中赋值模的结论推广到有扭仿射李代数的情形,其结论和方法对其他有关非扭仿射李代数的结论向有扭仿射李代数延伸具有某种适用性.

参考文献

References

[1] Chari V, Pressley N. A new family of irreducible integrable modules for affine Lie algebras[J]. Math Ann, 1987, 277: 543-562

[2] Chari V. Integrable representations of affine Lie algebras[J]. Invent Math, 1986, 85: 317-335

[3] Li H S. On certain categories of modules for affine Lie algebras [J]. MathZ, 2004, 248: 635-664

[4] Li H S. Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules[J]. J Pure Appl Alg, 1996, 109: 143-195

[5] Lepowsky J, Li H S. Introduction to vertex operator algebras and their representations[C] // Progress in Math. Boston: Birkhauser, 2004: 227

On some properties of evaluation modules for twisted affine Lie algebras

GAO Yongcun[1]

1 School of Science, Communication University of China, Beijing 100024

Abstract Let be a simple finite-dimensional Lie algebra, $\hat{g}[\sigma]$ be the corresponding twisted affine Lie algebra, U_j $(j=1,\cdots r,)$ be finite-dimensional irreducible g-modules, and $z_j(j=1,\cdots r)$ be distinct nonzero complex numbers. In this paper, using the method of generating functions, we prove that the evaluation module $U_1(z_1)\otimes\cdots\otimes U_r(z_r)$ is irreducible in the category E of $\hat{g}[\sigma]^-$ and we verify the isomorphism theorem.

Key words affine Lie algebras; categories; evaluation modules