DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2021.01.005

易航[1]　陈雪芹[1]　刘明[1]

通信受限下基于终端滑模和指对数滑模方法的编队航天器姿态协同控制

摘要

针对星间通信时延和信号量化情形下编队航天器,研究对应的姿态协同控制器设计问题.首先,为节省编队航天器星间通信的带宽资源,提出基于信号量化的星间数据通信策略,并设计了一种终端滑模姿态协同控制器以保证航天器编队姿态同步系统的渐近稳定;其次,考虑到航天器间可能存在通信时延,考虑基于信号量化的通信策略,提出一种基于指对数滑模面的编队航天器协同控制器设计方法,能保证编队航天器在有限时间内达到期望姿态;最后基于包含4个航天器的编队系统,通过仿真验证了所提出的协同控制方法的有效性.

关键词

航天器编队;姿态协同控制;终端滑模控制;指数对数滑模控制;网络化控制

中图分类号 V448.2

文献标志码 A

收稿日期 2020-10-15

资助项目 国家自然科学基金(61833009,11972130,61690212)

作者简介

易航,男,硕士生,研究方向为航天器编队姿轨协同控制.23764571@qq.com

陈雪芹(通信作者),女,博士,副研究员,研究方向为航天器故障诊断与控制.cxqhit@163.com

1　哈尔滨工业大学　航天学院,哈尔滨,150001

0　引言

星间数据传输时,不可避免地存在通信时延[1].一般来说,星间数据传输时延[2-4]主要包括:1)排队延时:即待发送信息进入排队队列,到此信息开始发送所花费的时间;2)发送延时:从开始发送信息的第一个字节直至信息的最后一个字节所需的时间;3)传输延时:信息从发送设备传输到接收设备所花费的时间.以目前的技术手段,在进行星间通信的过程中是无法避免通信延迟问题的.如不考虑星间通信时延的影响,所设计的姿态协同控制律可能无法获得理想的控制性能,甚至会出现使姿态控制系统失稳[5]的情况.另一方面,在考虑通信时延的情形下,如采用基于事件触发的通信机制进行姿态协同控制器的设计,由于事件触发通信机制本身就会造成信息传输延迟,如再与上述的通信时延叠加到一起,无疑增加了控制器的设计负担和保守性,很难取得理想的控制性能[6-8].

除了事件触发通信机制以外,信号量化是另一种能够有效降低星间通信字节的手段[9].从自动控制理论角度来说,通信时延属于时间域上的信息滞后,而信号量化属于状态空间意义上的信息截取,如果一个控制系统同时存在通信时延和信号量化,其对应的信号误差,是可以通过合理设计控制器进行有效补偿的[10-13].基于这一原因,本文将针对编队航天器星间通信中的数据传输时延问题,采用信号量化的通信策略,研究对应的姿态协同控制器设计问题.

首先,在不考虑通信时延情形下,提出信号量化的星间数据传输策略,并基于终端滑模面技术设计一种姿态协同控制器以实现航天器编队姿态的渐近稳定;其次,在星间通信同时存在通信延迟和信号量化的条件下,提出指对数滑模面设计方法,构造了一种能保证编队航天器在有限时间内达到期望姿态的协同控制策略;最后,以包含4个刚体航天器的航天器编队为例,通过数值仿真验证了所提出的2种控制器方法的有效性.

1　问题描述

1.1　系统编队航天器姿态动力学、运动学方程

考虑包含 n 个刚体航天器的编队,第 i 个航天器($i=1,\cdots,n$)的动

力学方程和基于修正的罗德里格参数(Modified Rodrigues Parameter, MRP)的运动学方程具有如下形式:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})\boldsymbol{\omega}_{ei}, \tag{1}$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}_{ei})=\frac{1}{4}[(1-\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{ei})\boldsymbol{I}_3+2\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\times}+2\boldsymbol{\sigma}_{ei}\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\mathrm{T}}],$$

$$\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}=-\boldsymbol{\omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i+\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{d}_i+\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_{ei}^{\times}\boldsymbol{C}_{ei}\boldsymbol{\omega}_{di}-\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{C}_{ei}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{di}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{ei}\in\mathbf{R}^3$ 表示第 i 个编队航天器相对于期望坐标系的姿态角速度,$\boldsymbol{\omega}_i\in\mathbf{R}^3$ 表示第 i 个编队航天器相对于惯性坐标系的姿态角速度,$\boldsymbol{J}_i\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 表示第 i 个编队航天器的转动惯量矩阵,$\boldsymbol{u}_i\in\mathbf{R}^3$ 表示作用在第 i 个编队航天器上的控制力矩,$\boldsymbol{d}_i\in\mathbf{R}^3$ 表示未知的外部扰动,$\boldsymbol{C}_{ei}$ 表示从体坐标系到期望坐标系的坐标变换矩阵,$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{di}$ 表示第 i 颗卫星的期望角加速度,$\boldsymbol{\sigma}_{ei}=[\sigma_{ei,1}\quad\sigma_{ei,2}\quad\sigma_{ei,3}]^{\mathrm{T}}$ 表示第 i 颗卫星相对于期望坐标系的修正罗德里格参数,$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})$ 表达式中的 $\boldsymbol{I}_3\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 表示三阶单位阵.

在上面的运动学方程中,注意到

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})=\frac{(1+\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{ei})^2}{16}\boldsymbol{I}_3>0,$$

因此 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})$ 是一个满秩矩阵,其逆阵为

$$\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})=\frac{16}{(1+\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{ei})^2}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}).$$

对于修正的罗德里格参数 $\boldsymbol{\sigma}_{ei}$,其表达式如下:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ei}=\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\tan(\frac{\theta}{4}),$$

其中$\vec{\boldsymbol{n}}$表示欧拉轴,θ 表示欧拉角.显然当 θ 趋近于无穷时,$\|\boldsymbol{\sigma}_{ei}\|$亦趋近于无穷.为了避免这种奇异情况发生,对航天器姿态参数做如下约束:

假设 1 姿态参数$\boldsymbol{\sigma}_{ei}$ 满足 $\|\boldsymbol{\sigma}_{ei}\|_2\in[0,1]$,即欧拉角 θ 的取值范围为 $\theta\in[-\pi,\pi]$.

为了方便后续的分析和设计,对干扰力矩$\boldsymbol{d}_i$ 做出如下合理假设:

假设 2 作用在编队航天器上的干扰力矩 $\boldsymbol{d}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足如下范数有界条件:

$$\|\boldsymbol{d}_i\|\leqslant d_{\mathrm{M}},i=1,2,\cdots,n,$$

其中$d_{\mathrm{M}}>0$ 是已知常数.

1.2 对数量化器

如前所述,航天器编队系统在进行姿态协同控制时,编队中各航天器间会发送、接收状态信息.为了减少通信压力、节约带宽,有时需要对状态信息进行量化处理,本节采用对数量化策略对星间通信数据进行信号量化.

给定任意向量 $\boldsymbol{x}=[x_1\quad x_2\quad x_3]^{\mathrm{T}}$,采用对数量化策略进行编码-解码,其量化值 $Q(\boldsymbol{x})=[Q(x_1)\quad Q(x_2)\quad Q(x_3)]^{\mathrm{T}}$ 可以按如下非线性映射函数求解:

$$Q(x_i)=\begin{cases}x^j, & \dfrac{x^j}{1+\sigma}<x_i\leqslant\dfrac{x^j}{1-\sigma},\\ 0, & 0\leqslant x_i\leqslant\dfrac{x^0}{1+\sigma},\\ -Q(-x_i), & x_i<0,\end{cases} \tag{3}$$

其中参数 $x^j=\rho^{1-j}x^0(j=1,2,\cdots)$,$x_0>0$ 是事先给定的量化器初始值,$0<\rho<1$ 表示对数量化器密度,$\delta=(1-\rho)/(1+\rho)$.ρ 和δ 刻画了量化器的量化稠密程度:ρ 越小,δ 越大,量化密度越大,量化越稀疏;ρ 越大,δ 越小,量化密度越小,量化越密集.图 1 是一个对数量化器的例子,其中 $\delta=1/3$,$\rho=0.5$,$x^0=0.001$.从图 1 中可以看出ρ 决定了量化区间大小,因此可以根据实际情况调节 ρ 和 δ 的数值以得到理想的对数量化器.

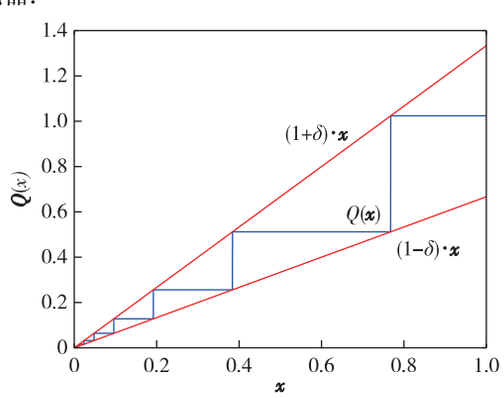


图 1 量化函数

Fig. 1 Quantization function

引理 1 给定一个向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3$,若采用对数量化器(3)对 $\boldsymbol{x}$ 进行量化,定义量化误差$d_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{x})=Q(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}$,则$d_q(\boldsymbol{x})$ 满足如下的约束:

$$|d_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{x})|\leqslant3\frac{x^0}{1+\delta}+\frac{\delta}{1-\delta}|Q(\boldsymbol{x})|.$$

证明 由对数量化器(3)的性质可知,当$x_i\leqslant x^0/(1+\delta)$ 时,$Q(\boldsymbol{x})=0$,因此,根据矩阵 1-范数的定义可以推出

$$|d_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{x})|=|Q(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|\leqslant\left|\frac{x^0}{1+\delta}+\frac{x^0}{1+\delta}+\frac{x^0}{1+\delta}\right|=3\frac{x^0}{1+\delta} \tag{4}$$

成立.而当 $x_i > x^0/(1+\delta)$ 时,则有

$$\frac{x^j}{1+\delta} < x_i \leqslant \frac{x^j}{1-\delta}$$

成立.注意到式(4)中的x^j就是x_i的量化值$Q(x_i)$,因此对应的量化误差$d_q(\boldsymbol{x})$满足:

$$Q(\boldsymbol{x})\frac{\delta}{1+\delta} > Q(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} \geqslant Q(\boldsymbol{x})\frac{-\delta}{1-\delta}.$$

另一方面,由 $\delta \in (0,1)$ 的性质可知其满足 $\delta/(1+\delta) < \delta/(1-\delta)$,因此,当$x_i > x^0/(1+\delta)$时量化误差$d_q(\boldsymbol{x})$的范数满足:

$$|d_q(\boldsymbol{x})| = |Q(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}| \leqslant \frac{\delta}{1-\delta}|Q(\boldsymbol{x})|.$$

综合$x_i > x^0/(1+\delta)$和$x_i \leqslant x^0/(1+\delta)$两种情况考虑,对任意的向量$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$,其量化误差$d_q(\boldsymbol{x})$一定满足如下约束:

$$|d_q(\boldsymbol{x})| \leqslant 3\frac{x^0}{1+\delta} + \frac{\delta}{1-\delta}|Q(\boldsymbol{x})|.$$

2 通信时延和信号量化情形下航天器编队协同控制器设计

本节将针对存在通信时延和信号量化情形,设计姿态协同控制器使航天器编队完成给定的姿态跟踪任务.在编队飞行过程中,为实现姿态协同目标,第i个成员航天器需要第j个成员航天器的姿态信息($\boldsymbol{\sigma}_{ej}$和$\boldsymbol{\omega}_{ej}$).因此,为方便下面分析,把和第i颗成员航天器有信息通信的所有其他成员航天器定义为一个集合N_i.

假设3 定义第i个航天器和第j个航天器间的通信延时$T_{ij} > 0$是固定的常数,并且满足$T_{ij} = T_{ji}$.在进行本节的航天器编队姿态协同控制器分析和设计工作之前,需要给出下面两个关于系统有限时间收敛的引理.

引理2[7] 给定一个非线性系统$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$,其中$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$是状态向量,$\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$是控制输入向量,如果存在一个 Lyapunov 函数$V(x): U \to \mathbf{R}$,其中集合$U \subset \mathbf{R}^n$包含原点,满足:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) + aV(\boldsymbol{x}) + bV^{\lambda}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0,$$

其中,$a > 0, b > 0, \lambda \in (0,1)$为已知常数,则该非线性系统是有限时间稳定的,且收敛时间T_{reach}满足:

$$T_{\text{reach}} \leqslant \frac{1}{a(1-\lambda)}\ln\frac{aV^{1-\lambda}(x(0)) + b}{b}.$$

引理3[7] 给定一个非线性系统$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$,其中$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$是状态向量,$\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$是控制输入向量,如存在一个 Lyapunov 函数$V(\boldsymbol{x}): U \to \mathbf{R}, U \subset \mathbf{R}^n$,满足:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) + bV^{\lambda}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0,$$

其中,$b > 0, \lambda \in (0,1)$为已知常数,则存在一个集合$U_0 \subset \mathbf{R}^n$,使对任意的初始条件$V(\boldsymbol{x}_0) \in U_0 \subset \mathbf{R}^n$,都能保证该非线性系统是有限时间稳定的,且收敛时间满足:

$$T_{\text{reach}} \leqslant \frac{V^{1-\lambda}(x_0)}{b(1-\lambda)}.$$

2.1 终端滑模姿态协同控制器设计

本小节首先考虑理想的星间通信情形,即编队航天器的星间通信不存在时延,采用信号量化通信策略进行航天器编队姿态协同控制器的分析和设计,以期在实现编队航天器姿态协同任务的同时,节省编队航天器之间的通信字节和带宽.

首先,针对编队航天器姿态控制系统(1)—(2)定义如下所示的终端滑模面:

$$\boldsymbol{s}_i(t) = c\cdot\boldsymbol{\sigma}_{ei} + \text{sig}^d(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}), \tag{5}$$

其中$c > 0, 1 < d < 2$是待设计参数,sig(·)是与符号函数相关的项,具体定义如下:

$$\text{sig}^d(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}) = \begin{bmatrix} |\dot{\sigma}_{ei,1}|^d\cdot\text{sign}(\dot{\sigma}_{ei,1}) \\ |\dot{\sigma}_{ei,2}|^d\cdot\text{sign}(\dot{\sigma}_{ei,2}) \\ |\dot{\sigma}_{ei,3}|^d\cdot\text{sign}(\dot{\sigma}_{ei,3}) \end{bmatrix}.$$

当编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线到达滑模面$\boldsymbol{s}_i = 0$上后,由滑模面函数(5)可以推出

$$c\boldsymbol{\sigma}_{ei} = c\begin{bmatrix}\sigma_{ei,1}\\ \sigma_{ei,2}\\ \sigma_{ei,3}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} |\dot{\sigma}_{ei,1}|^d\cdot\text{sign}(\dot{\sigma}_{ei,1}) \\ |\dot{\sigma}_{ei,2}|^d\cdot\text{sign}(\dot{\sigma}_{ei,2}) \\ |\dot{\sigma}_{ei,3}|^d\cdot\text{sign}(\dot{\sigma}_{ei,3}) \end{bmatrix}.$$

注意到$c > 0$同时$1 < d < 2$是一个非整数,所以由上式可以判断$\text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}) = -\text{sign}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei})$成立,同时$\boldsymbol{\sigma}_{ei}$和$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}$满足如下关系:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei} = \begin{bmatrix}\dot{\sigma}_{ei,1}\\ \dot{\sigma}_{ei,2}\\ \dot{\sigma}_{ei,3}\end{bmatrix} = -c^{\frac{1}{d}}\begin{bmatrix} |\sigma_{ei,1}|^{\frac{1}{d}}\cdot\text{sign}(\sigma_{ei,1}) \\ |\sigma_{ei,2}|^{\frac{1}{d}}\cdot\text{sign}(\sigma_{ei,2}) \\ |\sigma_{ei,3}|^{\frac{1}{d}}\cdot\text{sign}(\sigma_{ei,3}) \end{bmatrix} = -c^{\frac{1}{d}}\text{sig}^{\frac{1}{d}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}). \tag{6}$$

引理4 当编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线到达滑模面$\boldsymbol{s}_i(t) = 0$之后,其姿态参数$\boldsymbol{\sigma}_{ei}(t)$和$\boldsymbol{\omega}_{ei}(t)$将在有限时间内收敛到原点,并且收敛时间$t_1$满足:

$$t_1 = 2d\frac{w^{\frac{d-1}{2d}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}(0))}{2^{\frac{1+d}{2d}}c^{\frac{1}{d}}(d-1)}.$$

证明 对编队航天器姿态控制系统(1)—(2)定义如下的 Lypaunov 函数:

$$W(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{ei}.$$

对 $W(t)$ 求导,并将(6)代入可得:

$$\dot{W}(t) = -c^{\frac{1}{d}}\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\mathrm{T}}\mathrm{sig}^{\frac{1}{d}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}) =$$
$$-c^{\frac{1}{d}}\cdot(|\sigma_{ei,1}|^{\frac{1+d}{d}} + |\sigma_{ei,2}|^{\frac{1+d}{d}} + |\sigma_{ei,3}|^{\frac{1+d}{d}}). \quad (7)$$

由于参数 d 满足 $1 < d < 2$,因此推出 $(1+d)/d \in (1.5,2)$,那么式(7)第二行括号内的项满足:

$$|\sigma_{ei,1}|^{\frac{1+d}{d}} + |\sigma_{ei,2}|^{\frac{1+d}{d}} + |\sigma_{ei,3}|^{\frac{1+d}{d}} \geqslant$$
$$(|\sigma_{ei,1}|^2 + |\sigma_{ei,2}|^2 + |\sigma_{ei,3}|^2)^{\frac{1+d}{2d}}. \quad (8)$$

将(8)代入(7)可以推出:

$$\dot{W}(t) \leqslant -c^{\frac{1}{d}}\|\boldsymbol{\sigma}_{ei}\|_2^{\frac{1+d}{4d}} = -c^{\frac{1}{d}}(2W(t))^{\frac{1+d}{2d}}),$$

可改写为

$$\dot{W} + 2^{\frac{1+d}{2d}}c^{\frac{1}{d}}W^{\left(\frac{1+d}{2d}\right)}(t) \leqslant 0.$$

由于 $1 < d < 2$,因此推出 $\frac{3}{4} < \frac{1+d}{2d} < 1$,那么根据引理 3 可知,$\boldsymbol{\sigma}_{ei}$ 将在有限时间内收敛到原点,其收敛时间满足:

$$t_1 \leqslant 2d\frac{w^{\frac{d-1}{2d}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}(0))}{2^{\frac{1+d}{2d}}c^{\frac{1}{d}}(d-1)}.$$

另一方面,当 $\boldsymbol{\sigma}_{ei} = 0$ 时,姿态运动学方程(1)退化为

$$\boldsymbol{\omega}_{ei} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\sigma}_{ei})c^{\frac{1}{d}}\cdot 0 = 0,$$

说明航天器角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_{ei}$ 也将在有限时间内收敛到平衡点.

引理 4 说明当编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线到达滑模面 $\boldsymbol{s}_i(t)=0$ 后,$\boldsymbol{\sigma}_{ei}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{ei}$ 将在有限时间内收敛到原点.下面来分析滑模面 $\boldsymbol{s}_i(t) = 0$ 的能达性.注意滑模函数 $\boldsymbol{s}_i(t)$ 时间导数为

$$\dot{\boldsymbol{s}}_i(t) = c\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei} + \begin{bmatrix} d|\dot{\sigma}_{ei,1}|^{d-1}\ddot{\sigma}_{ei,1} \\ d|\dot{\sigma}_{ei,2}|^{d-1}\ddot{\sigma}_{ei,2} \\ d|\dot{\sigma}_{ei,3}|^{d-1}\ddot{\sigma}_{ei,3} \end{bmatrix} =$$
$$c\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei} + d\cdot\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\cdot\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}.$$

将 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})\boldsymbol{\omega}_{ei}$ 代入上式得到

$$\dot{\boldsymbol{s}}_i(t) = c\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei} + d\cdot\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\omega}_{ei} + \boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}). \quad (9)$$

另一方面,由编队航天器姿态动力学系统(2)可以推出:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}(t) = \boldsymbol{J}_i^{-1}(-\boldsymbol{\omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i +$$
$$\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_{ei}^{\times}\boldsymbol{C}_{ei}\boldsymbol{\omega}_{di} - \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{C}_{ei}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{di}),$$

将上式代入(9)得到:

$$\dot{\boldsymbol{s}}_i(t) = d\cdot\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\boldsymbol{F}\boldsymbol{J}_i^{-1}(-\boldsymbol{\omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i +$$
$$\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i + \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_{ei}^{\times}\boldsymbol{C}_{ei}\boldsymbol{\omega}_{di} - \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{C}_{ei}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{di}) +$$
$$c\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei} + d\cdot\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\omega}_{ei}. \quad (10)$$

定理 1 考虑编队航天器姿态控制系统(1)—(2),并将其中各成员航天器的控制力矩设计为如下形式:

$$\boldsymbol{u}_i(t) = \boldsymbol{\omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_{ei}^{\times}\boldsymbol{C}_{ei}\boldsymbol{\omega}_{di} + \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{C}_{ei}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{di} -$$
$$\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\omega}_{ei} - \frac{c}{d}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{F}^{-1}\mathrm{sig}^{2-d}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}) +$$
$$\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{F}^{-1}\Big[\sum_{j\in N_i}Q(\boldsymbol{s}_j) - \boldsymbol{s}_i(t) - \mathrm{diag}(|\boldsymbol{s}_i(t)|^{\frac{1}{2}})\cdot$$
$$\mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_i(t)) - k_s\cdot\mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_i(t))\Big], \quad (11)$$

其中滑模控制器增益设计为

$$k_s = \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})\boldsymbol{J}_i^{-1}\|_2\cdot\|\boldsymbol{d}_i\|_2 + \sum_{j\in N_i}\|Q(\boldsymbol{s}_j)\|_2.$$

则在控制律(11)作用下,编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线将在有限时间内达到滑模面 $\boldsymbol{s}_i(t) = 0$.

证明 对编队航天器姿态控制系统(1)—(2)定义如下 Lypaunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_i(t).$$

将姿态协同控制律(11)代入滑模面方程(10)可得:

$$\dot{V}(t) = d\cdot\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\boldsymbol{F}\boldsymbol{J}_i^{-1}\cdot$$
$$(-\boldsymbol{\omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i + \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_{ei}^{\times}\boldsymbol{C}_{ei}\boldsymbol{\omega}_{di} - \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{C}_{ei}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{di}) +$$
$$\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}[c\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei} + d\cdot\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\omega}_{ei}] =$$
$$d\cdot\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\boldsymbol{F}\boldsymbol{J}_i^{-1}\boldsymbol{d}_i +$$
$$d\cdot\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\cdot$$
$$\sum_{j\in N_i}Q(\boldsymbol{s}_j) - d\cdot\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\boldsymbol{s}_i(t) -$$
$$d\cdot\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})-(|\boldsymbol{s}_i(t)|^{\frac{1}{2}})\mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_i(t)) -$$
$$d\cdot k_s\cdot\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_i(t)). \quad (12)$$

注意到式(12)中的 $\|\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\boldsymbol{s}_i(t)\|_1$ 和 $\|\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\|_2$ 两项满足如下关系:

$$\|\mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1})\boldsymbol{s}_i(t)\| =$$
$$|\dot{\sigma}_{ei,1}s_{i,1}| + |\dot{\sigma}_{ei,2}s_{i,2}| + |\dot{\sigma}_{ei,3}s_{i,3}| \geqslant$$

$$\sqrt{(\dot{\sigma}_{ei,1}^2 s_{i,1}^2 + \dot{\sigma}_{ei,2}^2 s_{i,2}^2 + \dot{\sigma}_{ei,3}^2 s_{i,3}^2)} = \| \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \|_2. \tag{13}$$

将不等式(13)代入 Lypaunov 函数 $V(t)$ 的导数(12)可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leqslant & d \| \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \|_2 (\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}) \boldsymbol{J}_i^{-1} \|_2 \cdot \\ & \| \boldsymbol{d}_i \|_2 + \sum_{j \in N_i} \| Q(\boldsymbol{s}_j) \|_2) - \\ & d \cdot \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \boldsymbol{s}_i(t) - \\ & d \cdot \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \mathrm{diag}(|\boldsymbol{s}_i(t)|^{\frac{1}{2}}) \cdot \\ & \mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_i(t)) - d \| \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \boldsymbol{s}_i(t) \|_1 \cdot k_s \leqslant \\ & - d \cdot \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \boldsymbol{s}_i(t) - d \cdot \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \cdot \\ & \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \mathrm{diag}(|\boldsymbol{s}_i(t)|^{\frac{1}{2}}) \mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_i(t)). \end{aligned} \tag{14}$$

考虑不等式(14)的最后一行,第一项满足如下性质:

$$\begin{aligned}& \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \boldsymbol{s}_i(t) \geqslant \\ & \qquad \min(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \cdot \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s}_i(t), \end{aligned} \tag{15}$$

同时,第二项满足

$$\begin{aligned}& \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \mathrm{diag}(|\boldsymbol{s}_i(t)|^{\frac{1}{2}}) \mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_i(t)) = \\ & |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei,1}|^{d-1} |s_{i,1}|^{\frac{3}{2}} + |\dot{\sigma}_{ei,2}|^{d-1} |s_{i,2}|^{\frac{3}{2}} + \\ & |\dot{\sigma}_{ei,3}|^{d-1} |s_{i,3}|^{\frac{3}{2}} \geqslant \min(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) \cdot \\ & (|s_{i,1}|^{\frac{3}{2}} + |s_{i,2}|^{\frac{3}{2}} + |s_{i,3}|^{\frac{3}{2}}) \geqslant \\ & \min |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1} \cdot (\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s}_i(t))^{\frac{3}{4}}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\min(|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1}) = \min\{|\dot{\sigma}_{ei,1}|^{d-1}, |\dot{\sigma}_{ei,2}|^{d-1}, |\dot{\sigma}_{ei,3}|^{d-1}\}.$$

将式(15)、(16)代入不等式(14)得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leqslant & - d \cdot \min |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1} \cdot \boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s}_i(t) - \\ & d \cdot \min |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1} \cdot (\boldsymbol{s}_i(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s}_i(t))^{\frac{3}{4}} \leqslant \\ & - 2d \cdot \min |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1} \cdot V(t) - \\ & d \cdot \min |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1} \cdot (2V(t))^{\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

并进一步改写为如下形式:

$$\dot{V}(t) + 2d \cdot \min |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1} \cdot V(t) + 2^{\frac{3}{4}} d \cdot \min |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{d-1} \cdot (V(t))^{\frac{3}{4}} \leqslant 0. \tag{17}$$

考虑不等式(17),并基于引理 2 可推断出编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线将在有限时间内达到滑模面 $\boldsymbol{s}_i(t) = 0$ 上.

2.2 基于指对数滑模面的姿态控制策略

上一小节针对理想的星间通信情形,采用信号量化通信策略进行了航天器编队姿态协同控制器的分析和设计.本小节将考虑航天器编队中星间信息传输的通信延迟现象.基于信号量化传输策略并采用指对数型滑模面理论设计对应的姿态协同控制器,以保证编队航天器能够完成姿态协同任务.

首先,定义如下形式的指对数滑模面函数:

$$\boldsymbol{s}_{i2}(t) = \boldsymbol{\omega}_{ei}(t) + F^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}) [\alpha \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}) + \beta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})], \tag{18}$$

其中参数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})$ 和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})$ 具有如下形式:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}) = \begin{bmatrix} (2e^{|\sigma_{ei,1}|} - 1)\ln(2 - e^{-|\sigma_{ei,1}|})\mathrm{sign}(\sigma_{ei,1}) \\ (2e^{|\sigma_{ei,2}|} - 1)\ln(2 - e^{-|\sigma_{ei,2}|})\mathrm{sign}(\sigma_{ei,2}) \\ (2e^{|\sigma_{ei,3}|} - 1)\ln(2 - e^{-|\sigma_{ei,3}|})\mathrm{sign}(\sigma_{ei,3}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}) = \begin{bmatrix} (2e^{|\sigma_{ei,1}|} - 1)\ln^{\frac{q}{p}}(2 - e^{-|\sigma_{ei,1}|})\mathrm{sign}(\sigma_{ei,1}) \\ (2e^{|\sigma_{ei,2}|} - 1)\ln^{\frac{q}{p}}(2 - e^{-|\sigma_{ei,2}|})\mathrm{sign}(\sigma_{ei,2}) \\ (2e^{|\sigma_{ei,3}|} - 1)\ln^{\frac{q}{p}}(2 - e^{-|\sigma_{ei,3}|})\mathrm{sign}(\sigma_{ei,3}) \end{bmatrix},$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ 是待设计常数,$q > 0, p > 0$ 要求选取为奇数并且满足 $q < p < 2q$.

考虑指对数滑模面方程(18),当 $\boldsymbol{s}_{i2}(t) = 0$ 时该方程退化为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}(t) = - \alpha \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}) - \beta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}). \tag{19}$$

针对系统(19),给出如下引理.

引理 5 当编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线到达 $\boldsymbol{s}_{i2}(t) = 0$ 之后,姿态参数 $\boldsymbol{\sigma}_{ei}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{ei}$ 将在有限时间内收敛到平衡点,并且收敛时间满足:

$$t_2 = \frac{p}{\alpha(p - q)} \ln \frac{\alpha V^{\frac{p}{p-q}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}(0)) + \beta}{\beta}.$$

证明 对编队航天器姿态控制系统(1)—(2)构造如下 Lypaunov 函数:

$$V(t) = \sum_{j=1,2,3} \ln(2 - e^{-|\sigma_{ei,j}(t)|}),$$

对其求导得:

$$\dot{V}(t) = \sum_{j=1,2,3} \frac{1}{2e^{|\sigma_{ei,j}|} - 1} \cdot \dot{\sigma}_{ei,j} \cdot \mathrm{sign}(\sigma_{ei,j}).$$

当编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线到达 $\boldsymbol{s}_{i2}(t) = 0$ 之后,显然满足方程(19).将其代入上式得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = & - \sum_{j=1,2,3} \frac{\mathrm{sign}(\sigma_{ei,j})}{2e^{|\sigma_{ei,j}|} - 1} \cdot \alpha(2e^{|\sigma_{ei,j}|} - 1) \cdot \\ & \ln(2 - e^{-|\sigma_{ei1}|}) \mathrm{sign}(\sigma_{ei,j}) - \\ & \sum_{j=1,2,3} \frac{\mathrm{sign}(\sigma_{ei,j})}{2e^{|\sigma_{ei,j}|} - 1} \cdot \beta(2e^{|\sigma_{ei,j}|} - 1) \cdot \\ & \ln^{\frac{q}{p}}(2 - e^{-|\sigma_{ei1}|}) \mathrm{sign}(\sigma_{ei,j}) = \\ & - \sum_{j=1,2,3} [\alpha \ln(2 - e^{-|\sigma_{ei,j}|}) + \beta \ln^{\frac{q}{p}}(2 - e^{-|\sigma_{ei,j}|})] = \end{aligned}$$

$-\alpha V(t)-\beta V^{\frac{q}{p}}(t)$.

因此推出

$$\dot{V}(t)+\alpha V(t)+\beta V\frac{q}{p}(t)=0.$$

注意到上式中的参数满足 $\alpha>0,\beta>0,\frac{q}{p}\in(\frac{1}{2},1)$,因此由引理 2 可知修正的罗德里格参数 $\boldsymbol{\sigma}_{ei}(t)$ 将在有限时间内收敛到平衡点,其稳定时间为

$$t_2=\frac{p}{\alpha(p-q)}\ln\frac{\alpha V^{\frac{p}{p-q}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}(0))+\beta}{\beta}.$$

当 $\boldsymbol{\sigma}_{ei}(t)=0$ 之后,根据方程(19)可知角速度误差满足:

$$\boldsymbol{\omega}_{ei}=-\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})[\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0]=0,$$

这意味着在 t_2 时刻 $\boldsymbol{\omega}_{ei}$ 也收敛到了平衡点.证毕.

下面再来分析滑模面 $\boldsymbol{s}_{i2}(t)=0$ 的能达性.考虑指对数滑模面函数(18),可推导出其导数方程为

$$\dot{\boldsymbol{s}}_{i2}(t)=\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}(t)+\dot{\boldsymbol{F}}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})[\alpha\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})+\beta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})]=+\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})[\alpha\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})+\beta\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})],\tag{20}$$

其中导数项 $\dot{\boldsymbol{F}}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})$,$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})$,$\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})$ 的表达式如下:

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})=\frac{16}{(1+\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{ei})^2}\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})-\frac{16\cdot\boldsymbol{\sigma}_{ei}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}}{(1+\boldsymbol{\sigma}_{ei}\boldsymbol{\sigma}_{ei})^3}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei}),$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})=\begin{bmatrix}(2\mathrm{e}^{|\sigma_{ei,1}|}\ln(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,1}|})+1)\dot{\sigma}_{ei,1}\\(2\mathrm{e}^{|\sigma_{ei,2}|}\ln(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,2}|})+1)\dot{\sigma}_{ei,2}\\(2\mathrm{e}^{|\sigma_{ei,3}|}\ln(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,3}|})+1)\dot{\sigma}_{ei,3}\end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{|\sigma_{ei,1}|}\ln^{\frac{q}{p}}(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,1}|})+\frac{q}{p}\ln^{\frac{q-p}{p}}(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,1}|})\dot{\sigma}_{ei,1}\\2\mathrm{e}^{|\sigma_{ei,2}|}\ln^{\frac{q}{p}}(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,2}|})+\frac{q}{p}\ln^{\frac{q-p}{p}}(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,2}|})\dot{\sigma}_{ei,2}\\2\mathrm{e}^{|\sigma_{ei,3}|}\ln^{\frac{q}{p}}(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,3}|})+\frac{q}{p}\ln^{\frac{q-p}{p}}(2-\mathrm{e}^{-|\sigma_{ei,3}|})\dot{\sigma}_{ei,3}\end{bmatrix}.\tag{21}$$

将编队航天器的姿态动力学方程(2)代入(20)可以推出:

$$\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{s}}_{i2}(t)=\dot{\boldsymbol{F}}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})[\alpha\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})+\beta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})]+\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})[\alpha\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})+\beta\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})]-\boldsymbol{\omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i+\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{d}_i+\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_{ei}^{\times}\boldsymbol{C}_{ei}\boldsymbol{\omega}_{di}-\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{C}_{ei}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{di}.\tag{22}$$

下面给出关于保证指对数滑模面函数(18)能达性的定理.

定理 2 考虑指对数滑模面方程(20),将编队航天器姿态控制系统中各成员航天器的控制力矩设计为如下形式:

$$\boldsymbol{u}_i(t)=-\dot{\boldsymbol{F}}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})[\alpha\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})+\beta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})]-\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})[\alpha\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})+\beta\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\sigma}_{ei})]+\boldsymbol{\omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i+\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{C}_{ei}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{di}-\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_{ei}^{\times}\boldsymbol{C}_{ei}\boldsymbol{\omega}_{di}-k_p\sum_{j\in N_i}\boldsymbol{s}_{i2}(t)+\sum_{j\in N_i}Q(\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij}))-k_p\mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_{i2}(t)),\tag{23}$$

其中增益参数 $k_p>1$,$k_q=\frac{\delta}{1-\delta}\sum_{j\in N_i}\|Q(\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij}))\|_1+d_m+3\frac{x_0}{1+\delta}$,则编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线将渐近地到达滑模面 $\boldsymbol{s}_{i2}(t)=0$,即满足 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{s}_{i2}(t)=0$.

证明 对编队航天器姿态控制系统(1)—(2)定义如下的 Lypaunov 函数:

$$U(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{s}_{i2}(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\int_{t-T_{ij}}^{t}\boldsymbol{s}_{j2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{j2}(t)\mathrm{d}\tau,\tag{24}$$

则对其求导得到

$$\dot{U}(t)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{s}}_{i2}(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}[\boldsymbol{s}_{j2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{j2}(t)-\boldsymbol{s}_{j2}^{\mathrm{T}}(t-T_{ij})\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij})].\tag{25}$$

在式(25)中,注意到如下性质成立:

$$\boldsymbol{s}_{j2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{j2}(t)-\boldsymbol{s}_{j2}^{\mathrm{T}}(t-T_{ij})\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij})=[s_{i2,1}^2+s_{j2,1}^2(t-T_{ij})]+[s_{i2,2}^2+s_{j2,2}^2(t-T_{ij})]+[s_{i2,3}^2+s_{j2,3}^2(t-T_{ij})]\geqslant 2s_{i2,1}s_{j2,1}(t-T_{ij})+2s_{i2,2}s_{j2,2}(t-T_{ij})+2s_{i2,3}s_{j2,3}(t-T_{ij})=2\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij}).$$

因此(25)可以放大为

$$\dot{U}(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{s}}_{i2}(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}[\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij})]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}[\boldsymbol{s}_{j2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{j2}(t)+\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{i2}(t)].\tag{26}$$

又因为如下性质成立:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\boldsymbol{s}_{j2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{j2}(t)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{i2}(t)\sum_{j\in N_i}1=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{i2}(t),$$

因此可以进一步推出:

$$\dot{U}(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{s}}_{i2}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{s}_{i2}(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}[\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij})]. \tag{27}$$

基于滑模面方程(22),并将控制律(23)代入式(27)得到:

$$\dot{U}(t)\leqslant-(k_p-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}_{i2}(t)+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{d}_i-k_p\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{sign}(\boldsymbol{s}_{i2}(t))+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)(Q(\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij}))-\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij}))\leqslant-(k_p-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{s}_{i2}(t)+\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{s}_{i2}(t)\|_2\cdot(\|\boldsymbol{d}_i\|_2+\|d_q(\boldsymbol{s}_{j2}(t-T_{ij}))\|_2)-k_q\|\boldsymbol{s}_{i2}(t)\|_1.$$

对于向量 $\boldsymbol{s}_{i2}(t)\in\mathbf{R}^3$,注意到 $\|\boldsymbol{s}_{i2}(t)\|_1>\|\boldsymbol{s}_{i2}(t)\|_2$ 成立.因此由(28)可以推出:

$$\dot{U}(t)\leqslant-(k_p-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\boldsymbol{s}_{i2}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{s}_{i2}(t). \tag{28}$$

显然,指对数滑模面 $\boldsymbol{s}_{i2}(t)=0$ 是渐近能达的,即编队航天器姿态控制系统(1)—(2)的状态轨线将渐近收敛到滑模面 $\boldsymbol{s}_{i2}(t)=0$ 上.

3 仿真算例

本节将给出数值仿真算例,验证所提出的两种编队航天器姿态协同控制器设计方法的有效性.假设整个航天器编队包含4个成员航天器和1个虚拟的领航航天器,并且领航航天器的姿态参数按如下公式计算:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{q}}_0^{\times}+q_{0,4}\boldsymbol{I}_3\\-\bar{\boldsymbol{q}}_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{w}_0,$$

其中各个参数的初始值设置为

$$\bar{\boldsymbol{q}}_0(0)=\begin{bmatrix}-0.4\\-0.5\\0.6\end{bmatrix},$$

$$q_{0,4}(0)=\sqrt{1-\bar{\boldsymbol{q}}_0^{\mathrm{T}}(0)\bar{\boldsymbol{q}}_0(0)},$$

$$\boldsymbol{w}_0=\begin{bmatrix}0.05\sin(\pi t/50)\\0.1\sin(\pi t/60)\\0.08\sin(\pi t/70)\end{bmatrix}.$$

通过单位四元数和修正罗德里格参数之间的转换公式可以进一步求出领航航天器姿态的修正罗德里格参数表示:

$$\boldsymbol{\sigma}_0=\frac{\bar{\boldsymbol{q}}_0}{1+q_{0,4}}.$$

图2—4分别给出了领航航天器的姿态角速度、姿态四元数及对应修正罗德里格参数随时间的变化曲线.

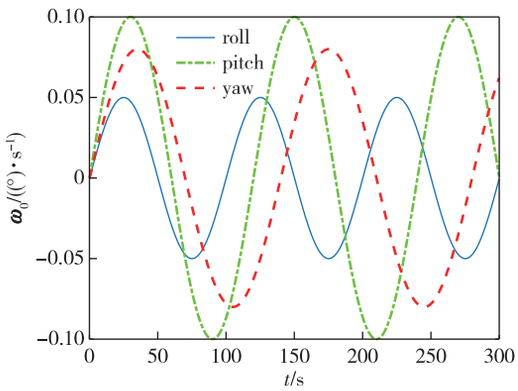


图2 领航航天器的角速度变化曲线

Fig. 2 Trajectory of $\boldsymbol{w}(t)$ for leader spacecraft

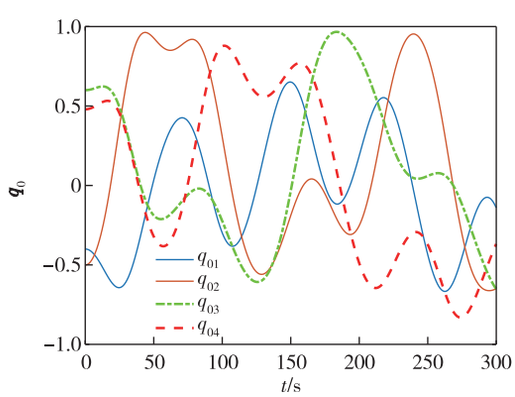


图3 领航航天器的姿态角 $\boldsymbol{q}(t)$ 变化曲线

Fig. 3 Trajectory of $\boldsymbol{q}(t)$ for leader spacecraft

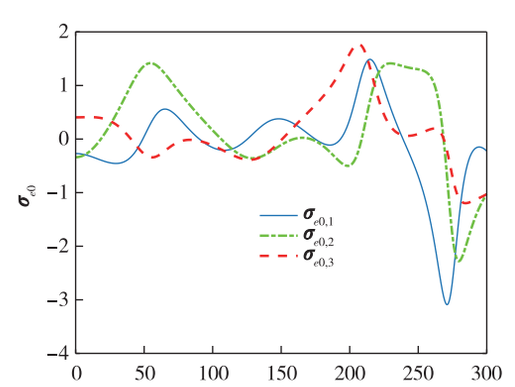


图4 领航航天器的修正罗德里格斯参数信息

Fig. 4 Trajectory of MRP for leader spacecraft

4 个成员航天器的转动惯量矩阵设置为如下形式:

$$\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}16&0&0\\0&12&0\\0&0&10\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_2=\begin{pmatrix}18&0&0\\0&14&0\\0&0&15\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_3=\begin{pmatrix}17&0&0\\0&11&0\\0&0&13\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_4=\begin{pmatrix}15&0&0\\0&13&0\\0&0&12\end{pmatrix}.$$

4 个成员航天器的初始姿态角速度设置为

$$\boldsymbol{w}_{10}=[0.03\quad 0.02\quad 0.02]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{w}_{20}=[0.02\quad 0.03\quad 0.01]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{w}_{30}=[0.02\quad 0.02\quad 0.03]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{w}_{40}=[0.01\quad 0.02\quad 0.01]^{\mathrm{T}}.$$

作用在各成员航天器上的干扰力矩为

$$\boldsymbol{d}_1=10^{-2}\cdot\begin{pmatrix}\sin(0.4t)\\\sin(0.4t)\\\sin(0.4t)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d}_2=10^{-2}\cdot\begin{pmatrix}\sin(0.5t)\\\sin(0.5t)\\\sin(0.5t)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d}_3=10^{-2}\cdot\begin{pmatrix}\sin(0.6t)\\\sin(0.6t)\\\sin(0.6t)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d}_4=10^{-2}\cdot\begin{pmatrix}\sin(0.7t)\\\sin(0.7t)\\\sin(0.7t)\end{pmatrix}.$$

各成员航天器的初始姿态四元数为

$$\boldsymbol{q}_1(0)=\begin{bmatrix}\sin(-\pi/8)\\0\\0\\\cos(-\pi/8)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{q}_2(0)=\begin{bmatrix}0\\\sin(\pi/12)\\0\\\cos(\pi/12)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{q}_3(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\sin(-\pi/8)\\\cos(-\pi/8)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{q}_4(0)=\begin{bmatrix}\sin(\pi/6)\\0\\0\\\cos(\pi/6)\end{bmatrix}.$$

此外,各成员航天器间通信情况如图 5 所示.

为了合理地描述编队协同控制器的性能,针对编队航天器定义如下的状态保持度函数 $e_{\mathrm{s}}(t)$ 及编队保持度函数$e_{\mathrm{f}}(t)$:

$$e_{\mathrm{s}}(t)=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\bar{\boldsymbol{q}}_{i0}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{q}}_{i0}(t)},$$

$$e_{\mathrm{f}}(t)=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j\in N_i}\bar{\boldsymbol{q}}_{ij}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{q}}_{ij}(t)}.$$

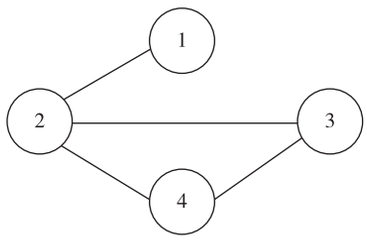


图 5 成员航天器间的通信拓扑

Fig. 5 Communication topology of member spacecrafts

3.1 存在信号量化时的控制器设计

本节将通过仿真算例验证 2.1 节所提出的姿态协同控制器的性能.设置仿真时间为 300 s,采样时间间隔为 0.1 s;量化器(3)的相关参数设置为 $\boldsymbol{x}_0=0.000\,1$,$\rho=0.5$,$\delta=\dfrac{1}{3}$;姿态协同控制器(11)的相关参数设置为 $c=0.005$,$d=1.6$.对应的航天器编队状态保持度函数$e_{\mathrm{s}}(t)$ 的状态曲线和编队保持度函数$e_{\mathrm{f}}(t)$ 变化曲线分别如图 6 和图 7 所示.可以看出,在姿态协同控制器(11)的作用下,各成员航天器的姿态渐近地趋于一致.

此外,考虑 1 号成员航天器,其参数变化曲线如图 8—13 所示.可以看出,1 号成员航天器的姿态误差在 300 s 内快速收敛,同时超调较小,控制力矩曲线变化平滑,符合工程中的实际要求.另外,虽然 1 号成员航天器的角速度误差没有实现渐近稳定,但其精度也在合理范围内.

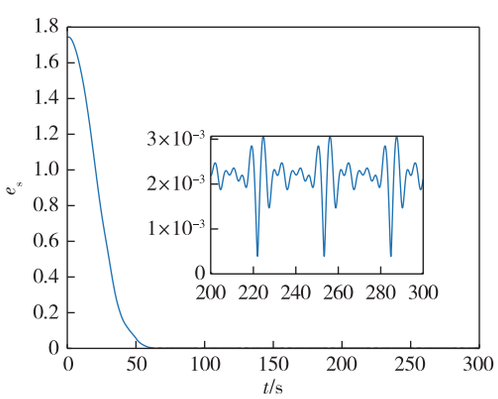


图 6 航天器编队的状态保持度变化曲线(控制器 1)

Fig. 6 Trajectory of $e_{\mathrm{s}}(t)$ for spacecraft formation under controller 1

3.2 存在通信时延和信号量化时的控制器设计

本节通过仿真验证 2.2 节提出的控制器的控制性能.相关仿真参数选取如下:仿真时间设置为 300 s,采样时间间隔为 0.1 s,通信时延为 0.1 s;量

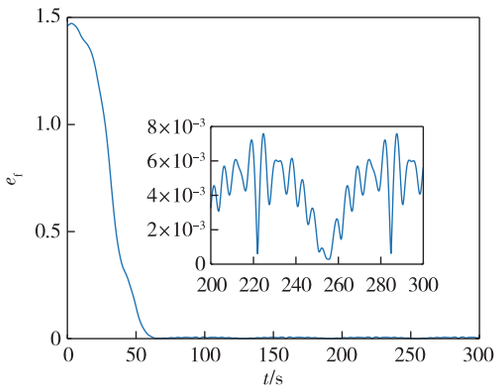


图 7　航天器编队的编队保持度变化曲线(控制器 1)

Fig. 7　Trajectory of $e_f(t)$ for spacecraft formation under controller 1

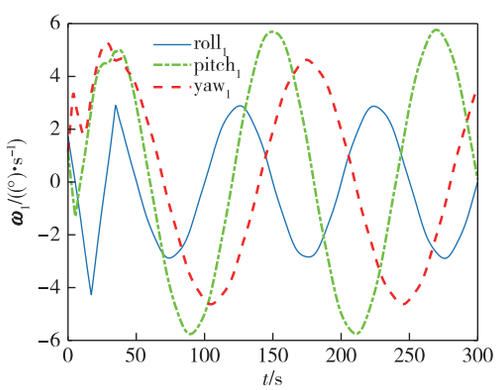


图 8　成员航天器 1 的角速度变化曲线

Fig. 8　Trajectory of $\boldsymbol{w}(t)$ for member spacecraft 1

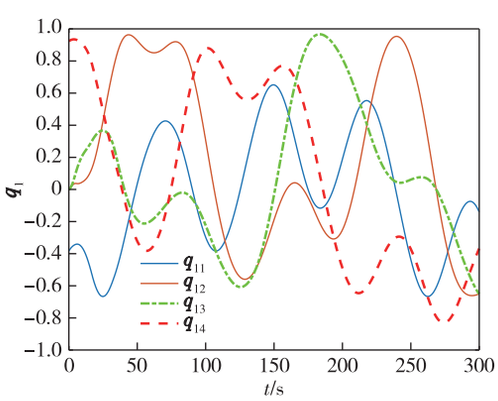


图 9　成员航天器 1 的姿态角 $\boldsymbol{q}(t)$变化曲线

Fig. 9　Trajectory of $\boldsymbol{q}(t)$ for member spacecraft 1

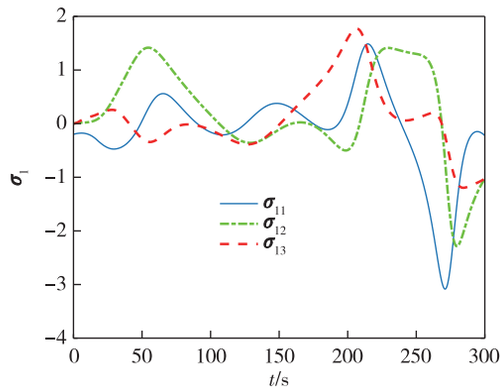


图 10　成员航天器 1 的修正罗德里格斯参数信息

Fig. 10　Trajectory of MRP for member spacecraft 1

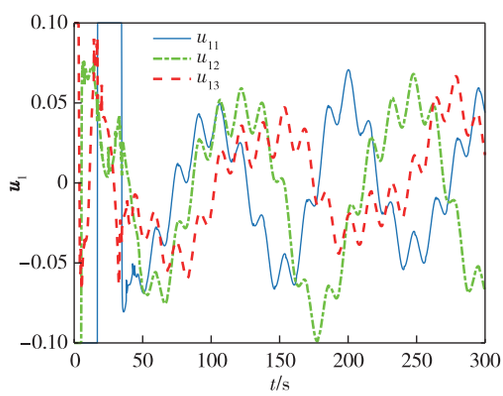


图 11　成员航天器 1 的控制器输入扭矩信息

Fig. 11　Trajectory of controller torque for member spacecraft 1

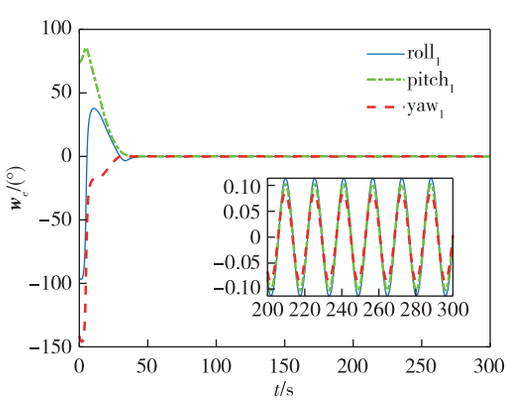


图 12　成员航天器 1 的角速度误差变化曲线

Fig. 12　Trajectory of $\boldsymbol{w}_e(t)$ for member spacecraft 1

化器(3)的参数设置为 $x_0 = 0.000\ 1$,$\rho = 0.5$,$\delta = 1/3$;姿态协同控制器(23)的相关参数设置为 $\alpha = 0.015$,$\beta = 0.03$,$p = 5$,$q = 3$,$k_p = 2.5$.仿真结果如图 14—21 所示.其中航天器编队的状态保持度 $e_s(t)$ 变化曲线和编队保持度 $e_f(t)$ 变化曲线分别如图 14 和图 15 所示.可以看出,在控制器(23)的作用下,编队航天器的状态保持度和编队保持度是渐近稳定的.

此外,2 号成员航天器的参数变化曲线如图 16—21 所示.可以看出,2 号航天器的姿态误差也具有快速收敛、超调较小、控制力矩曲线变化平滑以及

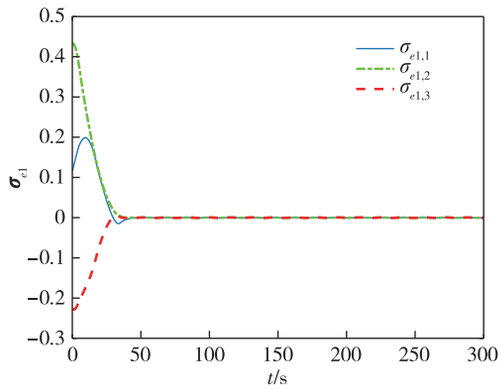


图 13　成员航天器 1 的姿态误差变化曲线

Fig. 13　Trajectory of $\boldsymbol{\sigma}_e(t)$ for member spacecraft 1

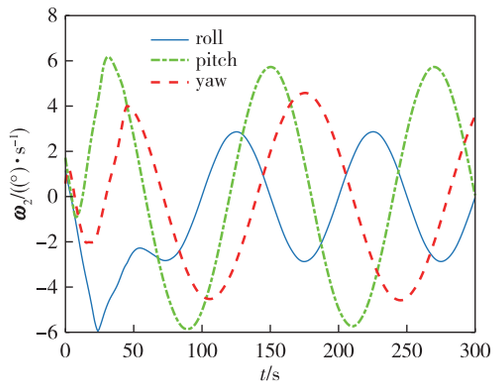


图 16　成员航天器 2 的角速度变化曲线

Fig. 16　Trajectory of $\boldsymbol{w}(t)$ for member spacecraft 2

易于实现等优点,但是和上一小节的仿真结果相比,本小节中 2 号航天器的姿态误差的收敛速度稍微慢一些.这个现象和两种控制器(控制器(11)和控制器(23))中滑模面函数的结构不同有关.

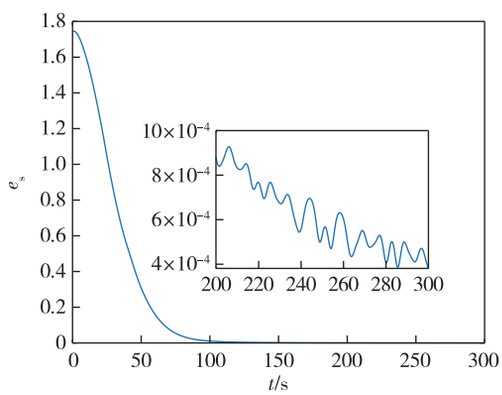


图 14　航天器编队的状态保持度变化曲线(控制器 2)

Fig. 14　Trajectory of $e_s(t)$ for spacecraft formation under controller 2

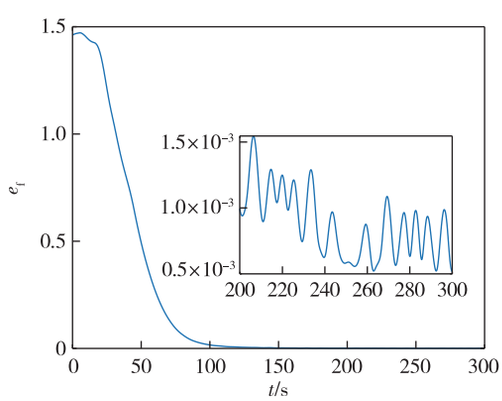


图 15　航天器编队的编队保持度变化曲线(控制器 2)

Fig. 15　The trajectory of $e_f(t)$ for spacecraft formation under controller 2

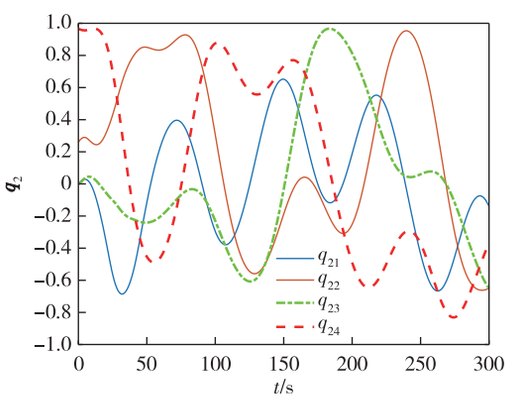


图 17　成员航天器 2 的姿态角 $\boldsymbol{q}(t)$ 变化曲线

Fig. 17　Trajectory of $\boldsymbol{q}(t)$ for member spacecraft 2

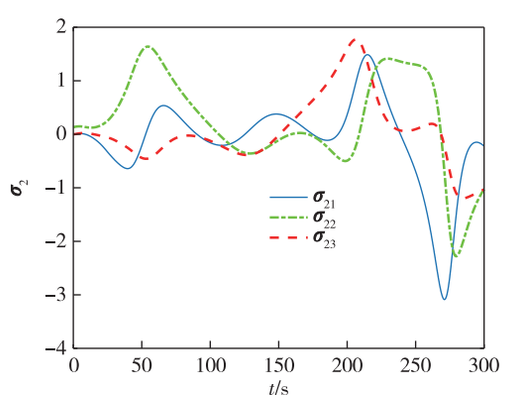


图 18　成员航天器 2 的修正罗德里格斯参数信息

Fig. 18　Trajectory of MRP for member spacecraft 2

4　结论

本文研究了存在通信时延情形下基于信号量化策略的编队航天器协同控制问题,分别采用终端滑模面、指对数滑模面设计了编队航天器姿态协同控制器,保证编队航天器能够在有限时间内达到期望

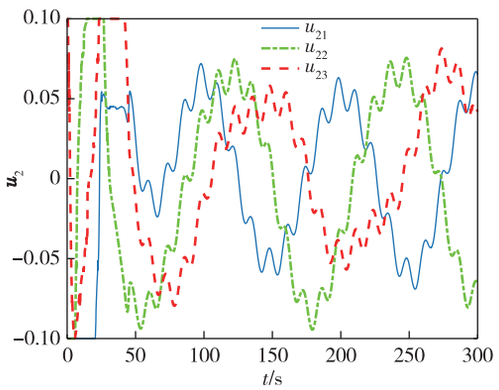


图 19　成员航天器 2 的控制器输入扭矩信息

Fig. 19　Trajectory of $\boldsymbol{u}(t)$ for member spacecraft 2

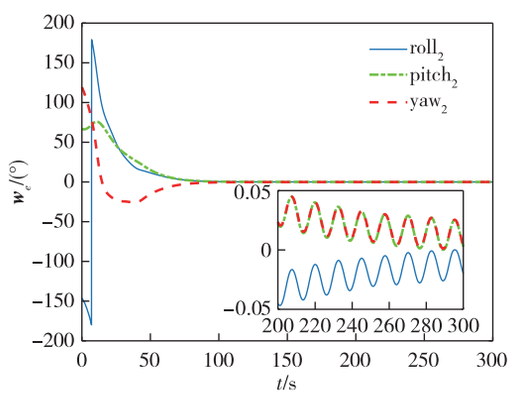


图 20　成员航天器 2 的角速度误差变化曲线

Fig. 20　Trajectory of $\boldsymbol{w}_e(t)$ for member spacecraft 2

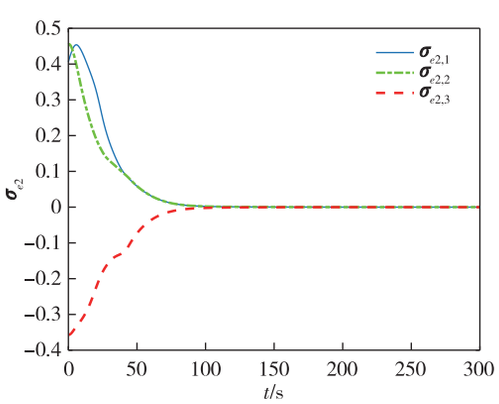


图 21　成员航天器 2 的姿态误差变化曲线

Fig. 21　Trajectory of $\boldsymbol{\sigma}_e(t)$ for member spacecraft 2

的姿态协同.未来工作将关注于挠性航天器编队以及有向通信拓扑情形下的编队航天器姿态协同控制问题.

参考文献

References

[1] Wang W J,Li C J,Sun Y C,et al.Distributed coordinated attitude tracking control for spacecraft formation with communication delays[J].ISA Transactions,2019,85:97-106

[2] 张健.多航天器编队姿态协同控制算法研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2017
ZHANG Jian.Research on attitude coordinated control for multiple spacecraft formation [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology,2017

[3] 解延浩.星间通信受限航天器姿态协同控制方法研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2017
XIE Yanhao. Spacecraft attitude synchronization control under constrained communication[D].Harbin:Harbin Institute of Technology,2017

[4] Tabuada P.Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2007,52(9):1680-1685

[5] Wu B L, Shen Q, Cao X B. Event-triggered attitude control of spacecraft[J].Advances in Space Research,2018,61(3):927-934

[6] Liberzon D.On stabilization of linear systems with limited information[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2003,48(2):304-307

[7] Ishii H,Francis B A.Stabilizing a linear system by switching control with dwell time[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2002,47(12):1962-1973

[8] Fu M Y,Xie L H.The sector bound approach to quantized feedback control[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2005,50(11):1698-1711

[9] Wu B L. Spacecraft attitude control with input quantization[J].Journal of Guidance, Control, and Dynamics,2016,39(1):176-181

[10] 程晓梅.基于终端滑模理论的多航天器编队有限时间姿态协同控制[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2017
CHENG Xiaomei.Finite time attitude control for multiple spacecraft formation based on terminal sliding mode theory[D].Harbin:Harbin Institute of Technology,2017

[11] Hui L,Li J F.Terminal sliding mode control for spacecraft formation flying[J].IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2009,45(3):835-846

[12] 叶东,屠园园,孙兆伟.面向非沿轨迹成像的切比雪夫神经网络滑模姿态控制[J].航空学报,2015,36(9):3092-3104
YE Dong,TU Yuanyuan,SUN Zhaowei.Sliding mode control for nonparallel-ground-track imaging using Chebyshev neural network[J].Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2015,36(9):3092-3104

[13] Lee D,Sanyal A,Butcher E,et al.Finite-time control for spacecraft body-fixed hovering over an asteroid[J].IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2015,51(1):506-520

Cooperative attitude control for spacecraft formation with limited communication based on terminal and exponent-logarithmic sliding mode

YI Hang[1] CHEN Xueqin[1] LIU Ming[1]
1 School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

Abstract The cooperative attitude control is addressed for spacecraft formation with unreliable communication and signal quantization among spacecrafts. First, to save the data rate and bandwidth among the spacecrafts, a signal quantization communication strategy is proposed among each two spacecrafts in the formation, and a terminal sliding mode attitude control law is developed to ensure the asymptotic stability of the spacecraft formation attitude synchronization systems. Second, to compensate the effects of communication delay and signal quantization, an exponent-logarithmic sliding mode surface design is presented, based on which a cooperative attitude control strategy is developed for spacecraft formation to achieve desirable attitude in finite-time. Finally, a simulation example with four spacecrafts in a formation system is provided to verify the effectiveness of the proposed cooperative control method.

Key words spacecraft formation; cooperative attitude control; terminal sliding mode control; exponent-logarithmic sliding mode control; networked control