DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2019.04.010

张建梅[1]　包海波[1]　曹进德[2]

参数不匹配下含有泄露时滞与多个传输时滞的分数阶忆阻器神经网络的拟同步

摘要

本文主要讨论了一类在参数不匹配之下带有多个传输时滞与泄露时滞的分数阶忆阻器神经网络的拟同步问题.首先,给出了时滞线性反馈控制器;然后,根据分数阶微分包含、集合值映射理论和分数阶微分不等式理论等,得出了主从系统达到拟同步所满足的条件以及所对应的误差边界;最后,给出了一些数值模拟验证所得结论的有效性.

关键词

分数阶;神经网络;拟同步;泄露时滞

中图分类号 TP13

文献标志码 A

收稿日期 2019-06-13

资助项目 国家自然科学基金(61573291,61573096)

作者简介

张建梅,女,硕士生,主要研究方向为神经网络的同步控制.2268557596@qq.com

包海波(通信作者),女,博士,博士生导师,主要研究方向为复杂网络、神经网络理论及其应用、分数阶系统等.hbbao@swu.edu.cn

1 西南大学 数学与统计学院,重庆,400715

2 东南大学 数学学院,南京,210096

0 引言

分数阶微积分起源于17世纪,它是整数阶微积分运算向任意阶次微积分运算的推广,这里的"分数"可以是有理分数、无理小数或者复数[1].研究表明,分数阶微积分在描述一些具有记忆和遗传性质的材料和过程方面拥有更多的优势.

人工神经网络,简称神经网络,是由通过简单处理的神经单元广泛连接起来形成的复杂网络系统,它是对人脑神经网络的简单模仿,其基础是人脑处理信息的原理,实际上是一种非线性自适应动态网络系统.与整数阶的微积分相比,分数阶的微积分能够更好地去刻画各种材料与物质的记忆和遗传特性.另外,神经元间的突触是有一定的记忆功能的,所以,如果将分数阶微积分纳入神经网络模型中,就可以更加准确地刻画出神经网络的动力学特征.近年来,关于分数阶神经网络模型的研究已有不少研究成果[2-6].

忆阻,是记忆和电阻的合称,它是1971年被科学家Chua[7]提出的.简单地说,忆阻是一种有记忆功能的非线性电阻,通过控制电流的变化可以改变其阻值.基于忆阻器的神经网络模型,是一种连接权重依靠状态的非线性系统,因此更易产生复杂的动力学行为.

信号在神经网络中的传递是需要一定时间的,而在神经网络硬件实施的过程中,放大器的转换速度是有限的,所以,时滞在神经网络模型中是无处不在的.而时滞意味着神经网络模型的动态行为应该与神经元过去的时间状态有关,这就在一定程度上反映了大脑本身的特点,所以,为了准确地刻画神经网络模型的动力学行为,应该引入轴突信号传输时滞.在实际研究中,泄露时滞却很少涉及,而事实上,泄露时滞对神经网络的动力学行为也具有非常重要的影响.

"同步",意指时间上不同过程的一致性,而在数学模型中它具体指的是:若一个系统的轨线与另一个系统的轨线收敛于相同的一个值,就称这两个系统是同步的.近些年来,关于分数阶的神经网络有很多类型的同步[8-11],例如,全局Mittag-Leffler同步[8]、投影同步[9]、指数同步[10]以及拟同步[11]等.然而,参数不匹配是无处不在的,因此,在实际生活中,完全同步很难实现.也就是说,随着时间的推移,同步误差不可能趋向于0.因此,知道同步误差边界进而在这个小区域内实施

控制来使它达到同步是非常具有研究价值的.事实上,许多控制方法已经被试图用来研究在参数不匹配下混沌系统的同步问题[11-12].

基于以上分析,本文研究一类在参数不匹配情况下含有泄露时滞与多个传输时滞的分数阶忆阻器神经网络的拟同步问题.

1 一些预备知识和模型的建立

1.1 预备知识

引理1[13] 如果$h(t)\in C^1([0,+\infty),\mathbf{R})$表示一个连续可微的函数,则对于任意的$\alpha\in(0,1)$,有如下的不等式几乎处处成立:

$$D^\alpha|h(t)|\leqslant \operatorname{sign}(h(t))D^\alpha h(t).$$

引理2[14] 令$G(t)$是定义在区间$[0,+\infty)$上的一个连续函数,如果存在两个常数$\eta_1>0$和$\eta_2>0$使得$D^\alpha G(t)\leqslant-\eta_1 G(t)+\eta_2, t\geqslant 0$,则有:$G(t)\leqslant G(0)E_\alpha(-\eta_1 t^\alpha)+\eta_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\eta_1 t^\alpha)$,$t\geqslant 0$,其中,$0<\alpha<1$,$E_\alpha(\cdot)$与$E_{\alpha,\alpha+1}(\cdot)$分别是含有一个参数和两个参数的Mittag-Leffler函数.

引理3[12] 如果$0<\alpha<2,\beta$是一个任意的复数,μ满足$\frac{\pi\alpha}{2}<\mu<\min\{\pi,\pi\alpha\}$,那么就有$\lim\limits_{|z|\to\infty}|z||E_{\alpha,\beta}(z)|\leqslant\frac{1}{|\Gamma(\beta-\alpha)|}$,$\lim\limits_{|z|\to\infty}|E_{\alpha,\beta}(z)|=0$,其中$\mu\leqslant|\arg(z)|\leqslant\pi$.

1.2 模型的建立

考虑如下的模型:

$$D^\alpha x_i(t)=-c_i x_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^n\gamma_{ij}(x_j(t))f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^n\rho_{ij}(x_j(t))g_j(x_j(t-\tau_j)),\quad(1)$$

其中,分数阶$\alpha\in(0,1]$,$i=1,2,\cdots,n$是神经元的个数,$x_i(t)$是电容器C_i的电压,$c_i>0$是第i个神经元的自我调控系数,$f_j(\cdot)$,$g_j(\cdot)$表示神经元的激活函数且满足$f_j(0)=g_j(0)=0$,τ_j是时滞,γ_{ij},ρ_{ij}表示忆阻连接权重,表达式为

$$\gamma_{ij}(x_j(t))=\begin{cases}\gamma_{ij}^{*}, & |x_j(t)|\leqslant T_j,\\ \gamma_{ij}^{**}, & |x_j(t)|>T_j,\end{cases}$$

$$\rho_{ij}(x_j(t))=\begin{cases}\rho_{ij}^{*}, & |x_j(t)|\leqslant T_j,\\ \rho_{ij}^{**}, & |x_j(t)|>T_j,\end{cases}$$

这里$i,j=1,2,\cdots,n$,开关跳跃$T_j>0$,和γ_{ij}^{*},γ_{ij}^{**},ρ_{ij}^{*},ρ_{ij}^{**}都是常数.

若把系统(1)当作主系统,则从系统可以类似地描述为

$$D^\alpha y_i(t)=-c_i' y_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^n\gamma_{ij}'(y_j(t))f_j(y_j(t))+\sum_{j=1}^n\rho_{ij}'(y_j(t))g_j(y_j(t-\tau_j))+u_i(t),\quad(2)$$

其中,$i=1,2,\cdots,n$,$y_i(t)$是第i个神经元的状态变量,$c_i'>0$是第i个神经元的自我调控系数,τ_j是时滞,$u_i(t)$是控制输入,γ_{ij}',ρ_{ij}'表示忆阻连接权重,表达式为

$$\gamma_{ij}'(y_j(t))=\begin{cases}\gamma_{ij}'^{*}, & |y_j(t)|\leqslant T_j,\\ \gamma_{ij}'^{**}, & |y_j(t)|>T_j,\end{cases}$$

$$\rho_{ij}'(y_j(t))=\begin{cases}\rho_{ij}'^{*}, & |y_j(t)|\leqslant T_j,\\ \rho_{ij}'^{**}, & |y_j(t)|>T_j,\end{cases}$$

这里$i,j=1,2,\cdots,n$,开关跳跃$T_j>0$,和$\gamma_{ij}'^{*}$,$\gamma_{ij}''^{**}$,$\rho_{ij}'^{*}$,$\rho_{ij}'^{**}$都是常数.

因为$\gamma_{ij}(x_j(t))$,$\rho_{ij}(x_j(t))$,$\gamma_{ij}'(y_j(t))$,$\rho_{ij}'(y_j(t))$是不连续的,因此,主系统(1)与从系统(2)的解应在Filippov's解的意义下定义,根据集合值映射与微分包含理论,主系统(1)与从系统(2)可以变为

$$D^\alpha x_i(t)\in-c_i x_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^n K[\gamma_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^n K[\rho_{ij}(x_j(t))]g_j(x_j(t-\tau_j)),$$

与

$$D^\alpha y_i(t)\in-c_i' y_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^n K[\gamma_{ij}'(y_j(t))]f_j(y_j(t))+\sum_{j=1}^n K[\rho_{ij}'(y_j(t))]g_j(y_j(t-\tau_j))+u_i(t),$$

其中

$$K[\gamma_{ij}(x_j(t))]=\begin{cases}\gamma_{ij}^{*}, & |x_j(t)|<T_j,\\ \operatorname{co}\{\gamma_{ij}^{*},\gamma_{ij}^{**}\}, & |x_j(t)|=T_j,\\ \gamma_{ij}^{**}, & |x_j(t)|>T_j,\end{cases}$$

$$K[\rho_{ij}(x_j(t))]=\begin{cases}\rho_{ij}^{*}, & |x_j(t)|<T_j,\\ \operatorname{co}\{\rho_{ij}^{*},\rho_{ij}^{**}\}, & |x_j(t)|=T_j,\\ \rho_{ij}^{**}, & |x_j(t)|>T_j,\end{cases}$$

$$K[\gamma_{ij}'(y_j(t))]=\begin{cases}\gamma_{ij}'^{*}, & |y_j(t)|<T_j,\\ \operatorname{co}\{\gamma_{ij}'^{*},\gamma_{ij}''^{**}\}, & |y_j(t)|=T_j,\\ \gamma_{ij}'^{**}, & |y_j(t)|>T_j,\end{cases}$$

$$K[\rho_{ij}'(y_j(t))]=\begin{cases}\rho_{ij}'^{*}, & |y_j(t)|<T_j,\\ \operatorname{co}\{\rho_{ij}''^{*},\rho_{ij}'^{**}\}, & |x_j(t)|=T_j,\\ \rho_{ij}'^{**}, & |y_j(t)|>T_j,\end{cases}$$

这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,

$\mathrm{co}\{\gamma_{ij}^{*},\gamma_{ij}^{**}\}=[\underline{\gamma_{ij}},\overline{\gamma_{ij}}]$, $\mathrm{co}\{\rho_{ij}^{*},\rho_{ij}^{**}\}=[\underline{\rho_{ij}},\overline{\rho_{ij}}]$,

$\mathrm{co}\{\gamma_{ij}'^{*},\gamma_{ij}'^{**}\}=[\underline{\gamma_{ij}'},\overline{\gamma_{ij}'}]$, $\mathrm{co}\{\rho_{ij}'^{*},\rho_{ij}'^{**}\}=[\underline{\rho_{ij}'},\overline{\rho_{ij}'}]$,

$\overline{\gamma_{ij}}=\max\{\gamma_{ij}^{*},\gamma_{ij}^{**}\}$, $\underline{\gamma_{ij}}=\min\{\gamma_{ij}^{*},\gamma_{ij}^{**}\}$,

$\overline{\rho_{ij}}=\max\{\rho_{ij}^{*},\rho_{ij}^{**}\}$, $\underline{\rho_{ij}}=\min\{\rho_{ij}^{*},\rho_{ij}^{**}\}$,

$\overline{\rho_{ij}'}=\max\{\rho_{ij}'^{*},\rho_{ij}'^{**}\}$, $\underline{\rho_{ij}'}=\min\{\rho_{ij}'^{*},\rho_{ij}'^{**}\}$,

$\overline{\gamma_{ij}'}=\max\{\gamma_{ij}'^{*},\gamma_{ij}'^{**}\}$, $\underline{\gamma_{ij}'}=\min\{\gamma_{ij}'^{*},\gamma_{ij}'^{**}\}$.

或者根据测度选择定理[15],可知存在可测函数

$a_{ij}(x_j(t))\in K[\gamma_{ij}(x_j(t))]$,

$b_{ij}(x_j(t))\in K[\rho_{ij}(x_j(t))]$,

$a'_{ij}(y_j(t))\in K[\gamma'_{ij}(y_j(t))]$,

$b'_{ij}(y_j(t))\in K[\rho'_{ij}(y_j(t))]$

使得:

$$D^{\alpha}x_i(t)=-c_ix_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j(t))f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x_j(t))g_j(x_j(t-\tau_j)),\tag{3}$$

$$D^{\alpha}y_i(t)=-c_i'y_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}(y_j(t))f_j(y_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b'_{ij}(y_j(t))g_j(y_j(t-\tau_j))+u_i(t).\tag{4}$$

为了得到有效结论,先作以下假设:

假设 1 激活函数 $f_j(\cdot),g_j(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的,且 Lipschitz 正常数分别为 L_j,M_j,也就是说对于任意的 $u,v\in\mathbf{R}$ 和 $j=1,2,\cdots,n$,都有

$|f_j(u)-f_j(v)|\leqslant L_j|u-v|$,

$|g_j(u)-g_j(v)|\leqslant M_j|u-v|$.

可以发现,主系统(1)和从系统(2)中的连接权重 $\gamma_{ij}(x_j(t)),\rho_{ij}(x_j(t)),\gamma'_{ij}(y_j(t)),\rho'_{ij}(y_j(t))$ 都是与状态变量有关的一个量,因此,初值 $x_j(t)$ 与 $y_j(t)$ 的不同可能会引起参数不匹配,这就不可能实现完全同步,但是可以实现拟同步.下面给出拟同步的定义:

定义 1[10] 对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $T\geqslant 0$,使得对于所有的 $t\geqslant T$,以及任意给定的初始条件 $\vartheta_x(s),\vartheta_y(s)\in C([-\tau,0],\mathbf{R}^n)$,其中 $\tau=\max\{\sigma,\tau_j\}$ 都有

$\|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\varepsilon$,

则主从系统(1)与(2)就可以实现拟同步.其中,$\boldsymbol{y}(t)=[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$,$\|\cdot\|$ 表示向量 $\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}(t)$ 的 1-范数.

1.3 同步结果

定义同步误差 $e_i(t)=y_i(t)-x_i(t)$,且控制输入设计为

$$u_i(t)=-k_ie_i(t)-\mathrm{sign}(e_i(t))k_i^{*}|e_i(t-\sigma)|-\mathrm{sign}(e_i(t))k_i^{**}\sum_{j=1}^{n}|e_i(t-\tau_j|,\tag{5}$$

于是,主从系统(3)与(4)所对应的误差系统为

$$\begin{aligned}D^{\alpha}e_i(t)=&-c_i'e_i(t-\sigma)-\mathrm{sign}(e_i(t))k_i^{*}|e_i(t-\sigma)|-\\&\mathrm{sign}(e_i(t))k_i^{**}\sum_{j=1}^{n}|e_i(t-\tau_j)|+\\&\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}(y_j(t))[f_j(y_j(t))-f_j(x_j(t))]+\\&\sum_{j=1}^{n}b'_{ij}(y_j(t))[g_j(y_j(t-\tau_j))-\\&g_j(x_j(t-\tau_j))]+\sum_{j=1}^{n}[a'_{ij}(y_j(t))-\\&a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t))+(c_i-c_i')x_i(t-\sigma)+\\&\sum_{j=1}^{n}[b'_{ij}(y_j(t))-b_{ij}(x_j(t))]g_j(x_j(t-\tau_j))-\\&k_ie_i(t).\end{aligned}\tag{6}$$

令

$\Delta c_i=(c_i-c_i')$, $\Delta a_{ij}=\sup\limits_{x,y\in\mathbf{R}}|a'_{ij}(y_j(t)-a_{ij}(x_j(t))|$,

$\Delta b_{ij}=\sup\limits_{x,y\in\mathbf{R}}|b'_{ij}(y_j(t)-b_{ij}(x_j(t))|$,

$$\begin{aligned}h_i(t)=&(c_i-c_i')x_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^{n}[a'_{ij}(y_j(t))-\\&a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}[b'_{ij}(y_j(t))-\\&b_{ij}(x_j(t))]g_j(x_j(t-\tau_j)),\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{h}(t)\|=&\sum_{i=1}^{n}|h_i(t)|=\\&\sum_{i=1}^{n}|(c_i-c_i')x_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^{n}[a'_{ij}(y_j(t))-\\&a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}[b'_{ij}(y_j(t))-\\&b_{ij}(x_j(t))]g_j(x_j(t-\tau_j))|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\Delta c_i||x_i(t-\sigma)|+\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ij}|f_j(x_j(t))|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta b_{ij}|g_j(x_j(t-\tau_j))|\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}|\Delta c_i||x_i(t-\sigma)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ji}|f_i(x_i(t))|+\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta b_{ij}|g_i(x_i(t-\tau_i))|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta c_i|\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\sigma)|+\\&\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ji}\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_i(t))|+\end{aligned}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\Delta b_{ji}\sum_{i=1}^{n}|g_j(x_j(t-\tau_i))|\leqslant$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta c_i|\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\sigma)|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ji}L_{\max}\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\Delta b_{ji}M_{\max}\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\tau_i)|=\|\Delta\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{x}(t-\sigma)\|+$$

$$\|\Delta\boldsymbol{A}\|L_{\max}\|\boldsymbol{x}(t)\|+\|\Delta\boldsymbol{B}\|M_{\max}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|.$$

其中,

$$\Delta\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(\Delta c_1,\Delta c_2,\cdots,\Delta c_n),$$

$$\Delta\boldsymbol{A}=(\Delta a_{ij})_{n\times n},\Delta\boldsymbol{B}=(\Delta b_{ij})_{n\times n},$$

$$L_{\max}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}L_i,M_{\max}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}M_i.$$

由于混沌系统的解轨线是有界的,所以可以假设:存在一个常数 $h>0$ 使得对于所有的 $t\geqslant\max\{-\sigma,-\tau_i\}$,都有$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\boldsymbol{h}$,因此存在一个常数 h^* 使得:

$$\|\boldsymbol{h}(t)\|\leqslant(\|\Delta\boldsymbol{C}\|+\|\Delta\boldsymbol{A}\|L_{\max}+\|\Delta\boldsymbol{B}\|M_{\max})\boldsymbol{h}=h^*. \tag{7}$$

定理 1 基于假设 1 之下,如果下面的三个条件成立:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(k_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma'_{ji}L_i)>0,$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(k_i^*-|c'_i|)\geqslant 0,$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\sum_{j=1}^{n}k_i^{**}-\sum_{j=1}^{n}\rho'_{ji}M_i)\geqslant 0,$$

那么主系统(1)与从系统(2)在控制函数(5)下可以达到拟同步,且误差边界为$\frac{h^*}{\lambda}$,其中,

$$\lambda=\min_{1\leqslant i\leqslant n}(k_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma'_{ji}L_i)>0,$$

$$h^*=(\|\Delta\boldsymbol{C}\|+\|\Delta\boldsymbol{A}\|L_{\max}+\|\Delta\boldsymbol{B}\|M_{\max})\boldsymbol{h}.$$

证明 考虑如下的 Lyapunov 函数:

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n}|e_i(t)|,$$

根据引理 1 和假设 1,再结合式(7)可得:

$$D^\alpha V(t)=\sum_{i=1}^{n}|e_i(t)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sign}(e_i(t))D^\alpha e_i(t)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sign}(e_i(t))[-k_ie_i(t)-\mathrm{sign}(e_i(t))k_i^*|e_i(t-\sigma)|-$$

$$\mathrm{sign}(e_i(t))k_i^{**}\sum_{j=1}^{n}|e_i(t-\tau_j)|-c'_ie_i(t-\sigma)+$$

$$\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}(y_j(t))[f_j(y_j(t))-f_j(x_j(t))]+$$

$$\sum_{j=1}^{n}b'_{ij}(y_j(t))[g_j(y_j(t-\tau_j))-g_j(x_j(t-\tau_j))]+$$

$$\sum_{j=1}^{n}[a'_{ij}(y_j(t))-a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t))+$$

$$(c_i-c'_i)x_i(t-\sigma)+\sum_{j=1}^{n}[b'_{ij}(y_j(t))-$$

$$b_{ij}(x_j(t))]g_j(x_j(t-\tau_j))]\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}[-k_i|e_i(t)|-k_i^*|e_i(t-\sigma)|-$$

$$k_i^{**}\sum_{j=1}^{n}|e_i(t-\tau_j)|+|c'_i||e_i(t-\sigma)|+$$

$$\sum_{j=1}^{n}a'^{u}_{ij}L_j|e_j(t)|+\sum_{j=1}^{n}b'^{u}_{ij}M_j|e_j(t-\tau_j)|+|h_i(t)|]=$$

$$\sum_{i=1}^{n}[-k_i|e_i(t)|-k_i^*|e_i(t-\sigma)|-k_i^{**}\sum_{j=1}^{n}|e_i(t-\tau_j)|+$$

$$|c'_i||e_i(t-\sigma)|+\sum_{j=1}^{n}a'^{u}_{ji}L_i|e_i(t)|+$$

$$\sum_{j=1}^{n}b'^{u}_{ji}M_i|e_i(t-\tau_j)|+|h_i(t)|]\leqslant$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(k_i-\sum_{j=1}^{n}a'^{u}_{ji}L_i)|e_i(t)|-$$

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i^*-|c'_i|)|e_i(t-\sigma)|-$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}k_i^{**}-\sum_{j=1}^{n}b'^{u}_{ji}M_i)|e_i(t-\tau_j)|+h^*,$$

其中,$a'^{u}_{ij}=\max\{|\gamma'^{*}_{ij}|,|\gamma'^{**}_{ij}|\}$,$b'^{u}_{ij}=\max\{|\rho'^{*}_{ij}|,|\rho'^{**}_{ij}|\}$,再由定理 1 中的条件可得:$D^\alpha V(t)\leqslant-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{k_i-\sum_{j=1}^{n}a'^{u}_{ji}L_i\}\sum_{i=1}^{n}|e_i(t)|+h^*$.

令 $\lambda=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{k_i-\sum_{j=1}^{n}a'^{u}_{ji}L_i\}$,有 $D^\alpha V(t)\leqslant-\lambda V(t)+h^*$.

根据引理 2,有

$$V(t)\leqslant V(0)E_\alpha(-\lambda t^\alpha)+h^*t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda t^\alpha)\leqslant$$

$$|V(0)||E_\alpha(-\lambda t^\alpha)|+h^*t^\alpha|E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda t^\alpha)|,$$

当 $t\to+\infty$,$|-\lambda t^\alpha|\to+\infty$,然后根据引理 3,可得

$$V(t)\leqslant|V(0)||E_\alpha(-\lambda t^\alpha)|+h^*t^\alpha|E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda t^\alpha)|=$$

$$|V(0)||E_\alpha(-\lambda t^\alpha)|+h^*\frac{|-\lambda t^\alpha|}{\lambda}|E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda t^\alpha)|\leqslant$$

$$|V(0)|\cdot 0+\frac{h^*}{\lambda}\frac{1}{|\gamma(\alpha+1-\alpha)|}=$$

$$\frac{h^*}{\lambda|\gamma(1)|}=\frac{h^*}{\lambda}.$$

因此,有$\|\boldsymbol{e}(t)\|\leqslant\frac{h^*}{\lambda}$.

于是,可得误差系统(6)收敛到包含于圆点的区域 D,其中

$$D=\left\{\boldsymbol{e}\in\mathbf{R}^n\mid\|\boldsymbol{e}(t)\|\leqslant\frac{h^*}{\lambda}\right\},t\to+\infty,$$

因此,主系统(1)与从系统(2)在控制函数(5)下可以达到拟同步,且误差边界为$\frac{h^*}{\lambda}$.

注 1 本节模型是在基于含有泄露时滞与多个传输时滞的基础上建立的,所以获得的拟同步结论更具有一般性.

1.4 数值模拟

在主系统(1)中,取 $c_1=4,c_2=2,\alpha=0.98,n=2,\sigma=1,\tau_1=1,\tau_2=2,f_j(x_j)=g_j(x_j)=\tanh(x_j)$,

$$\gamma_{11}(x_1(t))=\begin{cases}2.2,&|x_1|\leqslant1,\\2.1,&|x_1|>1,\end{cases}$$

$$\gamma_{12}(x_2(t))=\begin{cases}-2.2,&|x_2|\leqslant1,\\-2.15,&|x_2|>1,\end{cases}$$

$$\gamma_{21}(x_1(t))=\begin{cases}-0.6,&|x_1|\leqslant1,\\-0.5,&|x_1|>1,\end{cases}$$

$$\gamma_{22}(x_2(t))=\begin{cases}2.5,&|x_2|\leqslant1,\\2.8,&|x_2|>1,\end{cases}$$

$$\rho_{11}(x_1(t))=\begin{cases}-4,&|x_1|\leqslant1,\\-3.8,&|x_1|>1,\end{cases}$$

$$\rho_{12}(x_2(t))=\begin{cases}-2.6,&|x_2|\leqslant1,\\-2.8,&|x_2|>1,\end{cases}$$

$$\rho_{21}(x_1(t))=\begin{cases}-1.5,&|x_1|\leqslant1,\\-1.7,&|x_1|>1,\end{cases}$$

$$\rho_{22}(x_2(t))=\begin{cases}-3.6,&|x_2|\leqslant1,\\-3.8,&|x_2|>1.\end{cases}$$

在从系统(2)中,取$c_1'=3.8,c_2'=1.8,\alpha=0.98,n=2,\sigma=1,\tau_1=1,\tau_2=2,f_j(y_j)=g_j(y_j)=\tanh(y_j)$,

$$\gamma'_{11}(y_1(t))=\begin{cases}2.2,&|y_1|\leqslant1,\\2.1,&|y_1|>1,\end{cases}$$

$$\gamma'_{12}(y_2(t))=\begin{cases}-2.1,&|y_2|\leqslant1,\\-2.3,&|y_2|>1,\end{cases}$$

$$\gamma'_{21}(y_1(t))=\begin{cases}-0.7,&|y_1|\leqslant1,\\-0.4,&|y_1|>1,\end{cases}$$

$$\gamma'_{22}(y_2(t))=\begin{cases}2.5,&|y_2|\leqslant1,\\2.7,&|y_2|>1,\end{cases}$$

$$\rho'_{11}(y_1(t))=\begin{cases}-3.9,&|y_1|\leqslant1,\\-3.8,&|y_1|>1,\end{cases}$$

$$\rho'_{12}(y_2(t))=\begin{cases}-2.5,&|y_2|\leqslant1,\\-2.6,&|y_2|>1,\end{cases}$$

$$\rho'_{21}(y_1(t))=\begin{cases}-1.8,&|y_1|\leqslant1,\\-1.6,&|y_1|>1,\end{cases}$$

$$\rho'_{22}(y_2(t))=\begin{cases}-3.5,&|y_2|\leqslant1,\\-3.7,&|y_2|>1.\end{cases}$$

如果没有控制,也就是说取 $k_1=k_1^*=k_1^{**}=k_2=k_2^*=k_2^{**}=0$,就可以从图1—4中分别看到主从系统(1)与(2)中状态变量 $x_1(t),y_1(t),x_2(t),y_2(t)$ 的曲线行为以及误差系统(6)中状态变量 $e_1(t),e_2(t)$ 的轨线,很显然,它们是不同步的.

若取 $k_1=22,k_1^*=23,k_1^{**}=14,k_2=24,k_2^*=25,k_2^{**}=15$,显然,定理1中的条件是满足的,因此主从系统(1)与(2)是可以达到拟同步的,另外,也可以从图5—8中看出来.

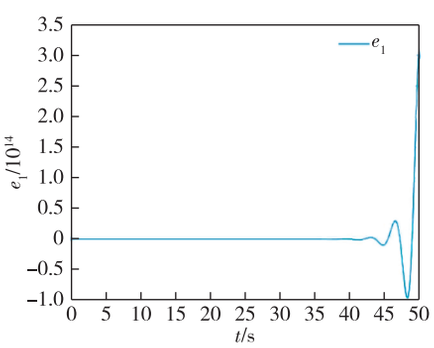


图1 无控制时误差系统(6)中状态变量 $e_1(t)$ 的轨线

Fig. 1 Curve behavior of state variables $e_1(t)$ in error system without control

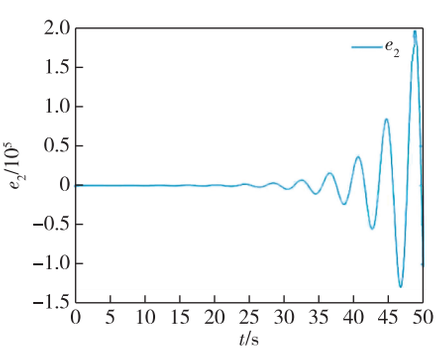


图2 无控制时误差系统(6)中状态变量 $e_2(t)$ 的轨线

Fig. 2 Curve behavior of state variables $e_2(t)$ in error system without control

2 讨论和小结

本文讨论了一类在参数不匹配之下且具有泄露

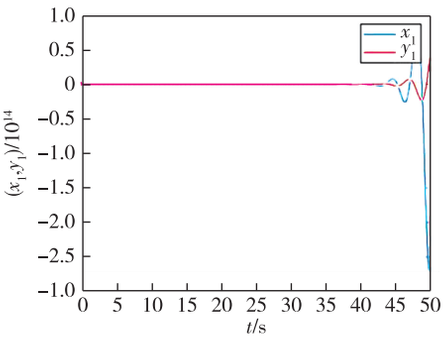


图 3　无控制时不同状态变量 $x_1(t)$,$y_1(t)$的轨线

Fig. 3　Curve behavior of different state variables $x_1(t)$,$y_1(t)$ without control

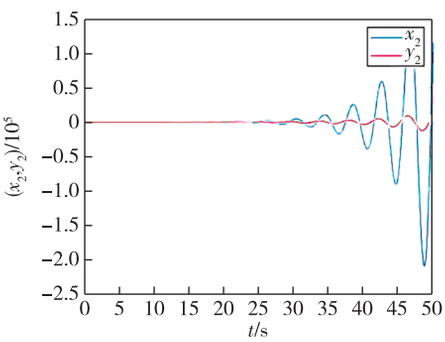


图 4　无控制时不同状态变量 $x_2(t)$,$y_2(t)$的轨线

Fig. 4　Curve behavior of different state variables $x_2(t)$,$y_2(t)$ without control

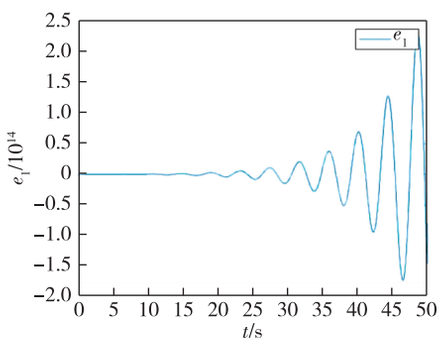


图 5　实施控制后误差系统(6)中状态变量 $e_1(t)$的轨线

Fig. 5　Curve behavior of state variables $e_1(t)$ in error system with control

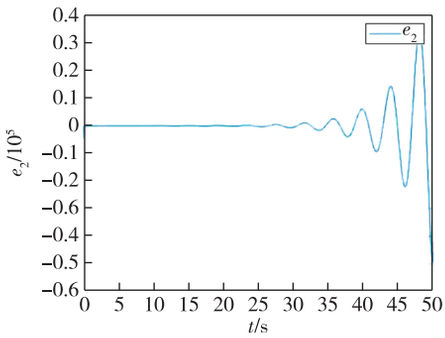


图 6　实施控制后误差系统(6)中状态变量 $e_2(t)$的轨线

Fig. 6　Curve behavior of state variables $e_2(t)$ in error system with control

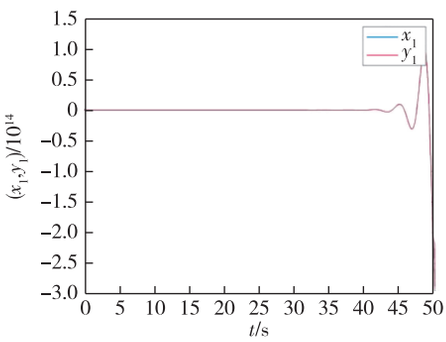


图 7　实施控制后不同状态变量 $x_1(t)$,$y_1(t)$的轨线

Fig. 7　Curve behavior of different state variables $x_1(t)$,$y_1(t)$ with control

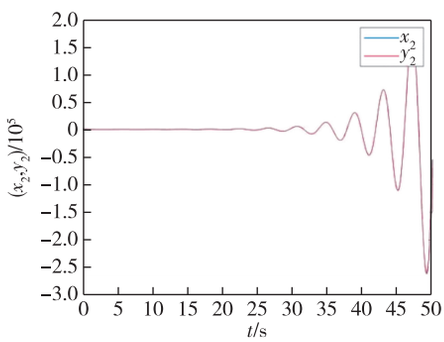


图 8　实施控制后不同状态变量 $x_2(t)$,$y_2(t)$的轨线

Fig. 8　Curve behavior of different state variables $x_2(t)$,$y_2(t)$ with control

时滞的基于分数阶忆阻器神经网络的拟同步问题. 首先,建立驱动-响应系统以及给出时滞线性反馈控制器;然后,根据微分包含、集合值映射理论,以及分数阶微分不等式理论等,得出了系统达到拟同步所满足的条件以及误差边界,可以看出误差边界与控制函数里面的系数取值以及忆阻连接权重的取值有

关;最后,给出了简单的数值模拟.

参考文献

References

[1] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. New York:Academic Press,1999
[2] Wu A L,Liu L,Huang T W,et al.Mittag-Leffler stability of fractional-order neural networks in the presence of generalized piecewise constant arguments[J].Neural Networks,2017,85:118-127
[3] Yang X J,Li C D,Huang T W,et al.Global Mittag-Leffler synchronization of fractional-order neural networks via impulsive control[J].Neural Processing Letters,2018,48(1):459-479
[4] Thuan M V,Huong D C,Hong D T.New results on robust finite-time passivity for fractional-order neural networks with uncertainties[J].Neural Processing Letters,2018,5:1-14
[5] Yang X J,Li C D,Song Q K,et al.Global Mittag-Leffler stability and synchronization analysis of fractional-order quaternion-valued neural networks with linear threshold neurons[J].Neural Networks,2018,105:88-103
[6] Fan Y J,Huang X,Wang Z,et al.Nonlinear dynamics and chaos in a simplified memristor-based fractional-order neural network with discontinuous memductance function[J].Nonlinear Dynamics,2018,93(2):611-627
[7] Chua L.Memristor-the missing circuit element[J].IEEE Transactions on Circuit Theory,1971,18(5):507-519
[8] Chen J Y,Li C D,Yang X J.Global Mittag-Leffler projective synchronization of nonidentical fractional-order neural networks with delay via sliding mode control[J].Neurocomputing,2018,313:324-332
[9] Zhang W W,Cao J D,Wu R C,et al.Projective synchronization of fractional-order delayed neural networks based on the comparison principle[J].Advances in Difference Equations,2018,2018:73
[10] Mathiyalagan K,Park J H,Sakthivel R.Exponential synchronization for fractional-order chaotic systems with mixed uncertainties[J].Complexity,2015,21(1):114-125
[11] Huang X,Fan Y J,Jia J,et al.Quasi-synchronisation of fractional-order memristor-based neural networks with parameter mismatches[J].IET Control Theory & Applications,2017,11(14):2317-2327
[12] Tirandaz H,Karami-Mollaee A.Combination synchronization of multiple chaotic systems with uncertain parameters using adaptive hybrid modified projective control method[J].Acta Physica Polonica B,2018,49(1):59
[13] Zhang S,Yu Y,Wang H.Mittag-Leffler stability of fractional-order Hopfield neural networks[J].Nonlinear Analysis Hybrid Systems,2015,16:104-121
[14] Wu A L,Zeng Z G.Global Mittag-Leffler stabilization of fractional-order memristive neural networks[J].IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2017,28(1):206-217
[15] Aubin J P,Cellina A.Differential inclusions:set-valued maps and viability theory[M].New York:Springer,1984

Quasi-synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with leakage delay under parameter mismatches

ZHANG Jianmei[1] BAO Haibo[1] CAO Jinde[2]
1 School of Mathematics and Statistics,Southwest University,Chongqing 400715
2 School of Mathematics,Southeast University,Nanjing 210096

Abstract In this paper,we mainly discuss the quasi-synchronization problem of a class of fractional-order memristor-based neural networks with multiple transmission delays and leakage delay under parameter mismatches.Firstly,the delay linear feedback controller is given,then according to the theory of fractional-order differential inclusion,set-valued maps,fractional-order differential inequality theory and so on,the conditions for the master-slave systems to reach the quasi-synchronization and the corresponding error bounds are obtained.Finally,some corresponding numerical simulations are given to demonstrate the effectiveness of the obtained results.

Key words fractional-order;neural networks;quasi-synchronization;leakage delay