文章编号:1674-7070(2009)01-0001-15

漫谈 Lyapunov 稳定性的理论、方法和应用

廖晓昕[1]

摘要

根据个人学习研究稳定性的心得体会,首先介绍了前苏联伟大的数学力学家 Lyapunov 院士的博士论文《运动稳定性的一般问题》在全世界产生的超过 1 个世纪的巨大影响. 叙述了由该博士论文首创的几个巨大成就何以能奠定 1 门学科的基础,从而开创了 1 个新的重要的研究方向,以及留给后人很多很多研究的课题的理由. 特别地,用事实和科学断语回答了"Lyapunov 稳定性已领风骚 100 多年,余晖还几何"的问题. 明确表明 1 个观点:稳定性将是 1 个"永恒的主题",不老的科学,定将永恒地给人启迪,洞察力,智慧和思想.

关键词

Lyapunov 稳定性; V 函数; 常微分方程

中图分类号 O231.2;TP183
文献标志码 A

收稿日期 2009-04-05

作者简介

廖晓昕,男,教授,博士生导师,主要研究动力系统稳定性的理论与应用.
xiaoxin_liao@ hotmail. com

1 华中科技大学 控制科学与工程系,武汉,430070

0 引言
Introduction

欣闻《南京信息工程大学学报》创刊,特致以读者的热烈祝贺. 蒙编辑部盛情,邀笔者写 1 篇关于 Lyapunov 稳定性方面的综述文章,内心顿感惶然. 虽然,笔者学习、讲授、钻研这个理论数十年,但综述题目太大,面太广,而 Lyapunov 博士论文《运动稳定性的一般问题》[1]发表 100 多年来,追随者何止万千? 迄今为止,有关 Lyapunov 稳定性的专著、编著达上百部(仅中文著作就有 20 多部),论文逾数万篇. 在如此浩如烟海的知识海洋中,笔者的知识只不过是渺渺沧海之一粟. 加之,退休后查阅文献更是困难重重,要求写 1 篇中肯的综述,这远非笔者的能力所及. 因此,本文仅呈现少数几篇其他学者关于 Lyapunov 稳定性的综述文献[2-11],这些文献从不同时期,不同侧面反映了很多有关稳定性的动态进展信息,相信读者可以从这些文献中找到自己感兴趣的材料. 当然,也为不负盛意,笔者仍愿抛砖引玉,写一点个人学习、讲授、钻研 Lyapunov 稳定性的心得体会,与读者共勉. 本文尽量少涉及一些同行具体的工作,以免挂一漏万. 至于个人的见解片面,体会肤浅,也就不顾忌其孤陋寡闻而被贻笑大方了! 但愿读者原谅且批评指正.

1 Lyapunov 博士论文的巨大影响
Tremendous influence of Lyapunov's doctoral thesis

1892 年,伟大的俄国数学力学专家亚历山大·米哈伊维奇·Lyapunov 院士(A. M. Ляпунов),完成了他的天才博士论文《运动稳定性的一般问题》[1]. 前四五十年之内,它的影响范围还基本上局限于前苏联的数学、力学界,甚至是曲高和寡而被束之高阁,仅仅流连辗转在少数理论修养很高的数学力学专家手中,后来因得到自动控制界的青睐,反响逐渐增大且越来越强烈. 1907 年论文被译成法文,而传至美国,由 Princeton 大学于 1947 年再译成英文. 1954 年,曾获美国哈佛大学数学博士学位,后来回到中国科学院数学研究所工作的秦元勋教授将 Lyapunov 博士论文编译成中文讲义,在数学研究所举办讲习班,系统地讲解研讨这篇博士论文,Lyapunov 稳定性理论由此传入中国,开始在中国开花结果. 该讲义后以纪念 Lyapunov 诞生 100 周年的名义,于 1958 年由科学出版社(北京)出版[12].

1952 年,前苏联著名的数学家马尔金(Малки)的专著《运动稳定性》[13](有中译本)及 1955 年苏联著名控制论专家列托夫(Летов)的专著《非线性调节系统的稳定性》[14](有中译本)都在序言中提到"现代自动调节理论,不论它以何种体系出现,总是发轫于 1 个唯一牢固的基础——Lyapunov 运动稳定性学说". 这样,Lyapunov 博士论文的影响力越来越大.

1959 年,当时美国数学界的领军人物——前微分方程杂志(J Diff Equs)主编 J LaSalle[15] 教授和另 1 位著名教授 S Lefsschtz[16] 组织了 1 个讨论班,系统地学习研讨 Lyapunov 稳定性理论. 后来,J LaSalle 发现了 Lyapunov 函数与 Birkhoff 极限集之间的关系,给出了 Lyapunov 理论一个新的统一的认识,推广了 Lyapunov 直接法. 他认为研究 1 个动力系统的渐近行为,当适当选定了 Lyapunov 函数便能给出极限集位置的信息,他特别利用极限集的不变性,以不变原理为纲,用简洁的篇幅和高度概括的手段,完成了他的著名专著《动力系统的稳定性》(有中译本)[17]. 他在序言中写道:"在某种程度上说,Lyapunov 直接法在西方被重新发现是 20 世纪 50 年代中期的事,那时至少在非线性控制系统的设计中已广泛地承认了它的重要性,我对 Lyapunov 理论的理解和赏识始于 1959 年……". J LaSalle 在 20 世纪 60 年代还说过:"稳定性理论在吸引全世界数学家的注意,Lyapunov 直接法得到了工程师的广泛赞赏……稳定性正迅速变成训练控制论方面的工程师的一个标准部分."由于他在美国学术界的地位及对 Lyapunov 理论的高度赞赏,Lyapunov 稳定性在美国开始广泛而迅速地传播开来.

1992 年,在美国佛罗里达州召开首届非线性世界大会,与会代表有数千人,大会主席是印度籍美国著名数学家 V Lakshmikanthan. 他担任多家国际学术刊物的主编,但他的主要成就仍然是在于稳定性方面所做出的突出贡献. 大会设有 1 个纪念 Lyapunov 博士论文发表 100 周年的分会场,分会有众多人参加,会场上悬挂着 Lyapunov 的巨幅肖像,还有很多前苏联学者在前排就座. 有 1 个特邀的年迈的嘉宾——1 位莫斯科大学教授,大会破例允许他 1 个人用俄文宣读稳定性方面的论文. 虽然临时找的英语翻译表述得不够流畅,但论文宣读结束时,与会者因为对 Lyapunov 和他的几代学生们的成就的敬仰,依然报以热烈的掌声,以示由衷感谢 Lyapunov 对稳定性理论的所做出杰出贡献. 笔者有幸参加了这次会议[18],目睹这感人的场面,尤其是第 1 次见到 1 个学者的巨幅肖像被悬挂并为众人所由衷敬仰时,非常惊奇!

1992 年,英国的国际权威刊物控制论(Int J Control)专辟 1 期全部发表纪念 Lyapunov 博士论文发表 100 周年的论文,这些论文来自世界各地,本文仅引用 3 篇[2-4],以兹佐证.

中国的《自动化学报》1993 年发表了黄琳院士的文章《Lyapunov 的发展和历史性成就——纪念 Lyapunov 的博士论文"运动稳定性的一般理论"发表 100 周年》[5].

还有文献[8-11]都是闪耀着 Lyapunov 稳定性思想光辉的文章.

以上事实,以上文献,说明了 Lyapunov 博士论文所产生的巨大影响和不可磨灭的历史性贡献,它是属于全人类共同拥有的知识和财富.

2 Lyapunov 博士论文开创的研究方向

Research direction inaugurated by Lyapunov's doctoral thesis

Lyapunov 的博士论文之所以有如此长久而深刻的影响,有如此引人入胜的巨大魅力,简单通俗地说:因为稳定性是研究 1 个静态或运动系统在各种偶然或持续的干扰下能否保持预定的状态或理想的运动规律和方式,不致于摇摆不定,动乱不宁的问题[19-21]. 1 个不稳定的系统,小则无法正常工作;大则为人类带来灾难甚至毁灭性的恶果,例如社会动荡、金融危机、电网崩溃、飞机失事等. 因此,为确保系统的稳定性,避免不稳定事件的发生,稳定性研究当然成为非常重要的研究课题,成了关系到国计民生的一门至关重要的现实学问[6-14,17-19,22].

著名科学家拉普拉斯(Laplace)、拉格朗日(Lagrange)、马克思威尔(Maxwell)、汤姆逊(Thomson)、德特(Tail)、庞加莱(Ponicare)等早就关注且在很多场合下先后使用过稳定性概念,但却一直没有关于稳定性的严格、精确的数学定义,而没有严格的数学定义和科学概念,一般的理论框架是难以建立和巩固的,必然是各人按各人的理解,难以达成共识,难以进行深入系统的研究[19,21].

Lyapunov 在他的博士论文中首次给出运动稳定性的严格的数学定义[1],他根据分析数学中的极限论和微分方程解对初值和参数的连续依赖思想,用

极限论中的(ε-δ)语言分别给系统的平衡位置的稳定性、吸引性、渐近稳定性和不稳定性等下了准确的数学定义. 这个定义为众人所接受和公认,沿用至今. 众所周知,极限是现代分析数学(数学分析、实变函数、泛函分析、拓扑学、概率与统计等)的灵魂,如果没有 Cauchy 关于极限的严格的数学定义(即 ε-δ 语言),老是停留在“一尺之锤,日取其半,万世不竭”这种理解上,这些数学分析的大厦是无法建立起来的. 如果没有 Lyapunov 关于稳定性的科学定义,稳定性要成为一门经久不衰的学科,也是不可能的. 因此,稳定性定义的首次给出,无异于奠下了稳定性学科的第 1 块基石,应是 Lyapunov 博士论文的第 1 个巨大贡献.

Lyapunov 不仅给出稳定性的科学定义,而且首创性地给出了与之相匹配的研究稳定性的第 1 方法(级数法)和第 2 方法(直接法),特别是第 2 方法,不仅方法是独创的,而且最为适用,应用范围极广. 本文仅谈他的第 2 方法.

Lyapunov 受能量函数的启发和庞加莱(Poincare)的地形系思想的影响,但又不拘泥于能量函数,而是把它抽象推广,引进更一般的 Lyapunov 函数. 依赖这个 Lyapunov 函数的梯度和微分方程右端所定义的向量之间的内积的符号,来得到稳定与否的判断的前所未有的方法. 它最大的优越性就是不依赖微分方程解的本身,逾越了求解微分方程这个极难逾越的鸿沟. 因为哪怕是 1 个最简单的微分方程,都无法求出解的解析表达式. 如果根据解的解析表达式的形式来判定稳定与否,必然是相当狭窄的,适用范围绝对不可能很广. 下面通过 $n=2$ 来看 Lyapunov 直接法的几何思想[19].

例如:考虑二维自治系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

$$f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

要研究式(1)的平衡位置 $x=y=0$ 的稳定性,欲求出解 $x(t)=x(t,t_0,x_0,y_0)$, $y(t)=y(t,t_0,x_0,y_0)$,讨论它与平衡位置 $x=y=0$ 的渐近行为,绝大多数情况下是不可能的.

假如人们能找到 1 个正定的、可微的且具有单调性的 Lyapunov 函数 $V(x,y)$,姑且把式(1)的解 $x(t)$, $y(t)$ 代入 $V(x,y)$,得到 $V(x(t),y(t))$.

由平衡位置(0,0)的渐近稳定、稳定、不稳定的定义,形象直观地说是由解$(x(t),y(t))$“走近”原点(0,0),不远离原点(0,0),远离原点(0,0)来决定的,而此信息等价于 $V(x(t),y(t))$ 是 t 的“下降”、“不增”、“上升”函数,而后者又等价于

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} < 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} \leqslant 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} > 0,$$

进而

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} =$$

$$\operatorname{grad} V \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \begin{cases} <0, & \text{当 } \theta > \dfrac{\pi}{2}; \\ =0, & \text{当 } \theta = \dfrac{\pi}{2}; \\ >0, & \text{当 } \theta < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

其中 θ 是 V 的梯度 $\operatorname{grad} V = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}$ 与向量(f,g)的夹角. 图 1 即表示式(1)的平衡位置 $x=y=0$ 渐近稳定的几何意义.

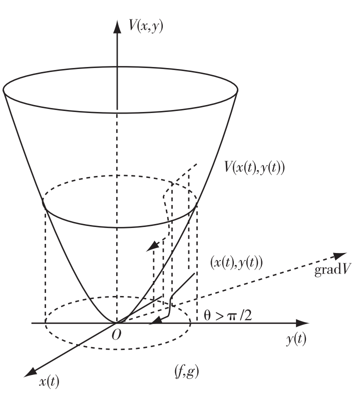

图 1 平衡位置 $x=y=0$ 渐近稳定的几何意义

Fig. 1 The geometric meaning of asymptotic stablility for the equilibrium position $x=y=0$

最后的表达式(2)已不依赖于系统的解的解析表达式了,仅依赖于 V 的梯度与向量(f,g)的夹角.

Lyapunov 根据这些原始的几何思想,上升到用分析语言,给出 1 条稳定性定理,1 条渐近稳定性定理,2 条不稳定性定理,这几条定理被誉为稳定性的基本定理,为稳定性理论奠定了牢固的基础. 这是 Lyapunov 博士论文的第 2 个巨大贡献.

第 3 大贡献就是 Lyapunov 还建立了 1 次近似理

论,该理论为实际工作者提供了研究非线性系统稳定的重要方法.

对于一般的非线性 n 维系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(0) = 0,$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{f}(\cdot) \in \boldsymbol{C}[\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n], \quad (3)$$

构造 Lyapunov 函数往往不易,如果将系统在原点线性化,其线性系统为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = J\Big|_{x=0}\boldsymbol{x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}\Bigg|_{x=0}\boldsymbol{x} := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \quad (4)$$

Lyapunov 1 次近似理论的内容是:若系统(3)在 $\boldsymbol{x}=0$ 的线性化系统(4)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值具有双曲结构,即 $\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A})\neq 0$,则式(4)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 的稳定性,蕴涵着式(3)的平衡位置具有同样的稳定性. 而后者已化为了 1 个代数问题.

在此之前,尽管达朗倍尔(D'Alambert)、拉格朗日(Lagrange)、马克思威尔(Maxwell)、魏施涅格特斯基(Вышнералский)、茹可夫斯基(Жуковсий)及斯图多(Ctodola)等都曾采用过 1 次近似方法研究稳定性,但未从数学上严格证明其合理性. 这个合理性的证明也是由 Lyapunov 来完成和完善的[1,19].

当 $\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A})=0$,即临界情况,1 次近似理论失效. Lyapunov 在他的博士论文[1]中,呕心沥血地以大量篇幅解决了第 1 临界情况(即 $\boldsymbol{A}$ 除了有 1 个 0 特征值,其它特征值均为负实部)与第 2 临界情况(即 $\boldsymbol{A}$ 有 1 对 0 实部特征值,余皆具有负实部)等极为复杂的稳定性问题. 有些学者认为 Lyapunov 博士论文中关于临界点稳定性问题的分析是最精彩、最艰难的部分[12]. 大师那种使用高超的技巧,细致入微的分析,从而彻底解决问题的独特方法,还有治学严谨的风格留给后人许多启示.

由于 Lyapunov 不仅提出了稳定性的定义,而且还提出了解决稳定性的独特的有效的方法,真所谓既授人以“鱼”,又授人以“渔”,使这个理论和方法不断的深化发展.

众所周知,Langrange 是 18 世纪伟大的数学家、物理学家,闻名早于 Lyapunov,他在对天体力学的深刻研究中提出过解的有界性、最终有界性的概念,但没有提出解决这些问题的一般方法,基本上囿于力学系统中的能量函数.

近几年,笔者等在研究混沌控制与混沌同步时[23-25],发现解的最终有界性极为重要,但去查找这方面的文献时,却寥寥无几,究其原因恐怕还是缺乏一般性方法. 最后,还是用 Lyapunov 函数法,得到了关于几个实际系统最终有界的结果[26-28],特别是关于 Lorenz 系统的全局指数吸引集的工作,不仅改进和推广了俄罗斯院士 Lenov 的工作,而且还囊括了迄今为止所有类似工作为特例,受国际学术期刊《Int J Bifar & Chas》主编邀请,在该刊发表了 1 篇关于具有光滑激励非线性函数的 Chua 氏电路的全局指数吸引集的论文[27].

可见,Lyapunov 函数法的应用,远远不限于 Lyapunov 稳定性[29],实际上在研究如 Langrange 稳定性、实用稳定性、部分变元稳定性、持续摄动下的稳定性、区间动力系统的 Robust 稳定性以及集合稳定性、周期解的存在等方面,也是最有效的工具.

3 Lyapunov 方法的发展空间

The developing space of Lyapunov methods

Lyapunov 创立的稳定性理论,特别是第 2 方法,即使在常微分方程领域内,也留给后人许多发展的空间.

3.1 Lyapunov 基本定理的推广

如何推广改进 Lyapunov 基本定理是学者们首先考虑的问题,其中最典型是 Lyapunov 杰出的学生切塔耶夫(Четаев)[30]推广了 Lyapunov 2 个不稳定性定理,减弱了条件. 然后是前苏联的著名数学家巴尔巴辛(Barabashin)[31]和克拉索夫斯基(Krasovskii)[32]推广和改进了 Lyapunov 渐近稳定性定理,将 V 函数沿解的导数 $\frac{dV}{dt}$ 负定,改为半负定,但不恒取等号. 数学家马尔金(Malikin)[13]改进 Lyapunov 渐近稳定性,甚至允许 $\frac{dV}{dt}$ 变号. 当然,最出色的还是美国数学大师 LaSalle 根据 Lyapunov 渐近稳定性和白劳霍夫(Birkhoff)极限集之间的关系,发现了不变原理,进一步推广改进了 Lyapunov 渐近稳定性定理[17].

我国也有许多学者[33-42],有的甚至是名不见经传的年轻学者,其中有些是笔者的学生[34],也从多个侧面改进和推广了 Lyapunov 基本定理. 但这些改进和推广的基本思想仍源于 Lyapunov 直接法,丝毫不损 Lyapunov 原创思想的光辉.

3.2 Lyapunov 稳定性概念的推广

如何从概念上推广稳定性,也是学者们考虑的重要课题. Lyapunov 最早研究的稳定性是研究解 $x(t,t_0,x_0)$ 的渐近行为,是视 t_0,x_0 为参数,一经选定,就认为它是不变的,但严格地说来,当考虑 $x(t,$

t_0, x_0)的渐近行为时,不能不考虑这种渐近行为关于t_0, x_0是否一致的问题. 如果考虑平衡位置x^*的稳定、渐近稳定关于x_0是一致的,就产生了等度稳定的概念; 如果这些平衡位置x^*的稳定、渐近稳定关于t_0, x_0同时是一致的,就自然提出一致稳定、一致渐近稳定的概念,同时还提出了比渐近稳定更强的指数稳定的概念. 如果允许初始扰动x_0的范围不受限制,就提出了所谓大范围(或全局)稳定的概念. 于是就这些新的概念,提出了新的类似于 Lyapunov 博士论文中的几个定理的新定理,这方面的工作,要数前苏联的波茨西德斯基(Г. Д. Персидский)[43]的工作最为出色.

3.3 Lyapunov 稳定性定理的充要条件

当数学家证明了1个定理的条件是充分的,自然要问,条件是否也是必要的? 如果是,则这个条件是完美无缺的. 人们自然要问:Lyapunov 基本定理是否可逆? 若可逆,则不仅说明 Lyapunov 直接法理论上的至善至美,应用范围也十分广泛. 沿着这个思路,后来学者进行了艰苦的努力. 除了 Lyapunov 的渐近稳定性定理不可逆,其他定理,包括推广的一致稳定、一致渐近稳定、指数稳定、全局指数稳定及不稳定定理等所有定理,都是可逆的[19]. 不过,这种可逆性的证明,即 Lyapunov 函数存在性的证明,是建立在解存在性的基础上的,并不能轻易构造出它的解析表达式来. 而满足定理条件的 Lyapunov 函数,只要找到了1个(具体构造出来)就等于找到了无穷多个. 例如,若V是满足某定理要求的 Lyapunov 函数,则CV(对于任意的$C>0$)也是满足该定理合适的 Lyapunov 函数. 任何函数$\varphi(V)$($\varphi'>0$)也是,故有无穷多个. 如果写成定理形式,系统的平衡位置有某种稳定性的充分必要条件是存在1个合适的 Lyapunov 函数V,它的导数$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$满足定理条件,值得注意的是证充分性时所用的 Lyapunov 函数与证明必要性时所找到的 Lyapunov 函数不一定也不必要是同1个 Lyapunov 函数[19-20].

3.4 构造 Lyapunov 函数的基本方法

Lyapunov 直接法的核心技巧是构造 Lyapunov 函数,虽然人们针对不同实际问题已经运用多种方法(能量函数法、类比法、梯度法、变梯度法、微分矩方法等)具体构造出满足需要的 Lyapunov 函数,并获得了广泛的承认,但构造 Lyapunov 函数的方法仍无一般规律可循,纯粹是研究工作者本人的经验和技巧. 这些方法都是试探性的,没有构造性的必然成功程序可言.

这当然是一个遗憾,但也正因为如此原则性与灵活性高度统一,反而留给了人们更加广阔的施展才华的机会,鼓励那些"勤于思考,锲而不舍,锐利进取,精益求精"的人去砂里淘金. 例如,笔者通过漫长岁月的苦苦思索,利用巧妙的 Lyapunov 函数法终于得到 Lorenz 系统平衡位置 Lyapunov 稳定性的充分必要条件,而且应用到多个混沌系统的混沌控制,较大地改进了近期的一些权威论文的结果.

所以有人说过:"谁能构造出1个巧妙的 Lyapunov 函数,谁就能得出1批好结果,谁就能发表1批好的文章". 这是1位权威学者的肺腑之言.

如何构造 Lyapunov 函数,文献[19]有1个简略的概述,介绍了3种试探凑合的原则性方法.

3.4.1 凑合 *V* 函数法

先试探构造出正定的函数V(或变号V),然后沿系统之解对V求导数$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$,看条件能否保证$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$负定、半负定. 如能,便可断定系统的平衡位置是渐近稳定(不稳定)、稳定的,否则任何结论也不能得到,只得再找其它的 Lyapunov 函数V.

目前,大部分V函数的构造,都是用这种试探凑合法.

3.4.2 倒推 *V* 函数法

先设计$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$负定(或半定),然后积分求出$V$,来看$V$是否正定. 若正定,便能断定系统平衡位置渐近稳定(稳定); 否则,也只好重新再找其它合适的V函数.

3.4.3 微分矩方法

同时构造V和$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$,看能否满足所需条件,即所谓微分矩方法. 这种方法实际问题中应用较少.

Lyapunov 泛函V的构造方法也一样,但更复杂.

3.5 Lyapunov 函数 *V* 构造实例

这里,仅就3.4.1与3.4.2介绍的2种方法,针对具体系统来谈谈构造 Lyapunov 函数V的过程[44].

3.5.1 非线性系统

形如

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{f}(0) = 0,\ \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|} \to 0,\ \text{当}\ \boldsymbol{x} \to 0$$

的非线性系统,如果不知道$\boldsymbol{A}$是否稳定,可尝试构造

$$V = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{B}\ \text{正定})$$

并沿式(1)计算

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} =$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \quad (6)$$

若 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 负定,立即可断言平系统(6)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 指数稳定[19],还可以根据 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$ 来估计 $\boldsymbol{x}=0$ 的吸引域. 这是根据 3.4.1 所述方法的思想.

如果已知 $\boldsymbol{A}$ 为 Hurwitz 矩阵,只是希望知道非线性系统在多大的区域内仍然指数稳定,则可以任意给定负定矩阵 $-\boldsymbol{C}$,作 $V=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{B}$ 为线性矩阵不等式 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{C}$ 的解. 这是根据 3.4.2 所述方法的思想.

3.5.2 分离变量的非线性系统

考虑

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{ij}(x_j). \quad (7)$$

许多自动控制系统、生物数学系统、神经网络系统、基因调控网络系统、复杂网络系统等都可以通过适当的变形化为这种系统. 故它的 Lyapunov 函数的构造具有普适性.

1) 加权和 1 次型绝对值 Lyapunov 函数[45-46]

$$V = \sum_{i=1}^{n} c_i |x_i|.$$

对 a_{ij}, f_{ij} 加一定条件,使得

$$\mathrm{D}^{+}V\Big|_{(7)} = \sum_{i=1}^{n} c_i\dot{x}_i \operatorname{sgn} x_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{ij}(x_i)\operatorname{sgn} x_i < 0.$$

在原点的邻域内(在 $\mathbf{R}^n$ 内)负定$\Rightarrow \boldsymbol{x}=0$ 渐近稳定(全局渐近稳定).

2) 如果 $f_{ii}(x_i)x_i>0$. $x_i\neq 0$,适当选取 $c_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$,作形如

$$V = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^{x_i} f_{ii}(x_i)\,\mathrm{d}x_i$$

的 Lyapunov 函数(若 $\int_0^{x_i} f_{ii}(x_i)\,\mathrm{d}x_i = +\infty$,则 V 还是径向无界的),看是否保证所选的 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 存在,使得 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(7)}$ 负定,则式(7)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 局部(全局)渐近稳定[47].

3.5.3 分离变量的时滞系统[6-7,20]

对如下分离变量的时滞系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{ij}(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}(t))). \quad (8)$$

其中 $f_{ij}(0)=0$, $g_{ij}(0)=0$,且 $0<1-\dot{\tau}_{ij}(t)\leqslant \eta_{ij}$.

1) 作加权和与积分项的 Lyapunov 泛函

$$V = \sum_{i=1}^{n} c_i |x_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{|b_{ij}|}{\eta_{ij}} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} \left| g_{ij}(x_i(\tau)) \right| \mathrm{d}\tau,$$

找到使 $\mathrm{D}^{+}V\Big|_{(8)}$ 负定的条件,便可断言式(8)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 全局渐近稳定.

2) 若 $f_{ii}(x_i)x_i > 0$, $\left[\int_0^{x_i} f_{ii}(x_i)\,\mathrm{d}x_i = +\infty\right]$,作

$$V = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^{x_i} f_i(x_i)\,\mathrm{d}x_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{|b_{ii}|}{\eta_{ii}} \int_{t-\tau_{ii}}^{t} g_{ii}^2(x_i(\tau))\,\mathrm{d}\tau,$$

找到使 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(8)}$ 负定的条件,便可断言式(8)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 局部(全局)渐近稳定. 对于数字系数系统,线性矩阵不等式往往可以帮助解决 c_i 的存在与否的问题.

掌握这些构造 Lyapunov 函数和 Lyapunov 泛函的基本技巧,就可以阅读当前的大量文献,及从事适当的研究工作了. 诚然,与各人所下功夫的深浅是有关的. “功夫不负有心人”,“书道助勤”这些古训总是有益的.

4 永恒的主题,不老的学科

An eternal theme and immortal subject

也许有人(特别是想从事稳定性学习和研究的年轻学子)会问:“Lyapunov 稳定性已领风骚 100 多年,余晖还几何? 随着科学技术的日新月异,新型学科如雨后春笋,这古老的学科会不会退出历史舞台?”

笔者认为,它不仅不会退出历史舞台,还会大放光芒. 理由有以下几条:

1) Lyapunov 在常微分方程中开创的稳定性的直接法,在不同时期,不同地区,已经或正在或将来会推广到差分方程、微分差分方程[48-49]、泛函微分方程[50]、积分微分方程、偏微分方程、偏泛函微分方程、随机微分方程、随机泛函方程[51-52]、随机偏微分方程[53]、脉冲微分方程[54-55]、偏差分方程[56-57]. 其中,还有许多未开垦的处女地,还有许多工作可做. 凡是用这些方程中的任何 1 个描述的动力系统,要研究它的动力学渐近行为(由现在、过去推知未来的动态),第 1 个要研究的性能就是稳定性. 虽然,把 Lyapunov 在常微分方程中首创的直接法推广到非常微分方程,需要克服许多实质性的困难,因为这些

非常微分方程有其自身的特点(如随机微分方程中的 Itô 微分、积分[51-53];又如偏微分方程中的平均 Lyapunov 函数等),但最基本的核心思想仍然是常微分方程中的 Lyapunov 直接法. 至今,这些系统中的稳定性理论远没有常微分方程稳定性那样完善[20,50,58-60].

2)那些根据 Lyapunov 常微分方程中的稳定性而拓广的如“有限时间的稳定性”、“实用稳定性”、“Lipschitz 稳定性”、“部分变元的稳定性”、“集合稳定性”、“双测度稳定性”等,有很多还远未完全拓广到上述其它非常微分方程. 显然,欲找到要研究的课题,实在可以说俯拾即是,但也困难重重[19].

3)Lyapunov 稳定性本质上虽然属“应用数学”范畴,但它已辐射渗透到许多学科.

如前所述,在 Lyapunov 博士论文发表前四五十年内,主要是数学力学范围内. 从 20 世纪 40 年代以后,在非线性控制科学与工程方面得到支撑. 实际问题的需要对学科的发展的巨大推动力,远远胜过数学家的召唤,是控制理论和自动化应用掀起了研究稳定性的高潮[16,61-95].

生物数学出现在 20 世纪 70 年代,由于它的非线性本质,特别是高于 3 维的 n 维系统要研究的平衡位置的稳定,生物体的共存性、持久性,使 Lyapunov 直接法又成了研究生物数学最锐利的武器[96-102].

20 世纪 80 年代以后,神经网络的产生,不仅刺激了神经计算的产生[24-26,103-126],也推动了 Lyapunov 稳定性理论的发展,纵观神经网络方面的多种刊物,关于神经网络研究的 Lyapunov 稳定性的文章不计其数. 我国也涌现了一大批神经网络 Lyapunov 稳定性方面的专家学者.

20 世纪 90 年代以后,混沌控制(混沌镇定)、混沌同步应运而生,改变了人们长期以来,认为混沌由于对初值的过度敏感,混沌是不可控,混沌不可能同步的陈腐观念,尤其混沌同步在保密通信中的潜在的应用价值,使混沌同步成为新的研究热点.

但混沌镇定、混沌同步,归根结底是在反馈控制作用下的稳定性问题. 混沌控制和混沌同步的研究再次掀起了研究稳定性高潮[28,127-131].

最近,1 个新的基因调控网络的分支产生,从已有的文献[132-133]上看到,稳定性又在大显身手.

稳定性还可以和许多其它学科交叉,与许多分支有缘. 例如,早在 1868 年开始,人们就对流体及大气运动的稳定性进行研究[134],至今已取得许多丰硕成果[135-137].

总之,无论是抽象的动力系统,还是实际的具体系统,稳定性总有它的用场,无论现代科学技术如何先进,稳定性思想总会伴随而行. 例如,文献[138]高度评价了现代控制在许多尖端领域的应用,其中,反馈控制使之稳定的理论和方法起了核心作用.

所以,古老的稳定性理论,决不会退出历史舞台,它必将与时俱进,永葆科学的青春,永放时代的光芒. 有志从事这方面研究的学者,可以毫不犹豫选它做为研究方向,不必有被淘汰之虞.

5 给人以启迪、洞察力、智慧、思想

Giving people enlightenment, insight, wisdom, and ideas

世界著名数学大师 Hirsch 和 Smale[139] 在他们的专著《常微分方程 · 动力系统·线性代数》(3 者合 1)的序言中谈到:“有人说常微分方程这一学科是求解技巧和提示的汇集,并说它所以重要,是因为它能解决物理学、工程学等方面的问题. 我们认为这一门学科可以相当统一而连贯地进行阐述,常微分方程对于其它学科领域的重要性,在于它能启发、统一并推进这些学科领域. 了解常微分方程与其它学科之间是如何联系的,对于学生及数学工作者来说,是获得洞察力和启示的一种主要源泉”.

如果将这段深刻而具有独特见解的话,应用到常微分方程中的 Lyapunov 稳定性,可以豪不夸张地说,Lyapunov 在常微分方程中首创的稳定性理论和方法,不仅给人启迪,给人以洞察力,而且给人以智慧,给人以思想,锻炼人分析问题、解决问题的能力.

稳定性也可谓惠及笔者一生. 从 1978 年科学的春天来了之后,由于工作的需要,也是因个人的兴趣,基本上就在稳定性这个领域内耕耘播种,收获几十年,完成了多项国际国内科研任务,乃至终身无恨无悔. 这里,笔者想结合自己的体会谈谈 Lyapunov 稳定性从发现能力、思维方法、解决问题给予的启迪和洞察力的几个实例.

例 1 1978 年,前苏联学者 Khartionv[140] 证明了 1 个区间多项式(无穷多个)

$$f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

(其中,$a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$,区间端点$\underline{a}_i$, $\overline{a}_i$ 已知)与由端点系数组成的 4 个多项式的 Hurwitz 的稳定性等价,被人们誉为惊人的结果,立即在全球掀起区间动力系

统 Robust 稳定性的高潮[141]. 但后人不断用反例否定了关于区间矩阵(Hurwitz 稳定性,Schur 稳定性)类似的猜想,区间多项式的 Schur 稳定也无此漂亮结果.

于是,1 个尖锐的问题必然被提出:具有无穷多个的动力系统(区间系统)能否与其中有限个的稳定性等价?这正是 Robust 稳定性研究的核心价值所在.

为了了解问题症结所在,笔者认真研读了文献[142-143],方知他们是把区间分成若干小区间,然后证明大区间的稳定性、可控性、可观性与每个小区间同类性质等价. 便立即发现 2 个问题:

1) 小区间虽小,仍有无穷多个点. 从实变函数可知,大小区间的“势”相等,故仍未回答无限多个与有限多个该性质等价的问题.

2) 如何分解?没有明确定义. 易举每个小区间多项式稳定而大区间多项式不然的反例.

是 Lyapunov 1 次近似理论和临界点的稳定性理论以及泛函分析中的有限覆盖原理给了笔者启迪.

该理论的大意是将 1 个自治非线性系统在平衡点处线性化. 若线性化系统的系数矩阵的特征值具有双曲结构(即不具 0 实部特征值),则线性系统的稳定性完全决定了非线性系统的同样的稳定性;反之,临界情况(有 0 实部特征值)则不然. 用拓扑语言说,具有双曲结构的系统是粗系统,它有一定的 Robust 度,只要非线性项的扰动在它的允许扰动范围内,保持稳定性不变.

受这些思想的启迪,笔者等立即写了 1 篇注记性的文章[144],明确给出了完全分解(或概率分解)的定义,同时利用矩阵的 Hurwitz 稳定性、Schur 稳定性、可观性、可控性的粗性质和泛函分析中的有限覆盖定理,肯定地回答了“1 个闭区间矩阵(无穷多个矩阵)的稳定性、可控性、可观性等价于该闭区间矩阵中的有限个矩阵的相应性质”,并给出了如何寻找这有限个矩阵的具体计算方法. 文章被中国《自动化学报》以极快速度用中英文同时发表.

可见,Lyapunov 方法授人以“渔”的作用. 当然,其他基础知识也很重要.

例 2 判定多项式. 线性控制系统稳定的几何方法(或称为频率方法)很受实际工作者欢迎,也有明显的物理意义. 但因为要做自变量取值为$(-\infty, +\infty)$或$(0, +\infty)$的频率特性曲线,实际上是困难的,这又是 1 个无限与有限的矛盾.

众所周知,1 个实系数多项式的根是共轭的(即关于实轴对称)同时是有界的(界可以通过系数表示). 传统的频率判据都没有很好地利用这些优美的性质.

笔者等通过对前苏联学者米哈伊诺夫[19]的几何判据的讲授发现,他的取值区间仍然是$(0, +\infty)$,证明虽然复杂,但严谨,给人启发. 于是,利用实系数多项式的根的 2 个极好性质,创立了 1 个新的几何方法[145-146]. 只要在 1 个有限的 1/4 的圆周上计算该多项式的幅角的变化,就立即可断言该多项式根的分布信息. 方法初等,计算量小,论证严谨. 首先化无限区间$(-\infty, +\infty)$为有限$(0,\rho)$,$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 文章由中科院院士钱伟长先生推荐在他任主编的《应用数学和力学》上发表. 之后,受到美国《数学评论》好评. 特别有趣的是美国《数学评论》编辑来特函要求作者核实原创作者姓名,使之收藏在他们的原创作者的档案内,以备查证.

后来,笔者的一位硕士研究生[91-92]又利用这种思想改进了 Popov 频率判据中要验证某不等式在$(-\infty, +\infty)$成立为只须验证它在$(0,\rho)$成立,ρ 为具体常数.

例 3 当 Hopfield 神经网络[103-109]和细胞神经网络刚问世时,人们对神经网络即将开辟神经计算的新纪元,有着广泛的应用前景都深信无疑,但对他们的稳定性,由于没有明确定义,各人按各人的理解,难以达成共识,对他们所构造的计算能量函数,既不明确他的物理意义和数学上如同 Lyapunov 函数那样有正定、负定的严格定义,又不知这种所谓的计算能量函数是如何构造出来的. 其实,这些神经网络创始人的初衷,不是要研究已知平衡位置的稳定性,而是重在如何能寻找到这些平衡位置. 通过用电子电路可以实现的微分方程的流来自动地求解非线性代数或超越方程,这才是神经网络引人入胜之处. 因此,必须给出神经网络稳定性的严格数学定义,以及严格的数学论证方法[24-25,105-107]. 现在神经网络稳定性方面的文献[103-108,115-119],大部分都是 Lyapunov 意义下的稳定性,最初的神经网络的稳定性文献已经不多了. 可见,Lyapunov 稳定性仍然给人以洞察力,仍然以扎实的理论基础而稳步前进.

最近几年,受到国际学术界一些朋友的邀请,使笔者有机会接触神经网络的研究,感到 Langrange 意义下的稳定性的重要意义几乎是神经网络的普适性质,以及赖以进行神经计算的前提,也是产生混沌奇

异吸引子的先决条件和计算 Lyapunov 指数以及用线性反馈来实现系统的镇定和跟踪的前提,但至今没有查到有关 Langrange 指数稳定性方面的文献. 于是仍然借助于构造 Lyapunov 函数的经验和技巧,研究了一般时滞神经网络下的稳定性[28,147],它们受到国际同行朋友的关照和引用,且沿着笔者等的提法,已有这方面的论文先后发表[148].

例 4 经典控制只研究定常线性系统的稳定性,它可以化为特征值问题,在计算机高速发展的今天,可以轻而易举地彻底解决. 而现代的非线性控制则不然,Aizerman 猜想的被否定,说明类比于线性系统的代数方法失效. 因此,只有借助于 Lyapunov 方法. 正是这种实际的需要把 Lyapunov 稳定性从曲高和寡的境地推向广阔应用前景的高潮,Lyapunov 稳定性渗透到其它学科,也同时沟通了许多知识之间的内在联系,如力学、自动控制、数学,特别是数学知识之内在联系如复变函数、矩阵论、数学分析、正实函数论等.

1944 年,前苏联著名的控制论专家 Lurie 在离心调速器工作原理基础上,从飞机自动驾驶仪中的研制过程中,提出了如下不确定非线性微分方程[79-80,95]族(无穷多个微分方程)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{f}(\sigma), \\ \sigma = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{9}$$

的平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 的同时全局稳定性问题. 其中,反馈函数

$$\boldsymbol{f}(\cdot) \in F := \left\{\boldsymbol{f}(\cdot) \;\middle|\; \begin{matrix}\boldsymbol{f}(0)=0, \sigma\boldsymbol{f}(\sigma)>0, \sigma\neq 0, \\ \boldsymbol{f}(\cdot)\ \text{连续}\end{matrix}\right\}$$

是不确定的未知函数,仅已知它属于 F 类函数. 这里,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$.

著名的 Lurie 问题[16]为:问对于任意给定的 $\boldsymbol{f}(\cdot)$,式(9)的平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 全局稳定的充要条件是什么? 即无穷多个控制系统的平衡位置同时全局稳定的(也称为绝对稳定的)充要条件是什么?

对此问题,前苏联学者 Lurie[79-80]、Malikin[13]、Letov[81]等曾经得到了结论:若存在正定的 Lyapunov 函数

$$V = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \beta\int_0^{\sigma}\boldsymbol{f}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

使得 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$,则是 $\boldsymbol{x}=0$ 绝对稳定的的充分条件. 该结论是正确的,但对于如何验证 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$,他们曾想当然地认为该条件等价于线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} & \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}) \\ \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\end{pmatrix}<0$$

($-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$,当 $\boldsymbol{A}$ 稳定)关于 $\boldsymbol{P}$ 有正定解. 通过相当长的时间,美国、前苏联及我国的一些学者[82-83]发现此线性矩阵不等式永远无解,从而条件是空的.

究竟什么条件能保证 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$? 人们一直在围绕此问题研究. 还是 Lurie 创立了 S 方法,线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} & \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\tau\boldsymbol{c}) \\ \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\tau\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\end{pmatrix}<0$$

(其中,$\tau>0$)才有解,它是 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$ 的充分条件而非必要条件. 我国学者[82-83]得到了 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$ 的充要条件.

后来,罗马尼亚的 Popov 用频率法也得到了充分条件[93-94],它与 Lurie 的 S 方法等价[84].

在学习前人一系列工作的基础上[79-84,93-94],笔者考虑如何能得到 Lurie 问题的解答,即充要条件是什么样的问题.

前人曾误视反馈变量 σ 为独立于状态变量 σ 而犯错误,其实,反馈变量 σ 是状态变量的线性组合,不是独立的. 可以通过满秩线性变换化反馈变量 σ 为新的状态变量而绕过其屡犯错误的暗礁. 而此满秩线性变换是构造性的,是系统本身所具备的.

起初,笔者也曾想用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$ 的有限形式来表示系统(9)的绝对稳定性的充要条件,经分析发现此路绝无可能走通,不得不放弃这种徒劳. 已有的充分条件都不是构造性的而是存在性结果,都不能用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$ 的有限形式表示. 此问题提出已有近半个世纪,有多少专家在研究,如能用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$ 的有限形式解答,早就不会等到今天. 由于 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 不确定,实际上是无穷多个微分方程的平衡位置同时全局渐近稳定,即使 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 为一个线性不确定函数,都无法用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$ 的有线形式表现系统(9)的全局稳定性,何况 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 为非线性函数. 数学中这类无限的东西,不能用有限的形式表现的情况实在太多了.

1972 年,美国著名数学家 Burtor 尖锐指出[69]:"到目前为止,Lurie 问题的主要进展还长期停留在

研究正定的 2 次型加积分的 V 函数,使$\frac{dV}{dt}$负定的充要条件是什么,这种研究方法值得反思,因为它对于解决 Lurie 问题不是必要的,至今未能触及 Lurie 问题本身”. 这段话提醒研究此类问题的专家应另辟蹊径.

其实前人也得到过一些绝对稳定的必要条件[84],但为什么这些必要条件没有被很好地利用来研究充要条件? 为什么不在必要条件的基础上加条件从而获得充要条件呢?

受 Lyapunov 1 次近似理论的启迪,也受力学系统中部分变元稳定性的影响,特别是受生活中灵敏反馈控制的感召(如具有灵敏反馈的走钢丝的杂技演员的表演,关键是反馈控制要非常敏捷,稍稍有误,就不能稳定),笔者感到变成了新的 1 个状态变量的反馈变量 σ 的稳定与否是问题的关键,于是,提出了 Lurie 控制系统绝对稳定的充要条件. 由此充要条件又派生出一些新的充分条件,特别提出了改进的 S 方法,均包含了 Lurie 充分条件为特例. 文章先后在瑞典、法国的国际会议、世界大会上宣读后才珊珊在国内权威刊物上发表[86-87]. 之后,受到美国《数学评论》、前苏联《数学文摘》以及法国《数学摘要》的好评,同时,荷兰著名国际出版社 Kulwer 和中国科学出版社联合邀请笔者写 1 本“Absolute Stability of Nonlinear Control System”的书,并于 1993 年出版了该英文专著[90]. 在此基础上,笔者又得到时滞 Lurie 系统、区间 Lurie 系统绝对稳定的充要条件[149-151]. 2008 年,Springer 再版这本书[6],受到了国际同行的广泛关注.

以上这些工作,都是源于 Lyapunov 稳定性思想,当然也是对它的发展和推进.

笔者还有幸在培养博士、硕士研究生的教学生涯中教学相长,且看到一些有才华的优秀学生,他们的科研生涯,都是从稳定性起步的. 后来,有的继续深入稳定性的研究,做出了突出贡献,但多数已转到其它分支,有的从事自动控制理论与工程的研究,有的从事电信电子技术的教研,有的从事电力系统的设计与开发,有的从事计算机软件的设计,有的从事数学与医学的结合研究,有的从事经济学[152]、管理学的教学与科研等,他们都成了该领域的学术带头人. 无论在美国、英国、加拿大或在国内,他们又培养了很多优秀人才,为相关学科的发展做出了贡献.

因为稳定性的研究入门并不难,不同水平的人,都能找到难易不同的题目,做出不同层次的研究成果,又有实际背景的支持,容易鼓舞信心,得到科研能力的训练. 所以,Lyapunov 稳定性研究队伍也越来越壮大,国际一些权威刊物上也屡见中国学者,特别是中青年学者发表的稳定性研究论文、专著[153-157],Lyapunov 稳定性理论在我国得以延续和发展,实在是可喜可贺!

6 结束语

Concluding remarks

本文试图根据笔者的见闻和研究体会,揣摩 Lyapunov 稳定性理论的产生、完善过程中的原始思想与方法;阐述 Lyapunov 稳定性理论 100 多年来经久不衰,并给人以启迪、洞察力、智慧和思想的史实;展示 Lyapunov 稳定性理论应用于部分学科形成的主要成果;展望 Lyapunov 稳定性理论与应用进一步推广、发展的广阔前景;说明无论是从事动力系统理论研究的学者,还是从事具体应用设计与开发的实际工作者都可以从 Lyapunov 稳定性理论中获益的缘由. 但由于 Lyapunov 稳定性理论与应用发展至今,专著、文献汗牛充栋,加上笔者退休后交流减少,文献关注度不够,撰稿时间又甚为仓促,故,难免顾及不周,请读者海涵.

参考文献

References

[1] Lyapunov A M. The general problem of stability of motions[D]. Moscow: Fizmatgiz, 1950 (in Russian)

[2] Smirron V I. Biography of A M Lyapunov[J]. Int J Control, 1992, 55(3): 775-784

[3] Guest editorial. Lyapunov centenary issue[J]. Int J Control, 1992, 55(3): 521-527

[4] Barrett J F. Bibliography of A M Lyapunov's work[J]. Int J Control, 1992, 55(3): 785-790

[5] 黄琳. Lyapunov 方法的发展与历史性成就——纪念 Lyapunov 博士论文“运动稳定性的一般问题”发表一百周年[J]. 自动化学报, 1993, 19(5): 587-593
HUANG Lin. The development and historic achievement of Lyapunov's method[J]. Acta automatica sinica, 1993, 19(5): 587-593

[6] LIAO Xiaoxin, YU Pei. Theory and application of absolute stability of nonlinear control system[M]. Springer, 2008

[7] LIAO Xiaoxin, WANG Liqin, YU Pei. Stability of dynamical systems[M]. Elsevier, 2007

[8] 刘永清. 大型动力系统稳定性理论和应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1992
LIU Yongqing. Theory and application of large scale dynamic systems[M]. Guangzhou: Press of south China university of technology, 1992

[9] 舒仲周, 王照林. 运动稳定性的研究进展和趋势[J]. 力学进展, 1993(3): 424-431

SHU Zhongzhou,WANG Zhaolin. Advances and trends of studies on stability of motion[J]. Advances in mechanics,1993(3):424-431
[10] 舒仲周.我国运动稳定性研究的新进展[J].力学进展,1988,18(1):1-12
SHU Zhongzhou. Researches on stability of motion in China[J]. Advances in mechanics,1988,18(1):1-12
[11] 朱思铭.近年来国内常微分方程稳定性理论的发展[C]//全国常微分方程与控制学术讨论会.武汉,1987.11
ZHU Siming. Recent advances in ordinary differential equation stability in China[C]//National symposium on ordinary differential equation and control. Wuhan,1987.11
[12] 秦元勋.运动稳定性的一般问题讲义:纪念 Lyapunov 诞生100 周年[M].北京:科学出版社,1958
QIN Yuanxun. Lecture notes on the general problems of motion stability[M]. Beijing:Science Press,1958
[13] Malkin N G. Theory of stability of motion[M]. Moscow:Nauka,1966(in Russian)
[14] Letov A M. Stability of nonlinear regularized system:Gostechizdat or fizmatgiz[M]. Moscow,1962(in Russian)
[15] Lasalle J,Lesfchtg S. Stability by Lyapunov's direct method with applications[M]. New York:Academic Press,1961
[16] Lefsche S. Stability of nonlinear control system[M]. New York:Academic Press,1965
[17] LaSalle J P.动力系统的稳定性[M].廖晓昕,李立鹏,邹应,译.武汉:华中理工大学出版社,1988
LaSalle J P. The stability of dynamical systems[M]. Ser. Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics,1976
[18] LIAO Xiaoxin. Stability of general ecological systems and neural networks systems[C]//Proc of the first world congress of nonlinear analysis. Berlin New York:Wotter de Gruyter. Walter de Gruyter Berlin. New York,1996:1325-1335
[19] 廖晓昕.稳定性的数学理论和应用[M].武汉:华中师范大学出版社,2001
LIAO Xiaoxin. Mathematical theory of stability and its application [M]. Wuhan:Central China Normal University Press,2001
[20] 廖晓昕.动力系统稳定性理论和应用[M].北京:国防工业出版社,2000
LIAO Xiaoxin. Theory and application of stability for dynamical systems[M]. Beijing:National Defence Industry Press,2000
[21] 黄琳.稳定性与鲁棒性的理论基础[M].北京:科学出版社,2003
HUANG Lin. Theoretical basis of stability and robustness[M]. Beijing:Science Press,2004
[22] 秦元勋,刘永清,王联.带有时滞的动力系统的运动稳定性[M].北京:科学出版社,1989
QIN Yuanxun,LIU Yongqing,WANG Lian. Motion stability of dynamical system with delays[M]. Beijing:Science Press,1989
[23] LIAO Xiaoxin,CHEN Guanrong. Chaos synchronization of general Lurie system via time-delay feedback control[J]. Int J Bifur & Chaos,2003,13(1):207-213
[24] 廖晓昕.细胞神经网络的数学理论(Ⅰ)[J].中国科学 A,1994,24(9):902-910
LIAO Xiaoxin. Mathematical theory of cellular neural networks (Ⅰ)[J]. Science in China A,1994,24(9):902- 910
[25] 廖晓昕.细胞神经网络的数学理论(Ⅱ)[J].中国科学 A,1994,24(10):1037-1046
LIAO Xiaoxin. Mathematical theory of cellular neural networks (Ⅱ)[J]. Science in China A,1994,24(10):1037-1046
[26] LIAO Xiaoxin,FU Yuli,XIE Shengli. On the new results of global attractive set and positive invariant set of the application to chaos control and synchronization[J]. Science in China F. Information Science,2005,48(3):304-321
[27] LIAO Xiaoxin,YU Pei,XIE Shengli,et al. Study on the global property of smooth Chua's system[J]. Int J Bifur & Chaos,2006,16(10):1-27
[28] LIAO Xiaoxin,LUO Qi,ZENG Zhigang,et al. Global exponential stability in Lagrange sense for recurrent neural networks with time delays[J]. Nonlinear Analysis:Real World and Application,2008,9:1535-1557
[29] MA Shiwang,WU Jianhong. A small twist theorem and boundedness of solutions for semilinear duffing equations at resonance [J]. Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2007,67(1):200-237
[30] Четаев Ц Т. Устойццвость Пвижения[M]. Науиа,1965
Chetaev N G. Stability of motion[M]. Moscow,1965
[31] Barabashin E A. Lyapunov's functions[M]. Moscow:Nauka,1970(in Russian)
[32] Krasovskii N N. Certain problem of stability theory of motion [M]. Moscow:Fizmatgiz,1959(in Russian)
[33] 赖定文.关于稳定性定理的一点补充[J].科学通报,1984,19(2):1161-1163
LAI Dingwen. Supplement to the stability theorem[J]. Chinese Science Bulletin,1984,19(2):1161-1163
[34] 刘自成.两个稳定性定理的改进[J].华中师范大学学报:微分方程专辑,1986:125-137
LIU Zicheng. Improvement to two stability theorems[J]. Journal of Central China Normal University:Special Issue of Ordinary Differential Equation,1986:125-137
[35] 冯滨鲁.Lyapunov 稳定性定理的推广[J].系统科学与数学,1998,12(2):211-214
FENG Binlu. Generalization of Lyapunov's stability theorem[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences,1998,12(2):211-214
[36] 王学蕾,黄焕河.关于部分变元稳定性理论基本定理的推广[J].洛阳大学学报,2002,15(4):4-7
WANG Xuelei,HUANG Huanghe. On the popularization of the basic principle of certain variable stabilization[J]. Journal of Luoyang University,2002,15(4):4-7
[37] 孟新柱,孙秋霞.微分系统持续摄动下部分变元的强稳定性[J].烟台师范学院学报,2001,17(4):249-251
MENG Xinzhu,SUN Qiuxia. Strong stability of differential equations under continuous perturbation on partial variables[J]. Yantai Teachers University Journal,2001,17(4):249-251
[38] 徐道义.稳定性理论中的几个基本定理的推广[J].应用数学,1992,5(2):135-137
XU Daoyi. Generalization of several fundamental theorems in the theory of stability[J]. Mathematica Applicata,1992,5(2):135-137
[39] 斯力更.关于 Lipschitz 稳定性理论注记(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)[J].内蒙古师大学学报,1994,(4):1-5;1995,(2):1-5;1996,(3):1-6
SI Ligeng. Lipschitz stability and Liapunov stability(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University,1994,(4):1-5;1995,(2):1-5;1996,(3):1-6
[40] GUO Y X. A new spectral inequality and its applications to partial stability of linear time-varying systems[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2007,20(4):814- 819
[41] 王天成.时变动力系统的不稳定性[J].烟台师范学院学报,1997,13(2):87-89
WANG Tiancheng. Instability of general time-varying dynamic systems[J]. Yantai Teachers University Journal,1997,13(2):87-89
[42] 王林山.关于稳定性的 Lyapunov 定理的推广[J].数学的实践与认识,1987,17(2):72-74

WANG Linshan. The popularization of Lyapunov theorems about stability[J]. Mathematics in Practice and Theory, 1987, 17(2): 72-74

[43] Персидский К Г К. Теории устойчивости решеиий Дифференциальных. Уравнений УМН, 1946, 1 (5/6): 250-255

Persidskii K G. On the stability theory of solution to differential equations[J]. USP Mat Nauk, 1946, 1(5/6): 250-255

[44] 钱吉林, 廖晓昕. 矩阵方程的新解法及应用[J]. 华中师范大学学报, 1987, 21(2): 159-165

QIAN Jilin, LIAO Xiaoxin. New solution method of matrix equation and its applications[J]. Journal of Central China Normal University, 1987, 21(2): 159-165

[45] Reissing R, Sansone G, Cont R. Nonlinear differential equations of higher order [M]. Noordhoff Lnternational Publishing Ledger, 1974

[46] 李森林. $\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} f_{sj}(x_j)\ (s = 1,2,\cdots,n)$ 的解的全局稳定性及应用(Ⅰ)(Ⅱ)[J]. 数学通报, 1964, (3): 353-366; (4): 571-577

LI Senlin. Global stability and application of the solution of $\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} f_{sj}(x_j)\ (s = 1,2,\cdots,n)$ (Ⅰ)(Ⅱ)[J]. Bulletin of Sciences Mathematics, 1964, (3): 353-366; (4): 571-577

[47] 廖晓昕. 高维非线性自治系统的全局稳定性和不稳定性[J]. 中国科学 A: 数学专辑(Ⅰ), 1979(增刊1): 124-134

LIAO Xiaoxin. On global stability and instability of solutions to the nonlinear autonomous system of higher dimension[J]. Science in China A, 1979(Sup 1): 124-134

[48] XU Bugong. Stability criteria for linear systems with uncertain delays[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 284(2): 455-470

[49] ZHANG Chengjian, NIU Yuanling. The stability relation between ordinary and delay-integro-differential equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(1/2): 13-19

[50] 李森林, 温立志. 泛函微分方程[M]. 长沙: 湖南科学科技出版社, 1987

LI senlin, WEN Lizhi. Functional differential equations[M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 1987

[51] LUO Qi, DENG Feiqi, MAO Xuerong, et al. Theory and application of stability for stochastic reaction diffusion systems[J]. Science in China: F, 2008, 51(2): 158-170

[52] DENG Feiqi, LUO Qi, MAO Xuerong, et al. Noise suppresses or expresses exponential growth[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(3): 262-270

[53] LUO Qi, DENG Feiqi, BAO Jundong, et al. Stabilization of stochastic Hopfield neural network with distributed parameters[J]. Science in China: F, 2004, 47(6): 752 -762

[54] HU Junhao, LIU Xinzhi. Existence results of second- order impulsive neutral functional integro differential inclusions with unbounded delay in Banach spaces[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(3/4): 516-526

[55] ZHAO Xinquan. Global exponential stability of discrete- time recurrent neural networks with impulses[C]//Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, In Press, Corrected Proof, Available online 2 July 2009

[56] GUAN Zhihong, WEN Xiangcai, LIU Yongqing. Variation of the parameters formula and the problem of BIBO for singular measure differential systems with impulse effect[J]. Applied Mathematics and Computation, 1994, 60(2-3): 153-169

[57] XIE Shengli, TIAN Chuanjun, XIE Zhendong. Oscillation of a class of partial difference equations with unbounded delay[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2001, 42(3/4/5): 529-541

[58] 斯力更, 章毅. 具有变量时滞的非线性中立型系统的稳定性[J]. 科学通报, 1980, 20: 1527-1530

SI Ligeng, ZHANG Yi. Stability of nonlinear neutral type system with variable delay[J]. Chinese Science Bulletin, 1980, 20: 1527-1530

[59] GUO L, WANG H. Applying constrained nonlinear generalized PI strategy to PDF tracking control through square root b-spline models[J]. Int J Control, 2004, 77: 1481-1492

[60] ZHOU Zhengxin. The structure of reflective function of polynomial differential systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(1/2): 391-398

[61] 王国荣. 几类控制系统的稳定性[J]. 湖南大学学报, 1981(3): 82-93

WANG Guorong. Absolute stability of the direct control system [J]. Journal of Hunan University, 1981(3): 82-93

[62] XIAO Dongmei, DENG Zongqi. Absolute stability of time varying nonlinear control systems[J]. 数学物理学报, 1999, 19(4): 442-448

XIAO Dongmei, DENG Zongqi. Absolute stability of time varying nonlinear control systems[J]. Acta Mathematica Scientia, 1999, 19(4): 442-448

[63] 甘作新, 葛渭高. 一般 Lurie 离散型控制系统的绝对稳定性[J]. 北京理工大学学报, 1999, 19(3): 205-219

GAN Zuoxin, GE Weigao. Absolute stability of general Lurie type of discrete control systems[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 1999, 19(3): 205-219

[64] 甘作新, 韩京清. 多非线性一般 Lurie 离散系统的绝对稳定性[J]. 应用数学, 2001. 14(4): 10-12

GAN Zuoxin, HAN Jingqing. Absolute stability of general Lurie discrete control systems with multiple non-linearities[J]. Mathematica Applicata, 1999, 19(4): 442- 448

[65] 廖福成. 关于"论 Lurie 间接控制系统绝对稳定性的重要条件"的一点注记[J]. 应用数学, 1996(增刊1): 102-104

LIAO Fucheng. A note on "discussing on the important condition for absolute stability of Lurie indirect control system"[J]. Mathematica Applicata, 1996 (S1): 102-104

[66] 廖福成. 一类间接控制系统的绝对稳定性[J]. 内蒙古大学学报, 1993, 24(3): 235-241

LIAO Fucheng. On the absolute stability of a class of indirect control systems[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Neimengol, 1993, 24(3): 235-241

[67] 张继业. 离散 Lurie 型控制系统绝对稳定性的充要条件[J]. 应用数学与力学, 1995, 16(10): 927-932

ZHANG Jiye. Necessary and sufficient conditions for the absolute stability of discrete type Lurie control system[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1995, 16(10): 927- 932

[68] 廖晓昕, 罗海庚, 赵新泉, 等. 具有循环反馈的 Lurie 控制系统绝对稳定性及在混沌同步中的应用[J]. 自然科学进展, 2006, 16(5): 542-554

LIAO Xiaoxin, LUO Haigen, ZHAO Xinquan, et al. Absolute stability of Lurie control system with circulation feedback and its application in chaos synchronization[J]. Progress in Natural Science, 2006, 16(5): 542-554

[69] Burton T A . A differential equation of Lurie type[J]. Proc Am Math Soc, 1972, 36, 491-496

[70] 年晓红. Lurie 控制系统绝对稳定的时滞相关条件[J]. 自动化学报, 1999, 25(4): 564-566

NIAN Xiaohong. Delay dependent condition for absoluta stability of Lurie type control systems[J]. J Acta Autimat Sionca, 1999, 25: 564-566

[71] XU S, J Lam, D W C Ho, ZOU Y. Novel global asymptotic stabili-

ty criteria for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp Briefs, 2005, 52: 349-353

[72] WANG Baoxian, JIAN Jigui, GUO Chuande. Global exponential stability of a class of BAM networks with time-varying delays and continuously distributed delays[J]. Neurocomputing, 2008, 71 (4/5/6): 495-501

[73] XU Shengyuan, CHU Yuming, LU Junwei. New results on global exponential stability of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. Physics Letters A, 2006, 352(4/5): 371-379

[74] LONG Fei, FEI Shumin. Neural networks stabilization and disturbance attenuation for nonlinear switched impulsive systems [J]. Neurocomputing, 2008, 71(7/8/9): 1741-1747

[75] SUN Changyin, FENG Chunbo. Exponential periodicity and stability of delayed neural networks[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2004, 66(12): 469-478

[76] 廖晓昕,吴卫华.线性动力系统部分变元稳定的充要条件[J].科学通报,1989,33(15):1195-1996
LIAO Xiaoxin, WU Weihua. A necessary and sufficient condition for stability with respect to partial variables of linear dynamical systems [J]. Chinese Science Bulletin, 1989, 33 (15): 1195-1996

[77] LIU Biyu, GUI Weihua, WU Min. Passivity of interconnected control systems with time-delays based on decentralized control [J]. Control Theory & Applications (China), 2005, 22 (1): 52-56

[78] Румянцев В В, Озиранер А С. Устойчивость и стабилизация то отношению к части переиенных Москва[M]. Наука, 1987
Rumyantsev V V, Orizaner A S. Stability and stabilization of motion with respect to part of variables[M]. Nauka, 1987

[79] Лурьс А И, Постников В Н. К Теории устойчивости релулируемых систем[J]. ЛММ. 1944, 8(3): 246-248
Lurie A I, Bocticof V L. Stability theory of control system[J]. Prikl Mat Meh, 1944, 8(3): 246-248

[80] Лурьс А И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования[M]. Гостехиздат, 1951
Lurie A I. On some nonlinear problems in the theory of automatic control[M]. London: H M Stationary Office, 1951 (English translation)

[81] Летов А М. устойчивость нелинейнцх регулируемых систем Гостсхлзуаг[M].李惠.译.北京:科学出版社,1959
Letov A M. Stability of nonlinear control[M]. 2nd. Princeton: Princeton University Press, 1959 (English translation)

[82] 赵素霞.关于直接调节系统的绝对稳定性[J].数学通报,1979(4):404-419
ZHAO Suxia. On the absolute stability of direct control system [J]. Acta Mathematica Sinica, 1979(4): 404-419

[83] 朱思铭.直接控制系统的绝对稳定性准则[J].中山大学学报,1979(3):20-28
ZHU Siming. On the criterion of absolute stability for direct control systems[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 1979(3): 20-28

[84] 谢惠民.绝对稳定性理论和应用[M].北京:科学出版社,1986
XIE Huimin. Theory of absolute stability and its application [M]. Beijing: Science Press, 1986

[85] 李森林.几类直接控制系统绝对稳定性的充分及必要条件[J].应用数学学报,1983(4):458-467
LI Senlin. The necessary and sufficient conditions for the absolute stability of several classes of direct control systems[J]. Acta Mathematica Sinica, 1983(4): 458-467

[86] LIAO Xiaoxin. Necessary and sufficient conditions for absolute stability of Lurie indirect control systems[J]. Science in China: A, 1989, 32(9): 1047-1061

[87] 廖晓昕.一般Лурьс控制系统绝对稳定性的新判据[J].数学学报,1990,33(21),841-852
LIAO Xiaoxin. New criteria for absolute stability of general Lurie control systems[J]. Acta Mathematica Sinica, 1990, 33 (21): 841-852

[88] 程远纪.控制系统无穷扇形的绝对稳定性[J].数学学报,1990,33(3):289-294
CHENG Yuanji. Absolute stability of infinite sector of control systems[J]. Acta Mathematica Sinica, 1990, 33(3): 289-294

[89] 廖晓昕,王晓君.冻结系数法的改进[J].自动化学报,1986,12(7):413-417
LIAO Xiaoxin, WANG Xiaojun. The improvement of frozen coefficient method [J]. Acta Automatica Sinica, 1986, 12 (7): 413-417

[90] LIAO Xiaoxin. Absolute stability of nonlinear control systems [M]. Kluwer Academic Press, Beijing: Science Press, 1993

[91] 张维.Popov频率判据简化[J].工程数学学报,1994,11(1):92-98
ZHANG Wei. The simplification of Popov's frequency criterion [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1994, 11(1): 92-98

[92] 张维.Lurie型直接控制系统的绝对稳定性准则[J].应用数学与力学,1989,10:909-920
ZANG Wei. The criterion for absolute stability of direct control systems of Lurie type[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1989, 10: 909-920

[93] Popov V M. Relaxing the sufficiency conditions for absolute stability[J]. Avtomat Telemech, 1958, 22: 1-7

[94] Popov V M. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control[J]. Avtomat Telemech, 1961, 22: 961- 979

[95] 苏宏业,褚健,鲁仁全,等.不确定时滞系统的鲁棒控制理论[M].北京:科学出版社,2007
SU Hongye, CHU Jian, LU Renquan, et al. Robust control theory of uncertain systems with delay[M]. Beijing: Science Press, 2007

[96] 李继彬,陈兰荪.生命与数学[M].成都:四川教育出版社,1986
LI Jibin, CHEN Lansen. Life and mathematics[M]. Chengdu: Sichuan Education Publishing House, 1986

[97] MacActhur R H. Species packing and competitive equilibrium for among species[J]. Theory Population Biol(Ⅰ), 1970: 1-11

[98] Goh B S. Sector stability of a complex ecosystem model[J]. Math Biosci, 1978, (40): 157-166

[99] LIAO X X, LI Jia. Stability in Gilpin-Ayala competition models with diffusion[J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods & Appl, 1997, 28(10): 1751-1758

[100] KANG Q K, LIAO X X. Dissipation, boundedness and persistence of general ecological systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods & Appl, 1995, 25(11): 1237- 1250

[101] RUAN Shigui. Stability of volterra integrodifferential systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989, 137(2): 471-476

[102] 周天寿,胡长春.三类基因振子和它们的基本动力学[J].江西师范大学学报:自然科学版,2008,32(1):1-5
ZHOU Tianshou, HU Changchun. Three classes of gene oscillators and their basic dynamics[J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science, 2008, 32(1): 1-5

[103] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons[J]. Proc Nalt Acad sci USA. 1984, 81: 3088-3092

[104] Hopfield J J, Tank D W. Computing with neural circuits model [J]. Science, 1986, 233: 3088-3092

[105] LIAO Xiaoxin. Stability of Hopfield-type neural networks (Ⅰ)

[J]. Science in China: A, 1995, 38(4): 407-418

[106] 焦李成. 神经网络系统理论[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1991
JIAO Licheng. Theory of neural network systems[M]. Xi'an: Press of University of Electronic Science and Technology, 1991

[107] 廖晓昕, 王晓君, 傅予力, 等. 论细胞神经网络的理论基础[J]. 电子科学学刊, 1988, 20(5): 694-699
LIAO Xiaoxin, WANG Xiaojun, FU Yuli, et al. On theoretical basis of cellular neural networks[J]. Journal of Electronics, 1998, 20(5): 694-699

[108] 杨叔子, 廖晓昕, 史铁林, 等. 人工神经网络关于理论与应用的研究[C]//中国神经计算科学大会论文集, 南京, 1997: 6-11
YANG Shuzi, LIAO Xiaoxin, SHI Tielin, et al. Research on the theory and application of artificial neural networks[C]//Proc. of Chinese Symposium on Neurocomputing Science, Nanjing, 1997: 6-11

[109] 廖晓昕, 杨叔子. 神经网络动力学渐近行为[C]//ICAIE'98. 武汉: 华中理工大学出版社, 1998
LIAO Xiaoxin, YANG Shuzi. Dynamically asymptotic behavior of neural networks[C]//ICAIE'98, Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 1998

[110] CAO Jinde. Periodic oscillation and exponential stability of delayed CNNs[J]. Physics Letters A, 2001, 270: 157- 163

[111] CAO Jinde. Periodic solutions and exponential stability in delayed cellular neural networks[J]. Physical Review E, 1999, 60(3): 3244-3248

[112] ZHANG Y, YU Z B, WU Y. Global stability analysis on a class of cellular neural networks[J]. Science in China: E, 2001, 44(1): 1-11

[113] WANG L S, DAO Y. Stability for Hopfield neural networks with time delay[J]. J Vibration and Control, 2002, 8: 13-18

[114] Wang L S, Xu D Y. Stability analysis of Hopfield neural networks with time delay[J]. Appl Math and Mech, 2002, 23(1): 65-70

[115] 沈轶, 廖晓昕. Hopfield 型时滞神经网络的指数稳定性[J]. 数学物理学报, 1999, 19(12): 211-218
SHEN Yi, LIAO Xiaoxin. Exponential stability of Hopfield-type neural networks with time delay[J]. Acta Mathematica Scientia, 1999, 19(12): 211-218

[116] 张强, 马润年, 许进. 细胞神经网络渐近行为的研究[J]. 西安电子科技大学学报, 2001, 28(2): 225-228
ZHANG Qiang, MA Runnian, XU Jin. A study of asymptotic behavior of cellular neural networks[J]. Journal of Xidian University, 2001, 28(2): 225-228

[117] 廖晓昕, 肖冬梅. 具有变时滞的 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性[J]. 电子学报, 2008, 28(4): 87-90
LIAO Xiaoxin, XIAO Dongmei. Globally exponential stability of Hopfield neural networks with time-varying delays[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 28(4): 87-90

[118] 廖晓昕, 罗莉, 沈轶. 离散 Hopfield 神经网络的稳定性研究[J]. 自动化学报, 1999, 25(1): 721-72
LIAO Xiaoxin, LUO Li, SHEN Yi. Study on stability of discrete-time Hopfield neural networks[J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(1): 721-727

[119] 曾志刚. 人工神经网络稳定性理论比较方法及应用[D]. 武汉: 华中科技大学, 2003
ZENG Zhigang. Comparative method for stability theory of artificial neural networks and application[D]. Wuhan: Central China University of Science and Technology, 2003

[120] 刘妹琴. 线性矩阵不等式技术在动态神经网络中的应用[R]. 武汉: 华中科技大学, 2001
LIU Meiqin. Application of linear matrix inequalities technology in dynamical neural systems[R]. Wuhan: Central China University of Science and Technology, 2001

[121] 徐炳吉. 非线性控制系统与方法及神经网络的稳定性[D]. 武汉: 华中科技大学, 2002
XU Binzhi. Methods of nonlinear control system and stability of neural networks[D]. Wuhan: Central China University of Science and Technology, 2002

[122] LIAO Xiaoxin, WANG Jun. Algebraic criteria for global exponential stability of cellular networks with multiple time delays[J]. IEEE Transactions on Circuit System-1, 2003, 50: 268-275

[123] LIAO X F, LI C G, WANG K W. Criteria for exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks[J]. Neural Networks, 2004, 17(1): 1401-1414

[124] WANG Z S, ZANG H G, YU W, et al. LMI approach to robust stability analysis of Cohen-Grossberg neural networks with time varying delay[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(11): 2220-2223

[125] CHEN T P, RONG L B. Robust global exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks with delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15: 203- 206

[126] ZHANG Zhigang. Robust H_∞ control of a class of discrete impulsive switched systems[C]//Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, In Press, Corrected Proof, Available online 21 June 2009

[127] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步. 北京: 科学出版社, 2003
CHEN Guangrong, LV Jinhu. Dynamical analysis control and synchronization of Lorenz families[M]. Beijing: Chinese Science Press, 2003

[128] CUI Baotong, LOU Xuyang. Synchronization of chaotic recurrent neural networks with time-varying delays using nonlinear feedback control[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 39(1): 288-294

[129] GUAN Xinping, FENG Gang, CHEN Cailian, et al. A full delayed feedback controller design method for time- delay chaotic systems[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2007, 227(1): 36-42

[130] 杨晓松, 李清都. 混沌系统与混沌电路[M]. 北京: 科学出版社, 2007
YANG Xiaosong, LI Qingdu. Chaotic systems and chaotic circuit[M]. Beijing: Science Press, 2007

[131] CAI Liming, WU Jingang. Analysis of an HIV/AIDS treatment model with a nonlinear incidence[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 41(1): 175-182

[132] LI C, CHEN L, Aihara K. Stability of genetic networks with sum regulatory logic: Lur'e system and LMI approach[J]. IEEE Trans. Circuits Syst I, 2006, 53(11): 2451-2458

[133] REN F, CAO J, Asymptotic and robust stability of genetic regulatory networks with time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2008, 71: 834-842

[134] Helmh H. On discontinuous movements of fluids[J]. Phil Mag, 1868, 36(4): 337-346

[135] ZHOU Heng. On the nonlinear theory of stability of plane poiseuille flow in the subcritical range[J]. Proc Roy Soc Lond, 1982(1): 381

[136] MU Mu, ZENG Qingcun, Shepherd T G, et al. Nonlinear stability of multilayer quasi-geostrophic flow[J]. J Fluid Mech, 1994, 264: 165-184

[137] LU Weisong, A new nonlinear barotropic stability criterion including Ekman friction[J]. Nonlin. World, 1996(3): 787-801

[138] 陈虹, 马彦. 译. 信息爆炸时代的控制: 关于控制动力学[M]. 吉林大学控制科学与工程系, 2002
Control in an information rich world. Panel on future directions in control, Dynamics and systems[M]. Edited by Rachel M. Murray, 2002

[139] Hirsch M W,Smale S. Differential equations,dynamical systems, and linear algebra[M]. New York:Academic Press,1974
[140] Khartonov V L. Asymptotic stability of an equilibrium position of family of systems of linear differential equations[J]. Differential Equations,1978,14(11):1483- 1485
[141] SUN Jitao. Exponential stability of interval dynamical system with multidelay[J]. Appl Math and Mech,2002,23(1):95-99
[142] Kaining W, Anthong N M, Derong L. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices [J]. IEEE Trans Autom Control,1994,39:1251-1255
[143] Kaining W,Anthong N M. Necessary and sufficient conditions for the controllability and observability of a class of linear time-invarint systems with interval plants[J]. IEEE Trans Autom Control,1994,39:1443-1447
[144] 廖晓昕,罗琦,梅正阳,等. 关于区间矩阵稳定性、可控性、可观性的充要条件的注记[J]. 自动化学报,1998,24(6):829- 833
LIAO Xiaoxin,LUO Qi,MEI Zhengyang,et al. Noteson necessary and sufficient conditions of stability,observability and controllability for interval matrices[J]. Acta Automa Tica Sinica,1998, 24(6):829- 833
[145] 王晓君. 多项式稳定几何判据[J]. 应用数学与力学,1988(9):15
WANG Xiaojun. The geometric new criterion of polynomial stability[J]. Applied Mathematics and Mechanics,1988(9):15
[146] 王晓君. 线性控制系统稳定性的几何判据[J]. 华中师范大学学报,1987(3)
WANG Xiaojun. New geometric criterion for stability of linear control systems[J]. Journal of Huazhong Normal University,1987 (3)
[147] LIAO X X,Wang J. Global dissipativity of continuous- time recurrent neural network[J]. Phys. Rev. E 2003 (68) 016118:1-4
[148] SONG Q K,CAO J D. Global dissipativity analysis on uncertain neural networks with mixed time-varying delays[J]. Chaos 18, 043126 (2008) doi:10. 1063/ 1. 3041151
[149] LIAO X X,Yu P. Sufficient and necessary conditions for absolute stability of time delayed Lurie control systems[J]. J Math Anal Appl,2006,323:876-890
[150] LIAO X X,CHEN Z ,XU F,et al. Robust absolute stability of Lurie interval control system. Int. J. Robust Nonlinear Control, 2007,17:1669-1689
[151] LIAO X X. Robust absolute stability of interval of general Lurie control systems[J]. Acta Math,1990(5):628-635
[152] 肖殿荒. 利率变化的消费效应与资产替代效应[J]. 经济科学,2001(5):85-91
XIAO Dianhuang. Consumption and asset substitution effect of change of interest rate[J]. Economic science,2001,(5):85-91
[153] YUE Dong,HAN Q L. Delay-dependent robust controller design for uncertain descriptor systems with time-varying discrete and distributed delays[J]. IEE Proc Control Theory Appl,2005,152 (6):628-638
[154] 黄立宏,李雪梅. 细胞神经网络动力学[M]. 北京:科学出版社,2007
HUANG Lihong, LI Xuemei. Dynamics of cellular neural networks[M]. Beijing:Science Press,2007
[155] 王林山. 时滞递归神经网络[M]. 北京:科学出版社,2008
WANG Linshan. Recurrent neural network with time delay[M]. Beijing:Science Press,2008
[156] 阮炯,蔡志杰,顾凡及. 神经动力学模型方法和应用[M]. 北京:科学出版社,2002
RUAN Jiong,CAI Zhijie,GU Fanji. Methods and applications of neural dynamics models[M]. Beijing:Science Press,2002
[157] 钟守铭,刘碧森,王晓梅,等. 神经网络稳定性理论[M]. 北京:科学出版社,2008
ZHONG Shouming,LIU Bisen,WANG Xiaomei,et al. Theory of stability for neural networks[M]. Beijing:Science Press ,2008

Talking on the theory,methods and application of Lyapunov stability

LIAO Xiaoxin[1]

1 Department of Control Science and Engineering,Huazhong University of Science and Technology,Wuhan 430074

Abstract According to individual experience from the study of stability,the doctoral thesis entitled *The General Problem of the Stability of Motion* by the former Soviet Union academician Lyapunov is first introduced,which has greatly influenced the world over a century. Then this paper describes how the several main contributions the thesis initially made establish foundation for a new subject,inaugurating an important new research direction,and why it can leave many research subjects for later generations. Especially,based on the scientific facts,this paper gives an answer to the question "how long the brilliance of Lyapunov stability will continue to last after it has already been influential for over a century". A viewpoint is clearly expressed that stability is an eternal theme,and also an immortal subject,which will continuously give people enlightenment,insight,wisdom,and ideas.

Key words Lyapunov stability;V function;ordinary differential equation