DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2018.06.012

李艳恺[1]　陈谋[1]　吴庆宪[1]

随机马尔可夫跳变系统的弹性动态输出反馈控制

摘要

本文讨论了随机噪声影响下马尔可夫跳变系统的弹性动态输出反馈控制问题.在系统随机干扰和控制输入扰动的情况下,设计的弹性控制器可以确保闭环系统的依概率渐近稳定性.通过运用随机微分方程理论和线性矩阵不等式技术对系统进行稳定性分析,获得了系统依概率渐近稳定的充分条件和控制器增益.最后通过数值算例和直升机系统仿真验证了所提弹性动态输出反馈控制方法的有效性.

关键词

随机马尔可夫跳变系统;弹性控制;动态输出反馈控制;依概率渐近稳定;线性矩阵不等式

中图分类号 TP273

文献标志码 A

收稿日期 2018-07-31

资助项目 南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金(BCXJ18-03);航空科学基金(20165752049);江苏省自然科学基金(BK20171417)

作者简介

李艳恺,男,博士生,研究方向为随机干扰下无人直升机系统控制.li_yankai@126.com

1 南京航空航天大学 自动化学院,南京,210016

0 引言

马尔可夫跳变系统是一类特殊的随机切换系统,它的切换规律依赖于转移概率矩阵.随着对马尔可夫跳变系统的深入研究,很多实际系统控制的问题,例如电子通信、生物医学以及经济分析等,都可以利用马尔可夫跳变系统的控制方法来处理[1-3].近年来,很多控制领域知名专家在马尔可夫跳变控制系统问题上取得了很多研究成果[4-8].

另一方面,由于随机噪声的存在,实际系统的控制性能往往会受到影响,甚至导致系统的不稳定.随着随机控制系统理论的不断发展,很多关于随机噪声的抑制问题得到解决[9-10].如文献[11]讨论了关于随机拉格朗日系统的输出反馈控制问题;文献[12]研究了非线性随机系统的状态反馈 H_∞ 控制问题;文献[13]给出了随机非线性系统的稳定性法则.对于马尔可夫跳变系统,随机噪声也是普遍存在的.通常情况下,随机噪声存在于各个独立的子系统中,并且与模态间的随机跳变相互独立.随机噪声的存在使得马尔可夫跳变系统问题变得更加复杂.文献[14]分别采用状态反馈反步控制方法和输出反馈反步控制方法处理了一类随机马尔可夫跳变系统的控制问题;文献[15]解决了奇异随机马尔可夫跳变系统的稳定性问题.这些研究工作很大程度上促进了随机马尔可夫跳变系统的理论发展,也为许多实际工程上的控制问题提供了可行的解决方案.

由于在很多实际工程应用中,系统状态往往很难测量,或者测量的成本极高,因此,输出反馈控制方案成为处理这类问题的首选方案.在文献[8,16]中,应用动态输出反馈控制器处理连续时间马尔可夫跳变系统和连续时间奇异马尔可夫跳变系统问题,并取得了良好的控制效果.然而,由于控制器设备的老化、计算器维数限制以及传感器灵敏性过强或过弱等,都会使系统的控制过程中混入一定的扰动.因此,在设计控制器的时候充分考虑到这些扰动对系统的影响是有必要的.针对这一问题,一些学者设计了弹性控制器,提高了闭环系统的鲁棒性.文献[17]研究了带有脉冲异步切换系统的弹性控制器设计问题;文献[18]结合基于干扰观测器控制方法,设计抗干扰弹性控制器,讨论了多干扰下的马尔可夫跳变系统的稳定性问题.

本文主要研究了随机马尔可夫跳变系统的弹性动态输出反馈控制器设计问题.首先,在系统混有随机干扰、控制器存在扰动的情况下

设计动态输出反馈控制器,保证闭环系统稳定.然后,利用随机控制理论、李雅普诺夫稳定性理论以及线性矩阵不等式技术,分析闭环系统的稳定性,获得可解的充分条件.最后通过数值仿真和直升机控制系统算例验证本文所提控制方案的有效性.

1 问题描述

考虑如下的随机马尔可夫跳变系统:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{A}(r_t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(r_t)\boldsymbol{u}(t))\mathrm{d}t+\\&\quad\boldsymbol{D}(r_t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t),\\&\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(r_t)\boldsymbol{x}(t),\end{aligned}\tag{1}$$

其中$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$是系统状态,$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$是系统控制输入,$\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^l$是系统输出,$\boldsymbol{W}(t)$是一维标准的维纳过程.$\boldsymbol{A}(r_t),\boldsymbol{B}(r_t),\boldsymbol{C}(r_t),\boldsymbol{D}(r_t)$均为已知的系统参数矩阵.$\{r_t\}$是具有右连续轨迹的连续时间马尔可夫过程,在一个有限集合$S=\{1,2,\cdots,N\}$中取值.状态转移概率矩阵表示为

$$Pr\{r_{t+\Delta}=j\mid r_t=i\}=\begin{cases}\pi_{ij}\Delta+o(\Delta), & j\neq i,\\1+\pi_{ii}\Delta+o(\Delta), & j=i,\end{cases}\tag{2}$$

其中$\Delta>0,\lim\limits_{\Delta\to0}(o(\Delta)/\Delta)=0,\pi_{ij}$是在时间$t$从第$i$个模态到时间$t+\Delta$时跳变到第$j$个模态的转移速率.当$i\neq j$时,$\pi_{ij}\geqslant0$并且$\pi_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}$.在本文讨论中状态$\boldsymbol{x}(t)$是不可测的,因而不能直接应用到控制器设计中.

为了方便接下来的讨论,在没有歧义的前提下,当$r_t=i,i\in S$时,矩阵$\boldsymbol{A}(r_t)$表示为$\boldsymbol{A}_i$,本文中其他的矩阵也有同样的设定,例如$\boldsymbol{B}(r_t)$表示为$\boldsymbol{B}_i$等.

为进一步讨论随机干扰下马尔可夫跳变系统的动态弹性输出控制问题,引入以下引理和定义:

定义 1[2] 在零驱动($\boldsymbol{u}(t)\equiv0$)的情况下,系统(1)的解是依概率稳定的.如果对于任意的三个参数$\epsilon\in(0,1),\rho>0,t_0\geqslant0$,都存在一个参数$\delta=\delta(\epsilon,\rho,t_0)$,使得:

$$\mathcal{P}\{\|\boldsymbol{x}(t;t_0,x_0,i)\|<\rho\ \text{for all}\ t\geqslant t_0\}\geqslant1-\epsilon,$$

对于所有的$(\boldsymbol{x}_0,i)\in\mathbb{S}_\delta\times S$,其中$\mathbb{S}_\delta=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}\|<\delta\}$.如果这个解是依概率稳定的并且

$$\mathcal{P}\{\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)=0\}\geqslant1-\epsilon$$

对于所有的$(\boldsymbol{x}_0,i)\in\mathbb{S}_\delta\times S$,则这个解被称为依概率渐近稳定的.

引理 1[19] 假设$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$是适当的维数的矩阵,对于任意的实数$\alpha>0$,有如下的不等式成立:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\leqslant\alpha\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\alpha^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}.\tag{3}$$

基于引理1,文献[18]导出了如下的推论:

推论 1[18] 假设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为对称矩阵,$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$和$\boldsymbol{F}$是适当的维数的矩阵,并且满足$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$,对于任意的实数$\beta>0$,有如下的不等式成立:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}&0\\0&\boldsymbol{B}+\beta^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\end{pmatrix}.$$

引理 2[2] 假设存在函数$V\in C^{2,1}(\mathbb{S}_h\times\mathbf{R}_+\times S;\mathbf{R}_+)$,以及$K$类函数$\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\mu}_3$,使得:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\mu}_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(\boldsymbol{x}(t),t,i)\leqslant\boldsymbol{\mu}_2(\|\boldsymbol{x}\|),\\&\mathcal{A}V(\boldsymbol{\eta},t,i)\leqslant-\boldsymbol{\mu}_3(\|\boldsymbol{x}\|)\end{aligned}\tag{4}$$

对于$(\boldsymbol{x},t,i)\in\mathbb{S}_h\times\mathbf{R}_+\times S$成立,则系统(1)依概率渐近稳定.其中$\mathcal{A}V(\boldsymbol{\eta},i,t)$表示函数$V(\boldsymbol{\eta},r_t,t)$的无穷小算子.

本文将设计一个弹性动态输出反馈控制器来保证系统(1)是依概率渐近稳定的.弹性动态输出反馈控制设计如下:

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}_f(t)=\overline{\boldsymbol{A}}_{fi}\boldsymbol{x}_f(t)+\overline{\boldsymbol{B}}_{fi}\boldsymbol{y}(t),\\&\boldsymbol{u}(t)=\overline{\boldsymbol{C}}_{fi}\boldsymbol{x}_f(t),\end{aligned}\tag{5}$$

其中$\boldsymbol{x}_f(t)$是控制器系统状态,$\overline{\boldsymbol{A}}_{fi},\overline{\boldsymbol{B}}_{fi},\overline{\boldsymbol{C}}_{fi}$是控制器增益,且

$$\begin{aligned}&\overline{\boldsymbol{A}}_{fi}=\boldsymbol{A}_{fi}+\Delta\boldsymbol{A}_{fi},\Delta\boldsymbol{A}_{fi}=\boldsymbol{R}_{1i}\boldsymbol{S}_{1i}(t)\boldsymbol{T}_{1i},\boldsymbol{S}_{1i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}_{1i}(t)\leqslant\boldsymbol{I},\\&\overline{\boldsymbol{B}}_{fi}=\boldsymbol{B}_{fi}+\Delta\boldsymbol{B}_{fi},\Delta\boldsymbol{B}_{fi}=\boldsymbol{R}_{2i}\boldsymbol{S}_{2i}(t)\boldsymbol{T}_{2i},\boldsymbol{S}_{2i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}_{2i}(t)\leqslant\boldsymbol{I},\\&\overline{\boldsymbol{C}}_{fi}=\boldsymbol{C}_{fi}+\Delta\boldsymbol{C}_{fi},\Delta\boldsymbol{C}_{fi}=\boldsymbol{R}_{3i}\boldsymbol{S}_{3i}(t)\boldsymbol{T}_{3i},\boldsymbol{S}_{3i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}_{3i}(t)\leqslant\boldsymbol{I},\end{aligned}\tag{6}$$

这里$\boldsymbol{A}_{fi},\boldsymbol{B}_{fi},\boldsymbol{C}_{fi}$是待设计控制器增益,$\boldsymbol{R}_{1i},\boldsymbol{R}_{2i},\boldsymbol{R}_{3i},\boldsymbol{T}_{1i},\boldsymbol{T}_{2i},\boldsymbol{T}_{3i}$是已知的权值矩阵.

结合式(1)和式(5),闭环系统可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(t)=\overline{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{\eta}(t)\mathrm{d}t+\overline{\boldsymbol{D}}_i\boldsymbol{\eta}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t),\tag{7}$$

其中,$\boldsymbol{\eta}(t)=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{x}_f^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}},\overline{\boldsymbol{A}}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_i&\boldsymbol{B}_i\overline{\boldsymbol{C}}_{fi}\\\overline{\boldsymbol{B}}_{fi}\boldsymbol{C}_i&\overline{\boldsymbol{A}}_{fi}\end{pmatrix}$,$\overline{\boldsymbol{D}}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_i&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2 主要结论

对于带有随机干扰的马尔可夫跳变系统(1),本文设计了弹性动态输出反馈控制器(5).本文的主要结论总结为下面的定理.

定理 1 考虑随机马尔可夫跳变系统(1),在弹性动态输出反馈控制器(5)的作用下,保证闭环系统(7)是依概率渐近稳定的.如果对于给定的参数$\varepsilon_{1i}>0,\varepsilon_{2i}>0,\varepsilon_{3i}>0,i\in S$,存在参数$\boldsymbol{P}_{1i}>0$,

$\boldsymbol{X}_i > 0, \boldsymbol{Y}_{1i}, \boldsymbol{Y}_{2i}, i \in S$,使得如下的不等式成立:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{11i} & 0 & \boldsymbol{\Psi}_{13i} & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Psi}_{15i} & 0 \\ * & \boldsymbol{\Psi}_{22i} & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Psi}_{26i} \\ * & * & \boldsymbol{\Psi}_{33i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\boldsymbol{X}_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \boldsymbol{\Psi}_{55i} & 0 \\ * & * & * & * & * & \boldsymbol{\Psi}_{66i} \end{pmatrix} < 0, \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_i & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{P}_{1i} \end{pmatrix} > 0, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{11i} = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_{1i} + \boldsymbol{Y}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i + \varepsilon_{3i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{R}_{3i}\boldsymbol{R}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} + \pi_{ii}\boldsymbol{X}_i,$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{13i} = (\sqrt{\pi_{i1}}\boldsymbol{X}_i, \cdots, \sqrt{\pi_{i(i-1)}}\boldsymbol{X}_i, \sqrt{\pi_{i(i+1)}}\boldsymbol{X}_i, \cdots, \sqrt{\pi_{iN}}\boldsymbol{X}_i),$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{22i} = \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{Y}_{2i}\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{2i}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_{1i} + \varepsilon_{2i}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}\boldsymbol{C}_i,$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{33i} = -\operatorname{diag}\{\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \boldsymbol{X}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{X}_N\},$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{15i} = (\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{3i}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{3i}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{1i}^{\mathrm{T}}),$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{55i} = \operatorname{diag}(-\varepsilon_{3i}\boldsymbol{I}, -\varepsilon_{2i}^{-1}\boldsymbol{I}, -\varepsilon_{3i}^{-1}\boldsymbol{I}, -\varepsilon_{1i}^{-1}\boldsymbol{I}),$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{26i} = (\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{R}_{2i}, \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{R}_{2i}, \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{R}_{3i}, \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{R}_{1i}),$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{66i} = (-\varepsilon_{2i}\boldsymbol{I}, -\varepsilon_{2i}\boldsymbol{I}, -\varepsilon_{3i}\boldsymbol{I}, -\varepsilon_{1i}\boldsymbol{I}).$$

此外,如果条件可解,弹性输出反馈控制器增益为

$$\boldsymbol{A}_{fi}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{X}_i^{-1}(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{fi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{X}_i^{-1}) + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i} + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1})(\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{X}_i^{-1})^{-1},$$

$$\boldsymbol{B}_{fi} = (\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{X}_i^{-1})^{-1}\boldsymbol{Y}_{2i},$$

$$\boldsymbol{C}_{fi} = \boldsymbol{Y}_{1i}\boldsymbol{X}_i^{-1}.$$

证明 选择李雅普诺夫函数为

$$V(\boldsymbol{\eta}, i, t) = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\eta}(t), \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{P}_i > 0, i \in S$ 是待设计的李雅普诺夫矩阵.

考虑式(7)、(10)的随机微分形式表示为

$$\mathcal{A}V(\boldsymbol{\eta}, i, t) = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\Big(\overline{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_i\overline{\boldsymbol{A}}_i + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j\Big)\boldsymbol{\eta}(t) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\overline{\boldsymbol{D}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\overline{\boldsymbol{D}}_i\boldsymbol{\eta}(t) =$$

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_i\overline{\boldsymbol{A}}_i + \overline{\boldsymbol{D}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\overline{\boldsymbol{D}}_i + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j)\boldsymbol{\eta}(t), \tag{11}$$

因此 $\mathcal{A}V(\boldsymbol{\eta}, i, t) < 0$ 等价于

$$\overline{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_i\overline{\boldsymbol{A}}_i + \overline{\boldsymbol{D}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\overline{\boldsymbol{D}}_i + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j < 0. \tag{12}$$

选取 $\boldsymbol{P}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{1i} & -\boldsymbol{P}_{2i} \\ -\boldsymbol{P}_{2i} & \boldsymbol{P}_{2i} \end{pmatrix} > 0, \boldsymbol{P}_{1i} > \boldsymbol{P}_{2i}$,依据系统(7)的参数,(12)可以转化为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}_{11i} & \boldsymbol{\Pi}_{12i} \\ \boldsymbol{\Pi}_{12i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{22i} \end{pmatrix} < 0, \tag{13}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Pi}_{11i} = \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{P}_{2i}\overline{\boldsymbol{B}}_{fi}\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{B}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} + \boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_{1j},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{12i} = \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{B}_i\overline{\boldsymbol{C}}_{fi} - \boldsymbol{P}_{2i}\overline{\boldsymbol{A}}_{fi} - \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} + \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{B}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} - \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_{2j},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{22i} = -\boldsymbol{P}_{2i}\boldsymbol{B}_i\overline{\boldsymbol{C}}_{fi} - \overline{\boldsymbol{C}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} + \overline{\boldsymbol{A}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} + \boldsymbol{P}_{2i}\overline{\boldsymbol{A}}_{fi} + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_{2j}.$$

对不等式(13)分别左乘和右乘矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix}$,可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}_{11i} & \boldsymbol{\Pi}_{12i} \\ \boldsymbol{\Pi}_{12i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{22i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}_{11i} + \boldsymbol{\Pi}_{11i} + \boldsymbol{\Pi}_{12i}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Pi}_{22i} & \boldsymbol{\Pi}_{11i} + \boldsymbol{\Pi}_{12i}^{\mathrm{T}} \\ * & \boldsymbol{\Pi}_{11i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}'_{11i} & \boldsymbol{\Pi}'_{12i} \\ \boldsymbol{\Pi}'^{\mathrm{T}}_{12i} & \boldsymbol{\Pi}_{11i} \end{pmatrix} < 0, \tag{14}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Pi}'_{11i} = (\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{P}_{2i})\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{P}_{2i}) + (\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{P}_{2i})\boldsymbol{B}_i\overline{\boldsymbol{C}}_{fi} + \overline{\boldsymbol{C}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{P}_{2i}) + \boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}(\boldsymbol{P}_{1j} - \boldsymbol{P}_{2j}),$$

$$\boldsymbol{\Pi}'_{12i} = (\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{P}_{2i})\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{B}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} + \boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i + \overline{\boldsymbol{C}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i} - \overline{\boldsymbol{A}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}(\boldsymbol{P}_{1j} - \boldsymbol{P}_{2j}).$$

定义 $\boldsymbol{X}_i = (\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{P}_{2i})^{-1} > 0$,由(9),根据 Schur 补引理可以保证 $\boldsymbol{P}_{2i} = \boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{X}_i^{-1} > 0$.

对不等式(14)分别左乘和右乘矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_i & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$,得:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_i & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}'_{11i} & \boldsymbol{\Pi}'_{12i} \\ \boldsymbol{\Pi}'^{\mathrm{T}}_{12i} & \boldsymbol{\Pi}_{11i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_i & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}''_{11i} & \boldsymbol{\Pi}''_{12i} \\ * & \boldsymbol{\Pi}_{11i} \end{pmatrix} < 0, \tag{15}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Pi}''_{11i} = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_i\overline{\boldsymbol{C}}_{fi}\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_i\overline{\boldsymbol{C}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}\boldsymbol{X}_i,$$

$$\boldsymbol{\Pi}''_{12i} = \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{B}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i + \boldsymbol{X}_i\overline{\boldsymbol{C}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i} - \boldsymbol{X}_i\overline{\boldsymbol{A}}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i} + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}.$$

将式(6)代入式(15),可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}''_{11i}=&\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{C}_{fi}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i+\\&\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_i\Delta\boldsymbol{C}_{fi}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\Delta\boldsymbol{C}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\Pi}''_{12i}=&\ \boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i+\\&\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}-\\&\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{B}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\boldsymbol{X}_i\Delta\boldsymbol{C}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{X}_i\Delta\boldsymbol{A}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i},\\\boldsymbol{\Pi}_{11i}=&\ \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{P}_{2i}\boldsymbol{B}_{fi}\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i+\\&\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{2i}\Delta\boldsymbol{B}_{fi}\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{B}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}.\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{P}_{1i}>\boldsymbol{P}_{2i}$,根据推论1和引理1,对于任意的$\varepsilon_{1i}>0,\varepsilon_{2i}>0,\varepsilon_{3i}>0$可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{11i}&\boldsymbol{\Gamma}_{12i}*&\boldsymbol{\Gamma}_{22i}\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi}''_{11i}&\boldsymbol{\Pi}''_{12i}*&\boldsymbol{\Pi}_{11i}\end{pmatrix}<0,\tag{16}$$

其中,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{11i}=&\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{C}_{fi}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i+\\&\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}\boldsymbol{X}_i+\varepsilon_{3i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{R}_{3i}\boldsymbol{R}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\\&\varepsilon_{3i}^{-1}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{3i}\boldsymbol{X}_i+\varepsilon_{2i}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}_i+\\&\varepsilon_{3i}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{3i}\boldsymbol{X}_i+\varepsilon_{1i}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{1i}\boldsymbol{X}_i,\\\boldsymbol{\Gamma}_{12i}=&\ \boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i+\\&\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1},\\\boldsymbol{\Gamma}_{22i}=&\ \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{P}_{2i}\boldsymbol{B}_{fi}\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i+\\&\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_{1j}+\varepsilon_2\boldsymbol{P}_{2i}\boldsymbol{R}_{2i}\boldsymbol{R}_{2i}\boldsymbol{P}_{2i}+\varepsilon_2^{-1}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}\boldsymbol{C}_i+\\&\varepsilon_{2i}^{-1}\boldsymbol{P}_{2i}\boldsymbol{R}_{2i}\boldsymbol{R}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\varepsilon_{3i}^{-1}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{R}_{3i}\boldsymbol{R}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}+\\&\varepsilon_{1i}^{-1}\boldsymbol{P}_{2i}\boldsymbol{R}_{1i}\boldsymbol{R}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}.\end{aligned}$$

根据Schur补引理,通过式(9)可以导出$\boldsymbol{X}_i^{-1}>\boldsymbol{P}_{1i}$,因此可得:

$$\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i<\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i^{-1}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i.$$

定义$\boldsymbol{Y}_{1i}=\boldsymbol{C}_{fi}\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_{2i}=\boldsymbol{P}_{2i}\boldsymbol{B}_{fi},\boldsymbol{P}_{2i}=\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{X}_i^{-1}$,取

$$\boldsymbol{A}_{fi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}_i^{-1}\left(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{2i}+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}\right)\boldsymbol{P}_{2i}^{-1},$$

得:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}'_{11i}&0\\0&\boldsymbol{\Gamma}''_{22i}\end{pmatrix}<0,\tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}'_{11i}=&\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_{1i}+\boldsymbol{Y}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i^{-1}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i+\\&\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}\boldsymbol{X}_i+\varepsilon_{3i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{R}_{3i}\boldsymbol{R}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\varepsilon_{3i}^{-1}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{3i}\boldsymbol{X}_i+\\&\varepsilon_{2i}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}_i+\varepsilon_{3i}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{3i}\boldsymbol{X}_i+\\&\varepsilon_{1i}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{T}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{1i}\boldsymbol{X}_i,\\\boldsymbol{\Gamma}'_{22i}=&\ \boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}-\boldsymbol{Y}_{2i}\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{2i}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{D}_i+\\&\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_{1j}+\varepsilon_{2i}^{-1}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{R}_{2i}\boldsymbol{R}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}+\varepsilon_{2i}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2i}\boldsymbol{C}_i+\\&\varepsilon_{2i}^{-1}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{R}_{2i}\boldsymbol{R}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}+\varepsilon_{3i}^{-1}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{R}_{3i}\boldsymbol{R}_{3i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}+\\&\varepsilon_{1i}^{-1}\boldsymbol{P}_{1i}\boldsymbol{R}_{1i}\boldsymbol{R}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{1i}.\end{aligned}$$

根据Schur补引理和引理1,式(17)等价于不等式(8).

进而,可得$\mathcal{A}V(\boldsymbol{\eta},i,t)<0$. 结合式(10)和(11),根据引理2,可得闭环系统(7)是依概率渐近稳定.

3 算例仿真

本节将通过两个例子来验证本文所提方法的优势和有效性.在数值仿真算例中,通过对比弹性动态输出反馈控制方法和传统的非弹性动态输出反馈控制方法,仿真结果表明弹性控制方法在应用中的优势.在直升机控制系统模型中,将所设计的控制器用来处理直升机问题中随机干扰的抑制问题,利用闭环系统的仿真结果,表明本设计的控制方法的有效性.

1)数值仿真算例

在本算例中,将弹性控制方法与非弹性控制方法应用在同一个控制系统上,通过仿真结果说明弹性控制器的意义.

考察系统(1),本算例中以两个模态的系统为例阐述所提方法的有效性.参数给定如下:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{D}_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{D}_2=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}_{11}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{R}_{12}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{R}_{21}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}_{22}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{T}_{11}=(1,1),\quad\boldsymbol{T}_{12}=(1,1),$$

$$\boldsymbol{T}_{21}=-1,\quad\boldsymbol{T}_{22}=1,\quad\boldsymbol{T}_{31}=(1,1),$$

$$\boldsymbol{T}_{32}=(1,1),\quad\boldsymbol{R}_{31}=1,\quad\boldsymbol{R}_{32}=1,$$

不确定参数为$S_1(t)=S_2(t)=S_3(t)=\sin(t)$.马尔可夫跳变的转移速率为$\boldsymbol{\Pi}=\begin{pmatrix}-0.5&0.5\\0.5&-0.5\end{pmatrix}$.

根据定理1,运用MATLAB中的LMI工具箱求解线性矩阵不等式,得到控制器增益为

$$\boldsymbol{A}_{f1}=\begin{pmatrix}-20.394\,0 & -36.879\,9\\ -57.714\,5 & -107.498\,4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{f2}=\begin{pmatrix}-134.478\,6 & -67.001\,8\\ -18.514\,4 & -19.387\,2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{f1}=\begin{pmatrix}2.043\,2\\ 42.241\,9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{f2}=\begin{pmatrix}67.126\,1\\ -5.300\,9\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{f1}=(-13.877\,8\quad -29.790\,5),$$

$$\boldsymbol{C}_{f2}=(-14.678\,4\quad -9.990\,4).$$

经过200次的随机切换,分别得到系统在没有控制器作用、一般非弹性动态输出反馈控制器作用和弹性动态输出反馈控制器作用的仿真结果,仿真效果如图1—4所示.图1是系统零输入下的开环状

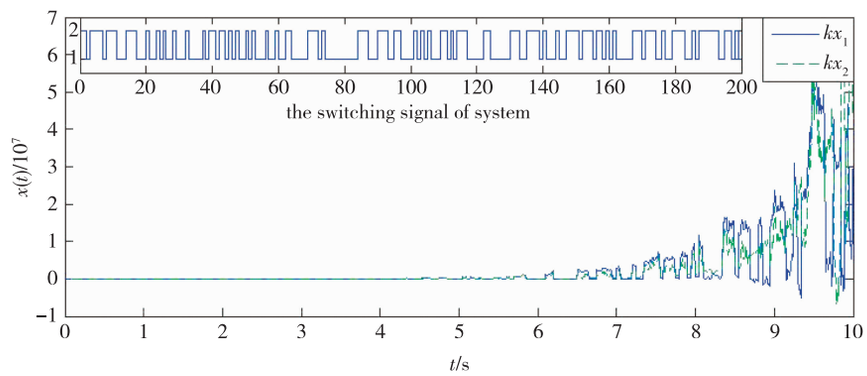


图1　开环系统状态响应

Fig. 1　The responses of the open-loop system

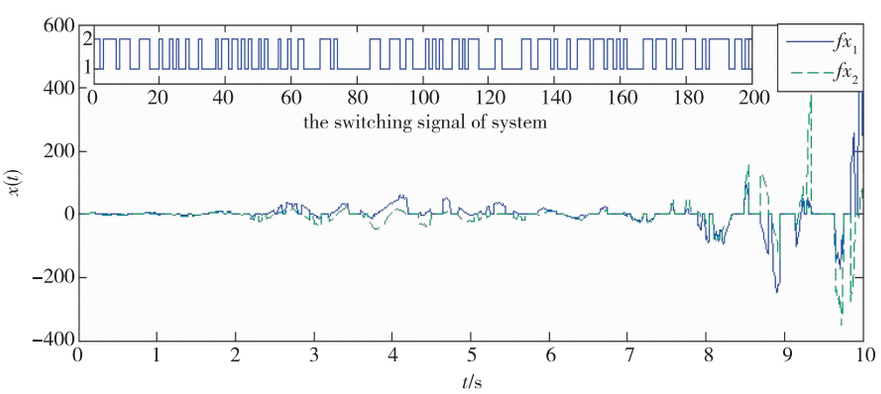


图2　非弹性输出反馈控制作用下的闭环系统状态响应

Fig. 2　The responses of the closed-loop system under output feedback control

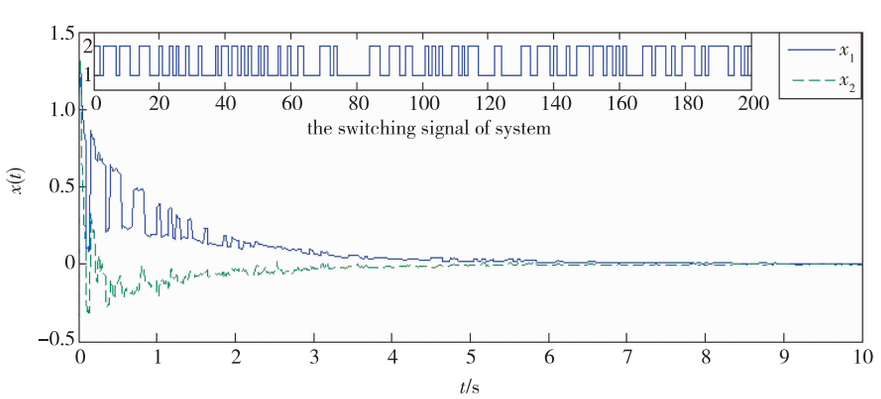


图3　弹性输出反馈控制作用下的闭环系统状态响应

Fig. 3　The responses of the closed-loop system under resilient output feedback control

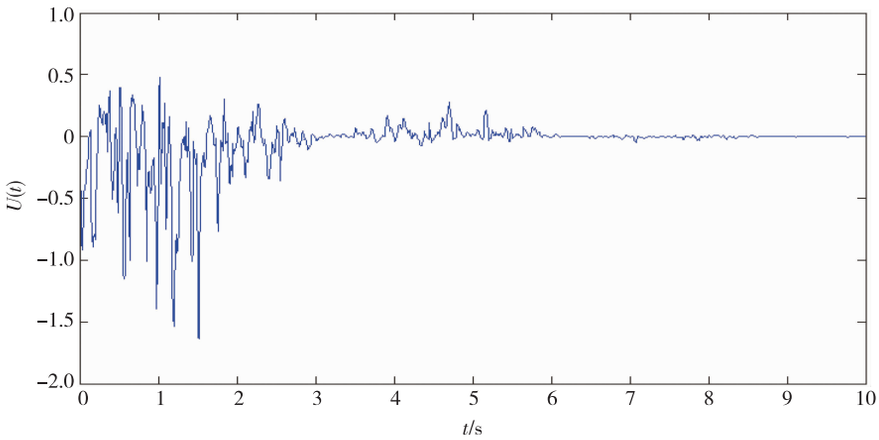


图 4　弹性输出反馈控制响应

Fig. 4　The curve of resilient output feedback controller

态响应,在没有控制作用的情况下,系统很快就发散了,图中(kx_1,kx_2)表示开环系统状态.图 2 是根据传统的动态输出反馈控制设计理论,设计的非弹性动态输出反馈控制器,通过与开环系统的对比,可以看出系统在此类控制器的作用下,还是有一定效果的,但是仍然不能保证系统稳定,图中(fx_1,fx_2)表示非弹性输出反馈控制作用下的闭环系统状态响应.图 3 是基于本文设计的方法提出的弹性动态输出反馈控制器.可以看出,闭环系统的响应是渐近稳定的,并且在很短的时间内系统达到较为满意的控制效果,图中(x_1,x_2)表示弹性输出反馈控制器作用下的闭环系统状态响应.通过对比得出本文提出的弹性输出反馈控制方法是非常有效的.图 4 为弹性控制器响应.

2)在直升机系统中的应用

本算例中,将所提方法应用在无人直升机,保证系统在存在随机干扰的情况下达到期望的控制水平.

考虑悬停状态下直升机小扰动线性模型[20]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(t)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}_0(t)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}_0(t), \tag{18}$$

其中,$\boldsymbol{x}_0(t)=(u,v,\theta,\varphi,q,p,a,b,w,r,\psi)^{\mathrm{T}}$,$u,v,w$ 分别为直升机体坐标轴上 x 轴、y 轴、z 轴 3 个方向的速度,θ,φ,ψ 分别为滚转角、俯仰角和偏航角,p,q,r 分别为滚转角速度、俯仰角速度和偏航角速度.$\boldsymbol{u}_0(t)=(u_{\mathrm{lon}}(t),u_{\mathrm{lat}}(t),u_{\mathrm{ped}}(t),u_{\mathrm{col}}(t))^{\mathrm{T}}$,$u_{\mathrm{lon}}(t),u_{\mathrm{lat}}(t)$ 为直升机的周期变矩,$u_{\mathrm{ped}}(t),u_{\mathrm{col}}(t)$ 是直升机主旋翼和尾翼控制总矩.$\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0$ 是相应的参数分别为

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}
X_u & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & X_a & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & Y_v & 0 & g & 0 & 0 & 0 & Y_b & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
M_u & M_v & 0 & 0 & 0 & 0 & M_a & 0 & 0 & 0 & 0\\
L_u & L_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_b & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1/\tau_f & A_b & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & B_a & -1/\tau_f & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_a & Z_b & Z_w & Z_r & 0\\
0 & N_v & 0 & 0 & 0 & N_p & 0 & 0 & N_w & N_r & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix},\quad
\boldsymbol{B}_0=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
A_{\mathrm{lon}} & A_{\mathrm{lat}} & 0 & 0\\
B_{\mathrm{lon}} & B_{\mathrm{lat}} & 0 & 0\\
0 & 0 & Z_{\mathrm{col}} & 0\\
0 & 0 & 0 & N_{\mathrm{ped}}\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

其中 $X_u,X_a,Y_v,Y_b,M_u,M_v,M_a,L_u,L_v,L_b,Z_a,Z_b,Z_w,Z_r,N_v,N_p,N_w,A_{\mathrm{lat}},B_{\mathrm{lat}},A_{\mathrm{lon}},B_{\mathrm{lon}},Z_{\mathrm{col}},N_{\mathrm{ped}}$ 为相应的气动导数.

本例的控制目标是使直升机在一个稳定的状态

位置到达另一个稳定的状态位置.跟踪目标为期望的位置 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}=(X_{\mathrm{d}},Y_{\mathrm{d}},Z_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}$ 和期望的偏航角 ψ_{d},其中 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}$ 为惯性坐标系下的位置坐标.本例考虑的期望目标均为常值,即,$\dot{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{d}}=0,\dot{\psi}_{\mathrm{d}}=0$.由于直升机位置误差 $\boldsymbol{e}_0$ 为

$$\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{P}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{P}_{\mathrm{Bd}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}-\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}),$$

其中,$\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}},\boldsymbol{P}_{\mathrm{B}}$ 分别为直升机在惯性坐标系和体坐标系下的位置坐标,$\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{P}_{\mathrm{Bd}}$ 为直升机在惯性坐标系和体坐标系下的期望位置坐标,$\boldsymbol{R}$ 是两坐标系间的旋转变换矩阵.根据变换矩阵的性质,有[20]

$$\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{W},$$

其中

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}0&-r&q\\r&0&-p\\-q&p&0\end{pmatrix}.$$

因此,跟踪误差的运动状态可表示为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_0&=\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}-\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}})+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{I}}-\dot{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{d}})=\\&\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}-\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}})+\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_{\mathrm{d}}=\\&\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_0+\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_{\mathrm{d}},\end{aligned}$$

其中,$\boldsymbol{V}=(u,v,w)$,$\boldsymbol{V}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{d}}=(0,0,0)$.

由于直升机模型是建立在小扰动线性化模型方法的基础上的,假设 $\boldsymbol{e}_0(0)=(0,0,0)$ 是模型平衡点,则 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_0$ 是两个误差项的乘积,因此依据小扰动建模方法,忽略 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_0$ 项.考虑到随机干扰对直升机的影响,结合式(18)可得到如下直升机动态方程:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}(t),\\\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x},\end{aligned}\tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}(t)$ 是一维随机白噪声,$\boldsymbol{y}$ 是控制输出.相应参数为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{A}_1\\0&\boldsymbol{A}_0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\\boldsymbol{B}_0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}(t)$ 是由随机噪声引起的干扰项,$\boldsymbol{D}_i$ 是随机切换的干扰权系数,切换信号是一个独立于随机噪声 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的马尔可夫跳变过程.接下来,我们将运用本文所提方法,处理无人直升机的抗干扰问题.参考文献[20]中的如下数据:

$g=9.893$,　$X_u=-0.399\,6$,　$Y_b=g$,
$M_a=37.571$,　$L_b=72.481\,7$,　$Z_a=0.2$,
$Z_r=0.1$,　$N_w=-7.076$,　$T_f=1/25.71$,
$X_a=-g$,　$M_u=0.254\,2$,　$L_u=-0.024\,4$,
$A_b=0.771\,3$,　$Z_b=0.1$,　$N_v=2.982$,
$N_r=-10.71$,　$Y_v=-0.059\,89$,
$M_v=-0.060\,13$,　$L_v=-0.117\,3$,
$B_a=0.616\,8$,　$Z_w=-2.055$,
$N_p=1.1$,　$A_{\mathrm{lon}}=4.059$,　$B_{\mathrm{lat}}=4.085$,
$Z_{\mathrm{col}}=-13.11$,　$A_{\mathrm{lat}}=-0.016\,1$,　$N_{\mathrm{col}}=3.749$,
$B_{\mathrm{lon}}=-0.010\,17$,　$N_{\mathrm{ped}}=26.90$.

根据直升机飞行过程中遇到的随机干扰情况,假设干扰权系数在两组参数之间跳变,传递转移速率矩阵为算例(1)中的 $\boldsymbol{\Pi}$.

仿真结果如图5—8所示.仿真目标是使直升机由初始坐标为(53,50,20)处悬停到达坐标为(45,45,25)处再次悬停,同时最终悬停时偏航角与初始偏航角相同.经过些许抖动,大约 10 s 后直升机稳定悬停于预期的位置.图5、6和7分别给出了直升机位置在3个坐标轴上的位移曲线,图8表示直升机偏航角的角位移曲线.可以看出在动态输出弹性控制器的作用下,直升机系统在环境中存在随机干扰的情况下,直升机的控制性能仍然可以满足.因此验证了所提方法的实用性.

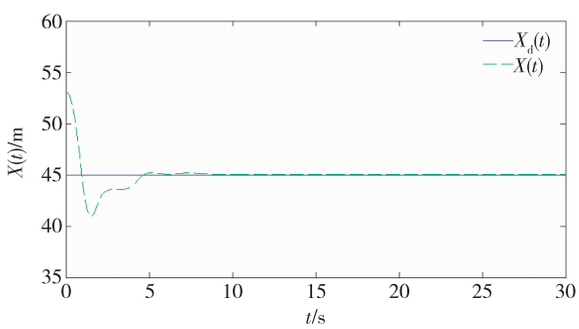


图5　直升机 x 轴方向上的位移曲线

Fig. 5　The position curve in x axis of the helicopter

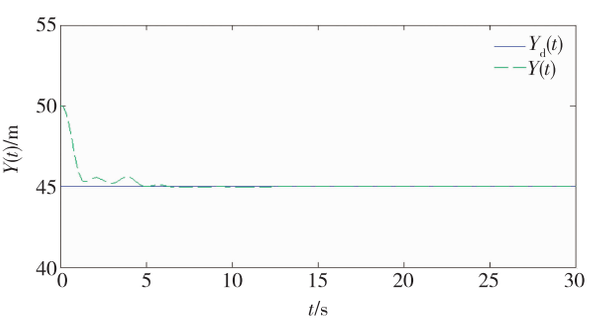


图6　直升机 y 轴方向上的位移曲线

Fig. 6　The positioncurvein y axis of the helicopter

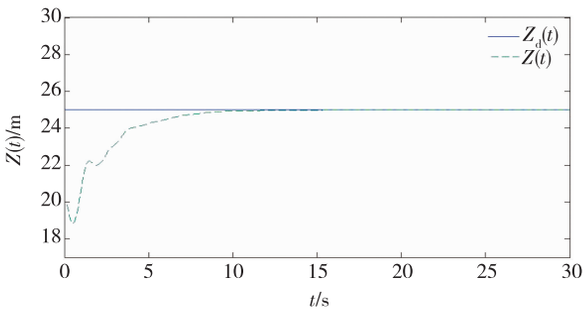


图 7　直升机 z 轴方向上的位移曲线

Fig. 7　The positioncurvein z axis of the helicopter

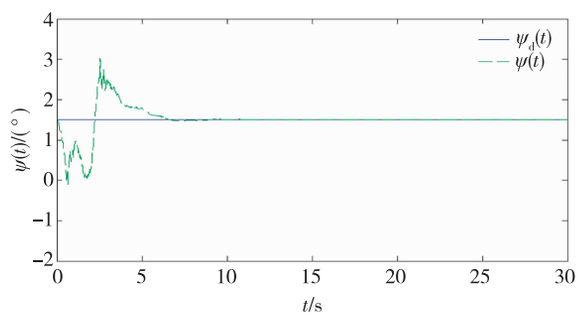


图 8　直升机偏航角位移曲线

Fig. 8　The yaw anglecurveof the helicopter

4　总结

本文研究了随机噪声和输入扰动下随机马尔可夫跳变系统的弹性动态输出控制问题.为了保证闭环系统的依概率渐近稳定性,设计了弹性动态输出反馈控制器,并应用随机控制系统理论、李雅普诺夫稳定性理论以及线性矩阵不等式技术,获取了保证系统具有相应控制性能的可解的充分条件.最后通过一个数值算例和无人直升机系统模型验证了本文所提方法的可行性.

参考文献

References

[1] Boukas E K. Stochastic switching systems: analysis and design[M]. Berlin, Germany: Birkhauser, 2005

[2] Mao X, Yuan C. Stochastic differential equations with Markovian switching [M]. London: Imperial College Press, 2006

[3] Øksendal B. Stochastic differential equations-an introduction with applications[M]. New York: Springer-Verlag, 2003

[4] Li Y, Sun H, Zong G, et al, Composite anti-disturbance resilient control for Markovian jump nonlinear systems with partly unknown transition probabilities and multiple disturbances[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2017, 27(14): 2323-2337

[5] Fei Z, Gao H, Shi P. New results on stabilization of Markovian jump system with time delay[J]. Automatica, 2009, 45(10): 2300-2306

[6] He S, Liu F. Robust peak-to-peak filtering for Markov jump systems [J]. Signal Processing, 2010, 90(2): 513-522

[7] Zhang L, Boukas E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(2): 463-468

[8] Farias D P, Geromel J C, Val J B R, et al. Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 944-949

[9] 吴昭景.随机引论[M].北京:科学出版社,2016
WU Zhaojing. Stochastic introducing[M]. Beijing: Science Press, 2016

[10] Jazwinski A H. Stochastic processes and filtering theory [M]. New York: Academic Press, 1970

[11] Cui M, Wu Z, Xie X. Output feedback tracking control of stochastic Lagrangian systems and its application[J]. Automatica, 2014, 50(5): 1424-1433

[12] Zhang W, Chen B S. State feedback H_∞ control for a class of nonlinear stochastic systems [J]. Siam Journal on Control & Optimization, 2006, 44(6): 1973-1991

[13] Zhang W. Stability criteria of random nonlinear systems and their applications [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4): 1038-1049

[14] Wu Z, Xie X, Shi P, et al. Backstepping controller design for a class of stochastic nonlinear systems with Markovian switching[J]. Automatica, 2009, 45(4): 997-1004

[15] Zhao Y, Zhang W. New results on stability of singular stochastic Markov jump systems with state-dependent noise [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(10): 2169-2186

[16] Kwon N K, Park I S, Park P G, et al. Dynamic output-feedback control for singular Markovian jump system: LMI Approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(10): 5396-5400

[17] Zong G, Wang Q. Robust resilient control for impulsive switched systems under asynchronous switching[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2015, 92(6): 1143-1159

[18] Li Y, Sun H, Zong G, et al. Anti-disturbance control for time-varying delay Markovian jump nonlinear systems with multiple disturbances [J]. International Journal of Systems Science, 2017, 48(15): 3186-3200

[19] Chen M, Chen W. Disturbance-observer-based robust control for time delay uncertain systems [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2010, 8(2): 445-453

[20] Raptis I A, Valavanis K P, Vachtsevanos G J. Linear tracking control for small-scale unmanned helicopters [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(4): 995-1010

Resilient dynamic output feedback control for stochastic Markovian jump system

LI Yankai[1] CHEN Mou[1] WU Qingxian[1]
1 College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

Abstract The problem of output feedback control for the Markovian jump system with stochastic noise is investigated in this paper. Under the stochastic disturbance and input perturbation, the proposed dynamic output feedback resilient controller guarantees that the closed-loop system is asymptotically stable in probability. Combining the stochastic differential equation theory with the linear matrix inequality technique, a sufficient condition is obtained to ensure the asymptotic stability in the probability of the system, and the feasible solution of controller gains is presented simultaneously. Finally, a numerical example and a helicopter linear systemare are given to illustrate the practicality of the proposed method.

Key words stochastic Markovian jump system; resilient controller; dynamic output feedback control; asymptotical stability in probability; linear matrix inequality