DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.03.012

朱其明[1]　费为银[1]　费晨[2]

私募股权投资的估值问题研究进展

摘要

阐述了私募股权投资的估值问题.首先简要介绍了投资组合问题的发展历史与研究成果.接着较为详细地论述了私募股权投资的估值问题的研究现状,包括有限合伙人的投资组合选择,以及对投资企业的价值评估体系和评估方法的研究,并给出了所要研究的模型,即含有未支撑风险的私募股权投资模型.最后给出所要研究模型在通胀环境、Knight不确定环境下以及跳扩散环境下的拓展框架.

关键词

投资组合;私募股权投资;随机分析;通货膨胀;Knight不确定;跳风险

中图分类号 O211.63;F830.9

文献标志码 A

0　引言

随着人们理财意识的增强,越来越多的人会将手中的资金用于投资,以获得更高的收益.而为了分散风险保障投资者的利益,投资一般都遵循投资组合的原则,通俗地说,即“不能把所有鸡蛋放在同一个篮子里”.一般投资者由于市场信息、专业知识以及操作水平的缺失,往往会造成投资策略的失误,从而未获得较好的投资收益,于是促成了投资基金的产生.即投资者将自己的资金放在投资基金中,由专业的基金管理者进行投资,使得投资者获得相应的收益,同时投资者支付基金管理者相应的报酬.目前存在的投资基金包括共同基金、对冲基金和私募股权投资基金等.本文主要探讨私募股权投资估值问题的研究进展.

1952年,Markovitz[1]最早提出投资组合理论,指出投资者在进行投资时的期望收益往往与实际收益存在一定的差别,而这一部分差别便是由投资所存在的风险造成的.他用方差来刻画风险,提出了均值-方差模型,为近现代金融学研究投资组合选择问题奠定了基础.Tobin[2]研究了风险行为的流动性偏好.Modigliani 等[3]提出了著名的MM理论,其中蕴含了重要的无套利均衡思想.后来很多学者在这个思想的基础上加以应用和发展.Sharpe[4]在投资组合理论的基础上,得出相对简化的计算方法,提出了资本资产定价模型(CAPM),研究了市场上均衡价格形成的原因,以及证券市场上资产的预期收益率与风险资产之间的关系.利用此模型,可以解决资产估值和计算资金成本预算等问题,是现代金融市场中价格理论的核心支柱,被广泛应用于理财和投资决策等领域.Lintner[5]研究了风险资产的价值,在股票上的风险投资组合选择和资本预算问题,解决了风险厌恶投资者的最优证券投资组合选择问题,并将其应用于计算一家在市场上有股票交易公司的资本预算上.然而之前的研究都是相对于单一投资期而言的,Samuelson[6]将模型推广到了多期情形,利用随机动态规划方法,研究了投资者终身的消费和投资组合决策问题.Merton[7]研究了在连续时间模型下的最优消费和投资组合问题.随着Merton模型的出现,国内外大批学者在此模型基础上对投资组合和消费问题做了进一步研究,并得出了较好的成果.

一般投资者在投资过程中总会遇到各种各样的风险,且缺乏专业的知识及操作手段,往往会造成很大的损失.私募股权投资基金的

收稿日期 2016-03-26

资助项目 国家自然科学基金(71171003,71571001)

作者简介

朱其明,男,硕士生,研究方向为金融数学与金融工程.1290551283@qq.com

费为银(通信作者),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为金融数学与金融工程.wyfei@ahpu.edu.cn

1　安徽工程大学　数理学院,芜湖,241000

2　东华大学　旭日工商管理学院,上海,200051

出现有效地解决了这一问题,其不仅可以规避风险,帮助投资者获得较高的收益,同时可以帮助企业解决资金困难和发展瓶颈等问题.但由于私募股权投资具有高风险、高收益和信息非公开的特性,投资者对私募股权投资的认识并不完整,且近年来私募股权投资在我国的发展迅速,因此对私募股权投资的研究具有较为重要的意义.下面就私募股权投资的发展及研究现状做进一步的阐述.

1 私募股权投资的估值问题研究回顾

私募股权投资,简称 PE,起源于美国.1976 年,华尔街著名的投资银行贝尔斯登(BSC)旗下 3 名投资银行家抓住时机,合伙成立了一家新的投资公司:科尔伯格-克拉维斯集团(KKR),专门从事并购业务,这是最早的私募股权投资公司.迄今,全球已有数万家私募股权投资公司,KKR 公司、凯雷投资集团和黑石集团都是其中的佼佼者.国外私募股权投资基金经过 40 年的发展,成为仅次于银行贷款和 IPO 的重要融资手段.私募股权投资通过私募基金对非上市公司进行权益性投资,组织形式可分为有限合伙制、公司制和信托制.国外 80%的私募股权投资基金采用的是有限合伙制,即通过非公开的私募形式,由有限合伙人(投资者)拿出资金放入私募股权投资基金中,交由专业的普通合伙人(基金管理者)寻找具有发展潜力的非上市公司进行投资,并提供专业技术帮助公司发展,为有限合伙人创造利益.而普通合伙人可获得固定的管理费以及基于业绩表现的激励费.广义的私募股权投资包含被投资企业首次公开发行股票前各阶段所进行的权益投资,即投资者对处于萌芽期、初始期、发展期、拓展期、成熟期以及 Pre-IPO 各个时期企业进行的投资.相关资本按照投资阶段可分为创业投资、发展资本、并购基金、夹层资本、重振资本、Pre-IPO 资本以及其他如上市后私募投资、不良债权和不动产投资等.

人们对私募股权投资的认识往往存在一定的误区,例如认为私募股权投资与对冲基金是同一概念,然而实际上它们之间存在一定的区别.虽然它们都是通过私募形式募集资金,且具有非公开、高收益的共性,但私募股权投资主要投资于未上市的公司等一级市场,而对冲基金主要是通过各种交易手段在二级市场上通过空买空卖的交易操作来获利.因此对私募股权投资的理论研究至关重要.下面阐述国内外学者对私募股权投资估值问题的研究进展.

2010 年,Metrick 等[8]利用 1993—2006 年间 238 个私募股权投资基金记录数据分析了私募股权投资行业的经济学意义,建立了关于基金管理者期望收益的模型,发现在样本基金中,管理者的收益中固定管理费占 2/3.2011 年,Metrick 等[9]继续研究了创业投资和其他阶段的私募股权投资,定义了私募股权投资的理论范畴,并就私募股权投资所具有的存在性、管理者所做的工作与收益以及管理报酬合约的签订等问题做出了系统的回答,最后指出私募股权与其他资产集的不同主要在于信息的不对称以及流动性不足.

国内外学者在研究私募股权投资的业绩表现时,通常会全面研究各个投资阶段的业绩表现,从而得出更加合理的结果.Harris 等[10]利用 Burgiss 数据,对美国近 1 400 个并购和创业投资基金数据的研究进行了分析,发现它们的业绩一致好于公开市场上的投资.Kaplan 等[11]从收益、持久性和现金流 3 个方面研究了私募股权投资的业绩表现,指出扣除费用后,基金的平均收益近似等于 S&P 500 指数,尽管基金之间存在异质性,但基金之间的合作会使得收益更加持久,而且具有出色业绩的合作更有可能提高后续基金的业绩,并且这些结果从根本上区别于共同基金.而 Phalippou 等[12]指出私募股权投资的业绩表现被夸大了,主要是因为在统计过程中太倾向于对业绩表现好的基金数据的使用.他们发现扣除费用成本后的私募股权投资业绩低于 S&P 500 指数.由此可见对私募股权投资的风险估计存在一定的误差,尚有一部分风险未被察觉.从这些实证研究可以发现,对私募股权投资业绩的评价存在从乐观到理性的过程,而这样的变化引起了一个有争议的问题:私募股权投资的业绩表现是否足以补偿有限合伙人所承担的风险成本以及长期的资金流动性不足?令人惊讶的是,尽管对这些风险成本的分析文献很少,但目前社会上对私募股权投资的配额却在逐渐增加.

随着对私募股权投资业绩表现的理性认知,国内外学者希望找出影响私募股权投资的风险因素,所以进一步研究了风险与收益的关系,并得出了一些重要结果.Jegadeesh 等[13]研究了私募股权投资的风险和收益,指出私募股权投资的收益与 GDP 的增长成正相关关系,而与信用利差成负相关关系.Lerner 等[14]研究发现不同的有限合伙人在私募股权投资中的收益是显著不同的.通过对一些数据的挖

掘分析发现,捐赠基金(狭义上为公共养老金)对私募股权投资的收益高于平均收益近21%.虽然通过对再投资策略的研究表明捐赠基金对私募股权投资回报的预测更加准确,但主要因素在于投资者的成熟度以及对潜在的投资机会的发掘.Cochrane[15]研究了创业投资的风险和收益问题,度量了创业投资的期望收益和标准差,并利用极大似然估计来修正选择性偏差.对于风险的存在,Caballero[16]研究发现由于收益的不确定导致"预防性储蓄"成为总的累积财富的一个重要来源.

在私募股权投资中,杠杆的作用明显.首先,对于给定规模的私募股权投资,杠杆可以增加私募股权投资资产的规模,可以减少每单位无杠杆资产的管理费;其次,杠杆可以将一部分私募股权投资的风险转化给多样化的债权人,从而可以减少有限合伙人的投资风险.Axelson 等[17]研究了在并购交易中杠杆比例的决定因素与定价,指出私募股权投资注重执行杠杆并购交易时的资本结构,并给出了估计资本结构的理论.他们利用1980—2008年的样本数据分析发现并购投资中杠杆的决定因素不同于公开市场的理论,而由整个经济体系中信贷条件的变化所决定.他们建议当信贷较容易时,应增加杠杆比例.Ivashina 等[18]主要研究了杠杆并购企业与银行之间的关系型借贷,即银行的贷款决策主要基于通过长期和多种渠道的接触所积累的关于私募股权投资基金的相关信息进行.通过研究1993至2005年间1 590个贷款融资私募基金下的杠杆收购的样本数据,发现私募股权投资企业的银行关系是影响向银行贷款的利率和契约结构的重要因素.随着与银行关系强度的提升,可以有效降低利差,增加最大贷款量,这对私募股权投资的融资是至关重要的.

私募股权投资纵然拥有较高的收益,但同样伴随着相当大的风险,因此对私募股权投资企业全面准确的估值显得尤为重要.虽然很多专业投资管理机构将各种投资估值方法运用到项目估值和投资决策中,但由于不能深刻理解这些方法的内在意义,以及评估者主观性对企业估值的不利因素往往造成错误的估值,从而给投资者造成巨大的损失.如何准确地估值私募股权投资成为重要的问题.国内外众多学者对这一问题进行了探讨和研究.Black 等[19]指出在完备市场下,只有股票价格的当前值和未来的预测有关,而变量以往的演变过程和变化方式与未来的预测并不相关.同时给出了著名的B-S期权定价公式.由B-S模型可知,期权价格的决定因素广泛,股票合约的期限、股票当前价、无风险利率水平和交割价等都会对期权价格造成影响.这项工作对金融创新和各种新兴金融产品的面世起到了重要的推动作用.Chung 等[20]认为在评估企业的市场价值时,应综合考虑资产内部价值和未来增值机会.增值机会的现值反映未来投资的价值,即预期收益率将超过资本机会成本的超额收益率.同时通过实例证明企业未来成长价值因素的作用远大于内部资源价值起到的作用.Meyer 等[21]主要研究了投资基金在股权评估中所出现的重难点,开创性地以模型来研究私募股权投资,得出了私募股权机构关于计算公允价值的方法、基金评级系统、投资组合设计及评分体系,初步形成全面有效的私募股权投资程序.然而当市场是不完备的时候,私募股权投资的风险不完全由市场所支撑,标准的一价原则不再成立.

另一方面,私募股权投资的研究与关于流动性不足资产的估值和投资组合选择问题的研究息息相关.例如受限制股票、高管薪酬、不可交易劳动收入、流动性不足的创业企业和对冲基金锁定.文献[22-25]研究了带有不可交易劳动收入的投资组合和消费.Kahl 等[26]分析了连续时间下带有受限股票的投资组合选择模型.文献[27-28]研究了在非完备市场下的创业公司.对于对冲基金,文献[29-31]分析了管理费和基于业绩表现的高水印对杠杆和估值的影响.Ang 等[32]研究了带流动性不足资产的投资组合选择问题,提出了一个关于最优分配到流动资产和流动性不足资产的模型.其中流动性不足资产只能在一个随机发生的交易机会到来时才可以被交易,这个交易机会也叫做流动性事件,在模型中是用一个独立同分布的Poisson过程来模拟的.流动性不足风险导致风险厌恶系数增加,投资者既会减少对流动性不足资产的投资,也会减少对流动性资产的投资,其原因是投资者需要考虑平滑消费.由此可见,当流动性风险较大时,很大程度影响了管理者的投资组合选择策略.

综合以上文献,在私募股权投资中,仍未出现任何量化流动性不足成本、管理者增值技术指标以及私募股权投资管理报酬的研究文献.而 Sorensen 等[33]较为全面地解决了这些问题.Sorensen 等[33]研究了私募股权投资的业绩是否足以补偿投资者所承担的风险、长期流动性不足以及支付给管理者的管理费和激励费,分析了投资者的投资组合选择问题,

发现管理费、激励费及流动性不足所带来的成本很高,并指出基金一般采用2/20形式的管理报酬合约较为合理.管理者必须提供足够大的增值技术才能补偿投资者所承担的这些成本,传统的私募股权投资业绩度量不再适用.以下简要阐述Sorensen等[33]的模型.

一个机构投资者在有限期限内投资在3个资产上:无风险资产、公开股权和私募股权.公开股权的价值S_t,满足几何布朗运动:

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\mu_S\mathrm{d}t+\sigma_S\mathrm{d}B_t^S,$$

其中B_t^S是一个标准布朗运动,μ_S是漂移系数,σ_S是波动率,公开股权的夏普比率$\eta=\dfrac{\mu_S-r}{\sigma_S}$.

私募股权投资资产是流动性不足的,私募股权投资基金必须持有资产到T时刻.于是在0到T时刻期间,私募股权投资资产的价值A_t满足几何布朗运动:

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t}=\mu_A\mathrm{d}t+\sigma_A\mathrm{d}B_t^A,$$

其中,B_t^A是一个标准布朗运动,μ_A是漂移系数,σ_A是波动率.在T时刻,私募股权投资资产被清算,且此时总收入为A_T,这些收益将依"瀑布"结构分摊给债权人、有限合伙人和普通合伙人.两个布朗运动B_t^S和B_t^A之间的相关系数为ρ.当$|\rho|<1$时,两个过程是不完全相关的.私募股权投资资产的风险不是完全由市场支撑(spanned)的,有限合伙人通过公开股权和无风险资产的动态交易不能完全对冲私募股权投资的风险.于是便需要考虑未支撑(unspanned)风险部分.

私募股权投资资产的无杠杆β(the unlevered beta)由下式给出:

$$\beta=\frac{\rho\sigma_A}{\sigma_S},$$

私募股权投资资产的总波动率为σ_A,其中由公开市场支撑的一部分波动率为$\rho\sigma_A$,剩下的未支撑的风险波动率定义为ε,由下式给出:

$$\varepsilon=\sqrt{\sigma_A^2-\rho^2\sigma_A^2}=\sqrt{\sigma_A^2-\beta^2\sigma_S^2}.$$

模型中一个重要的特性是标的私募股权投资资产比整个市场增值速度更快并且获得一个风险调整后的超额收益,称为α.其定义如下:

$$\alpha=\mu_A-r-\beta(\mu_S-r).$$

有限合伙人有标准时间可分偏好,可用下式表示:

$$E\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\zeta t}U(C_t)\mathrm{d}t\right],$$

其中$\zeta>0$是有限合伙人的主观贴现率,$U(\cdot)$是一个凹函数,特别地,选择$U(C)=-\mathrm{e}^{-\gamma C}/\gamma$,$C_t$为$t$时刻的消费,其中$\gamma>0$是绝对风险厌恶系数.

流动财富动力学:令W_t为有限合伙人的流动财富过程,不包含有限合伙人合伙利益的价值.有限合伙人分配Π_t到公开股权,剩下的$W_t-\Pi_t$都投资在无风险资产上.在整个私募股权投资周期内,流动财富变化如下:

$$\mathrm{d}W_t=(rW_t-C_t)\mathrm{d}t+\Pi_t((\mu_S-r)\mathrm{d}t+\sigma_S\mathrm{d}B_t^S),\quad t<T,$$

其中r为无风险利率,X_0为有限合伙人放在私募股权投资基金中的承诺资本,m为固定管理费率,C_t为t时刻的消费.

在T时刻,基金被清算,并且收益被分配出去,有限合伙人的流动财富从W_{T-}变为

$$W_T=W_{T-}+LP(A_T,T),$$

其中$LP(A_T,T)$为T时刻有限合伙人的合伙利益的价值.

当基金被清算之后,有限合伙人只投资在公开股权和无风险资产上,则流动财富过程简化为

$$\mathrm{d}W_t=(rW_t-C)_t\mathrm{d}t+\Pi_t((\mu_S-r)\mathrm{d}t+\sigma_S\mathrm{d}B_t^S),\quad t\geqslant T,$$

在T时刻之后,有限合伙人的值函数为

$$J^*(W)=-\frac{1}{\gamma r}\mathrm{e}^{-\gamma r(W+b)},$$

其中b是一个常数,$b=\dfrac{\eta^2}{2\gamma r^2}+\dfrac{\zeta-r}{\gamma r^2}$.

通过随机动态规划的方法,对HJB方程进行求解可得最优公开股权投资比例和消费(Π,C).

在私募股权投资到期日之前,有限合伙人的值函数为

$$J(W,A,t)=-\frac{1}{\gamma r}\exp[-\gamma r(W+b+V(A,t))],$$

其中有限合伙人的合伙利益$V(A,t)$由下面的偏微分方程(PDE)解出:

$$rV(A,t)=-mX_0+V_t+(r+\alpha)AV_A+\frac{1}{2}\sigma_A^2A^2V_{AA}-\frac{\gamma r}{2}\varepsilon^2A^2V_A^2.$$

通过随机动态规划的方法,对HJB方程进行求解可得最优公开股权投资比例和消费$(\Pi(A,t),C(W,A,t))$.

Sorensen 等[33]主要是在以下几个方面做出了贡献.第一,考虑了未支撑风险,指出私募股权投资的风险并不完全是由公开市场所支撑的;第二,在私募股权投资中,流动性不足所造成的成本是相当大的,普通合伙人必须创造足够大的 α 才能弥补有限合伙人的收益;第三,给出了更加简易的关于杠杆和相关风险债务的定价公式,同时在传统的 B-S 期权定价公式中加以发展,给出了私募股权投资资产、普通合伙人报酬和有限合伙人合伙利益的期权定价公式;第四,提出了更符合实际的替代业绩度量表达式,即公开市场等价(PME)和内部收益率(IRR).

近年来,在投资环境不断完善的背景下,我国正吸引着全球的私募资本,私募股权投资在我国得以快速发展.徐子尧等[34]利用对深交所创业板企业的实证分析,研究了私募股权投资对上市公司过度投资行为的影响,指出私募股权投资可以有效减少上市公司滥用自由现金流的过度投资行为.他们鼓励公司积极引进优秀的私募机构,以促进其投资行为的理性化.赵彤等[35]阐述了私募股权投资的理论定义和特征,进而对北美州、欧洲和亚太地区所呈现出的私募股权投资的发展特征和产生原因进行了比较和分析,从中总结出对我国发展私募股权投资的启示.郝宁等[36]分析了我国私募股权投资基金的发展现状,并给出了建议.王燕鸣等[37]研究了我国私募股权投资的流动性风险.在私募股权投资的估值问题方面,经典的估值理论包括现金流量贴现法、相对估价法、资产评估法和期权法.靳磊[38]比较分析了国内外私募股权投资公司的估值方法,梳理了估值模型着重考察的现金状况、资本结构、股东价值和社会责任等.刘炯晖[39]介绍了我国私募股权投资行业的情况,指出了造成当前私募股权机构普遍陷入发展困境的主要原因,并就如何进一步完善私募股权行业发展提出了建议.周翔翼等[40]分析了中国大陆私募股权市场 1994—2008 年间的风险投资数据,探讨了风险投资资金注入对新增投资估值的影响.常忠义[41]在非稳态均衡的产业结构假设下,基于博弈情势的估值假说的基本原理,运用博弈分析等方法对私募股权投资企业进行了估值,是对经典估值方法的很好补充.综上可见,由于私募股权投资环境的复杂性,传统的估值方法在某些情形下存在一定的短板,而目前在私募股权投资估值问题中,对期权法的理论研究发展有限,因此在私募股权投资估值问题研究中,对传统期权估值方法加以发展具有重要意义.

2 带有未支撑风险的私募股权投资模型的扩展

下面将针对通货膨胀情形、Knight 不确定以及跳扩散情形下的理论研究进行阐述,进而通过分析得出在上述模型的基础上,可以在这 3 个框架下进行拓展并给出相应的思路.

2.1 通胀情形下的投资组合研究回顾

高通胀率往往与经济滞胀、失业率高以及经济危机的爆发具有密切的关系.通货膨胀的存在影响着投资者的投资.在 20 世纪最后的 20 年,通货膨胀开始从西方强国转而侵蚀着发展中国家,尤其是中国.虽然未来通货膨胀的发展情况无法预测,但可以肯定的是,随着经济的发展,我国货币政策与财政政策的逐渐放宽以及投资环境的开放,通货膨胀必将继续存在.因此,在通胀环境下最优投资策略的研究具有重要的意义.

Mundell[42]研究了通胀和实际利率,指出利率会随着预期通胀率的增加而增加.Brennan 等[43]研究了在通胀环境下,有限投资期限的投资者的动态资产分配问题.投资者的最优投资策略和间接效用通过简单的闭型式给出,并指出对冲需求依赖于投资者的投资期限、风险厌恶以及投资组合中债券的期限.张成思[44]研究了 1980—2007 年中国通货膨胀的惯性特征,指出我国货币政策的滞后效应明显,通货膨胀对政策变化的反应缓慢.姚海祥等[45]在考虑通货膨胀因素下,利用均值-方差模型研究了连续时间投资组合选择问题.费为银等[46]研究了通胀服从均值回复过程的最优消费和投资策略.费为银等[47]在展望理论的框架下研究了通胀因素对带激励的对冲基金最优投资的影响,得出了经通胀折现的风险资产价格动力学方程,并以考虑通胀因素后的终端财富效用最大化为目标,利用鞅方法推导出对冲基金管理者的最优投资策略.

综合上述文献,可见在公开市场上的投资组合选择以及对冲基金投资方面进行研究的学者已经在通胀环境下做出了一些研究工作,并得出了重要的结果.然而在通胀环境下的私募股权投资问题尚未展开.为了适应现实中市场环境的变化,我们的理论研究应注意到通胀环境的变化.由于私募股权投资中含有流动性不足的风险,其投资期限较长,通胀因素很可能对其具有很大的影响,因此需在带有未支撑风险的私募股权投资模型中利用通货膨胀折扣率对资产价格进行折现,使得模型更加具有现实意义,

也更加符合中国目前所处的经济环境.

2.2 Knight 不确定下的投资组合研究回顾

以上对私募股权投资的研究中,所谓的"风险"都是有概率分布的不确定性,但在现实生活中,由于时间或主客观条件的限制,例如信息的不完善和数据的不明确等使得人们无法得到一个精确的概率,甚至没有客观概率.Knight[48]最早提出了这个问题,并将不确定性分为概率不确定性和 Knight 不确定性(模糊不确定性).Ellsberg[49]研究了风险及模糊性.在实际生活中,Knight 不确定性也更符合实际情况,通过对 Knight 不确定性的研究往往会得出许多更好的结果.因此在投资组合的研究上,Knight 不确定也引起越来越多学者的关注.Epstein 等[50]研究了 Knight 不确定下的跨期资产定价问题,推广了 Lucas 的一般均衡纯交换经济理论,给出了均衡的存在性的证明,同时通过"Euler 不等式"刻画了均衡定价.Chen 等[51]研究了连续时间下含糊、风险和资产收益,刻画了一个连续时间跨期多先验效用模型.模型中容许对含糊不确定的厌恶,在一个具有代表性的代理人资产市场背景下,模型传达了对超额收益的约束,并反映了"风险溢价"和"含糊溢价"的区别.在此基础上,Fei[52]采用递推多先验效用函数,研究了在区别含糊和风险的情形下,一个带有预期的 Merton 类模型的最优消费和投资组合问题,指出了含糊和预期对投资者行为的影响.Peng[53]研究了不确定情形下的非线性期望和随机微积分,特别是次线性期望,给出了最大化分布和 G-正态分布、非线性期望空间下的大数定理和中心极限定理,开创性地提出了 G-布朗运动过程和 G-伊藤积分,进而得出应用广泛的 G-伊藤公式.他提出的 G-鞅、Jensen 不等式以及相应的随机微分方程也具有相当大的作用.最后还给出 G-布朗运动的容度和拟必然分析.在此基础上,Fei 等[54]研究了 G-布朗运动下的最优随机控制与最优消费和投资组合问题,得出了两基金分离定理的显式表达式,并强调在现实经济环境中,受 G-布朗运动干扰的随机控制系统的研究是非常贴合实际的,并且得出的结论也更加准确,更能反应实际经济意义.韩立岩等[55]研究了 Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型,运用 λ-模糊测度和 Choquet 积分求解欧式无红利期权的价格,所得期权价格是一个区间而不是某个特定数值,指出模糊测度参数 λ 的取值可以反映投资者个体的主观情绪,并且 λ 的变化能够反应投资个体的情绪变化.徐元栋等[56]综述了 Knight 不确定性下的行为决策理论,并在之基础上,分析了行为决策科学发展过程中存在的问题,提出了进一步的研究领域.费为银等[57]研究了奈特(Knight)不确定下带高水印的对冲基金最优投资组合,其中资产价格的波动是用 G-布朗运动来刻画的,基金管理者是通过高水印管理报酬合约来补偿的,管理者的目标是实现预期累计激励费的净现值的最大化.利用非线性期望下随机分析和随机动态规划方法推导出带有特定边界条件的值函数的 G-HJB 方程,从而获得最优投资组合策略,其中管理者是风险中性的,其最优投资组合不受高水印合约中激励费率的影响.

因此,在含有未支撑风险的私募股权投资模型中可以考虑利用 G-布朗运动来刻画标的资产价格波动率的不确定性,同时私募股权投资中的期权定价不同于标准的"风险中性"B-S 定价公式,其定价公式中包含管理者的增值技术"α",而在 Knight 不确定环境下私募股权投资的定价公式也值得去发展探索,进而得出更贴近实际的理论成果.

2.3 跳扩散环境下的动态资产配置研究回顾

现实生活中,一些重大事件的发生往往会引发股票价格和波动率的突然变化,而这种由突发事件所带来的风险即被称为跳风险.例如,1987 年 10 月 19 日,股票市场的崩盘事件使得道琼斯指数下降了 508 个点.由此可见,跳风险的影响是巨大的,与突发事件相关的跳风险在很多方面都影响着动态投资组合选择.因此,越来越多的国内外学者开始研究跳风险在动态资产配置问题中的影响,并得出了很多重要的成果.

Merton[7]以及 Das 等[58]研究了价格跳的影响.Liu[59]研究了随机波动率的影响.然而之前的研究中都未将波动率的变化和价格变化结合起来考虑,于是,Liu 等[60]研究了价格和波动率都发生跳对投资策略的影响,并利用 Duffie 等[61]的双跳框架,通过随机最优控制方法求出了最优投资组合问题的解析解,指出当投资者面临突发事件风险时,是不愿意承担杠杆或卖空的.Wu[62]分析了在罕见事件下的最优动态资产分配问题,其中投资机会是随机且可预测的,给出了解析形式的近似解.通过比较分析和校准实践指出跳风险不仅使投资者的投资决策更加保守,而且随着时间的推移,投资者的动态投资组合再平衡不再引人注目.费为银等[63]在资产价格处于跳

扩散环境下时,分析了通胀因素和跳的变化对投资者资产分配的影响.他们在理论部分利用 Itô 公式推导出通胀环境下的消费篮子价格动力学方程,以经通胀折现后的终端财富预期效用最大化为标准,运用随机动态规划方法,求解 HJB 方程得出最优投资策略,获得最优动态资产配置策略的近似解,最后分析了通胀对冲需求和跳对短视需求的影响,解释了相应的经济学意义.费为银等[64]研究了在极端事件冲击下含糊厌恶投资者的最优投资组合问题,其中投资者不仅对损失风险是厌恶的,而且对模型不确定也是厌恶的.

在私募股权投资中,由于基金持有流动性不足资产的期限较长,一般为 10 年,在投资期限内,发生突发事件的概率相对较高,因而在研究私募股权投资的过程中,考虑在标的资产价格公式中加入用 Poisson 过程来刻画的跳风险因素对最优投资组合和消费的影响是至关重要的.

3 总结

本文首先简要地介绍了投资组合理论的发展历史和研究成果,引出私募股权投资问题,接着详细地阐述了私募股权投资的估值问题的研究现状,总结出国内外学者在私募股权投资上主要研究了业绩表现、风险与收益、杠杆和有限合伙人的最优投资组合选择等方面的问题,并较为详尽地阐述了这方面的研究现状.

其次,结合 Sorensen 等[33]的研究成果,详细阐述了带有未支撑风险的私募股权投资模型,指出在实际私募股权投资过程中,投资者所面对的风险并不完全由公开市场所支撑,而是面对很大一部分的未支撑风险,这对投资者的投资组合选择及收益会产生相当大的影响.这一理论成果对私募股权投资估值的研究具有很大的推动作用.接着本文还介绍了在通胀环境、Knight 不确定以及跳扩散环境下的研究成果.在 Sorensen 等[33]的研究工作中,主要考虑了风险中的未支撑部分,而通过分析发现,通胀环境、Knight 不确定以及跳风险等因素都会影响投资者的最优投资策略,因此,可以在现有的模型基础上从以下几个方面进行进一步研究:第一,在私募股权投资中考虑通胀因素;第二,在 Knight 不确定下,通过引入 G-布朗运动来对私募股权投资问题进行研究;第三,考虑在跳扩散环境下,私募股权投资的最优投资组合和消费.

参考文献

References

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91
[2] Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk[J]. Review of Economic Studies, 1958, 25(2): 65-86
[3] Modigliani F, Miller M H. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment[J]. American Economic Review, 1958, 48(3): 261-297
[4] Sharpe W F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk[J]. The Journal of Finance, 1964, 19(3): 425-442
[5] Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets[J]. The Review of Economics and Statistics, 1975, 47(1): 131-155
[6] Samuelson P A. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming[J]. Review of Economics and Statistics, 1969, 51(3): 239-246
[7] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4): 373-413
[8] Metrick A, Yasuda A. The economics of private equity funds[J]. Review of Financial Studies, 2010, 23(6): 2303-2341
[9] Metrick A, Yasuda A. Venture capital and other private equity: A survey[J]. European Financial Management, 2011, 17(4): 619-654
[10] Harris R S, Jenkinson T, Kaplan S N. Private equity performance: What do we know?[J]. The Journal of Finance, 2014, 69(5): 1851-1882
[11] Kaplan S N, Schoar A. Private equity performance: Returns, persistence, and capital flows[J]. The Journal of Finance, 2005, 60(4): 1791-1823
[12] Phalippou L, Gottschalg O. The performance of private equity funds[J]. Review of Financial Studies, 2009, 22(4): 1747-1776
[13] Jegadeesh N, Kräussl R, Pollet J. Risk and expected returns of private equity investments: Evidence based on market prices[J]. SSRN Electronic Journal, 2014, 28(12): 3269-3302
[14] Lerner J, Schoar A, Wongsunwai W. Smart institutions, foolish choices: The limited partner performance puzzle[J]. The Journal of Finance, 2007, 62(2): 731-764
[15] Cochrane J H. The risk and return of venture capital[J]. Journal of Financial Economics, 2005, 75(1): 3-52
[16] Caballero R J. Earnings uncertainty and aggregate wealth accumulation[J]. The American Economic Review, 1991, 81(4): 859-871
[17] Axelson U, Jenkinson T, Strömberg P. Borrow cheap, buy high? The determinants of leverage and pricing in buyouts[J]. The Journal of Finance, 2013, 68(6): 2223-2267
[18] Ivashina V, Kovner A. The private equity advantage: leveraged buyout firms and relationship banking[J]. Review of Financial Studies, 2011, 24(7): 2462-2498

[19] Black F,Scholes M.The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637-654
[20] Chung K H,Charoenwong C.Investment options,assets in place,and the risk of stocks[J].Financial Management, 1991,20(3):21-33
[21] Meyer T,Mathonet P Y.Beyond the J curve:Managing a portfolio of venture capital and private equity funds[M]. Chichester,England:John Wiley & Sons,Ltd,2005
[22] Svensson L E O,Werner I M.Nontraded assets in incomplete markets:Pricing and portfolio choice[J].European Economic Review,1993,37(5):1149-1168
[23] Duffie D,Fleming W,Soner H M,et al.Hedging in incomplete markets with HARA utility[J].Journal of Economic Dynamics and Control,1997,21(4):753-782
[24] Koo H K.Consumption and portfolio selection with labor income:A continuous time approach[J]. Mathematical Methods and Operations Research,1999,50(2):219-243
[25] Viceira L M.Optimal portfolio choice for long-horizon investors with nontradable labor income[J].The Journal of Finance,2001,56(2):433-470
[26] Kahl M,Liu J,Longstaff F A.Paper millionaires:How valuable is stock to a stockholder who is restricted from selling it? [J]. Journal of Financial Economics, 2003, 67(3):385-410
[27] Chen H,Miao J J,Wang N.Entrepreneurial finance and nondiversifiable risk[J]. Review of Financial Studies, 2010,23(12):4348-4388
[28] Wang C,Wang N,Yang J Q.A unified model of entrepreneurship dynamics[J].Journal of Financial Economics, 2012,106(1):1-23
[29] Goetzmann W N,Ingersoll J E,Ross S A. High-water marks and hedge fund management contracts[J]. The Journal of Finance,2003,58(4):1685-1718
[30] Panageas S,Westerfield M M. High-water marks:High risk appetites? Convex compensation,long horizons,and portfolio choice[J]. The Journal of Finance, 2009, 64(1):1-36
[31] Lan Y,Wang N,Yang J Q.The economics of hedge funds[J]. Journal of Financial Economics, 2013, 110(2):300-323
[32] Ang A, Papanikolaou D, Westerfield M M. Portfolio choice with illiquid assets[J]. Management Science, 2014,60(11):2737-2761
[33] Sorensen M,Wang N,Yang J Q.Valuing private equity[J]. Review of Financial Studies, 2014, 27(7):1977-2021
[34] 徐子尧,郑芳,刑洁.私募股权投资对上市公司过度投资行为的影响:基于创业板企业的实证分析[J].金融经济学研究,2015,30(3):73-82
XU Ziyao,ZHENG Fang,XING Jie.The impact of private equity on the over-investment behavior of listed companies:Evidence from Chinese GEM[J].Journal of Finance and Economics,2015,30(3):73-82
[35] 赵彤,杨迁,袁丽丽.私募股权投资基金发展机制比较研究[J].现代管理科学,2011(10):58-60
ZHAO Tong, YANG Qian, YUAN Lili. A comparative study on the development mechanism of private equity investment fund[J]. Modern Management Science, 2011(10):58-60
[36] 郝宁,程磊.我国私募股权投资基金发展现状浅析及建议[J].山西财经大学学报,2014,36(增刊1):33-57
HAO Ning,CHENG Lei.Current situation and suggestions on the development of private equity fund in China[J]. Journal of Shanxi Finance and Economics University, 2014,36(sup1):33-57
[37] 王燕鸣,曹尹南.我国私募股权投资流动性风险研究[J].现代财经(天津财经大学学报),2015,35(10):12-22
WANG Yanming, CAO Yinnan. Private equity performance and liquidity risk in Chinese market[J]. Modern Finance and Economics(Journal of Tianjin University of Finance and Economics),2015,35(10):12-22
[38] 靳磊.私募股权基金估值方法比较研究[J].现代管理科学,2012(11):52-55
JIN Lei.A comparative study on valuation methods of private equity funds[J].Modern Management Science,2012(11):52-55
[39] 刘炯晖.中国私募股权投资估值问题研究[J].管理观察,2014(18):80-81
LIU Jionghui.Research on the valuation of private equity investment in China[J]. Management Observer, 2014(18):80-81
[40] 周翔翼,魏宇航,肖晟.资金流入对私募股权价值的影响:来自中国私募股权市场的证据[J].山西财经大学学报,2013,35(6):42-48
ZHOU Xiangyi,WEI Yuhang,XIAO Sheng.Effect of fund inflows on private equity valuation: Evidence from Chinese private equity market[J].Journal of Shanxi Finance and Economics University,2013,35(6):42-48
[41] 常忠义.中国私募股权投资中的估值问题研究[D].合肥:中国科学技术大学管理学院,2008
CHANG Zhongyi.The study in valuation of private equity investment in China[D].Hefei:The School of Management, University of Science and Technology of China,2008
[42] Mundell R.Inflation and real interest[J].Journal of Political Economy,1963,71(3):280-283
[43] Brennan M J,Xia Y H.Dynamic asset allocation under inflation[J]. The Journal of Finance, 2002, 57(3):1201-1238
[44] 张成思.中国通胀惯性特征与货币政策启示[J].经济研究,2008(2):33-43
ZHANG Chengsi.The nature of inflation inertia in China and its implications on monetary policy[J]. Economic Research Journal,2008(2):33-43
[45] 姚海祥,姜灵敏,马庆华,等.考虑通胀因素下的连续时间均值-方差投资组合选择[J].控制与决策,2013,28(1):43-48
YAO Haixiang,JIANG Lingmin,MA Qinghua,et al.Continuous-time mean-variance portfolio selection under inflation[J].Control and Decision,2013,28(1):43-48
[46] 费为银,吕会影,余敏秀.通胀服从均值回复过程的最优消费和投资决策[J].系统工程学报,2014,29(6):791-798
FEI Weiyin,LÜ Huiying,YU Minxiu.Decision making for

optimal consumption and portfolio under inflation with mean-reverting process[J].Journal of Systems Engineering,2014,29(6):791-868
[47] 费为银,李允贺,夏登峰.通胀下带激励的对冲基金最优投资[J].系统工程理论与实践,2015,35(11):2740-2748
FEI Weiyin,LI Yunhe,XIA Dengfeng.Optimal investment strategies of hedge funds with incentive fees under inflationary environment[J].Systems Engineering-Theory & Practice,2015,35(11):2740-2748
[48] Knight F H.Risk,uncertainty and profit[M].Boston:Houghton Mifflin,1921
[49] Ellsberg D.Risk,ambiguity,and the savage axioms[J].The Quarterly Journal of Economics,1963,75(2):643-669
[50] Epstein L G,Wang T.Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty[J].Econometrica,1994,62(2):283-322
[51] Chen Z J,Epstein L.Ambiguity,risk,and asset returns in continuous time[J].Econometrica,2002,70(4):1403-1443
[52] Fei W Y.Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation[J].Information Sciences,2007,177(23):5178-5190
[53] Peng S G.Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty[Z].Preprint,arXiv:1002.4546v1,[math,PR],2010
[54] Fei W Y,Fei C.Optimal stochastic control and optimal consumption and portfolio with G-Brownian motion[Z].Preprint,arXiv:1309.0209v1,[math,PR],2013
[55] 韩立岩,周娟.Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型[J].系统工程理论与实践,2007,27(12):123-132
HAN Liyan,ZHOU Juan.Option pricing with fuzzy measures under Knightian uncertainty[J].Systems Engineering-Theory & Practice,2007,27(12):123-132
[56] 徐元栋,黄登仕,刘思峰.奈特不确定性下的行为决策理论研究综述[J].系统管理学报,2008,17(5):481-489
XU Yuandong,HUANG Dengshi,LIU Sifeng.Knightian uncertainty and theory of choice under knightian uncertainty[J].Journal of Systems and Management,2008,17(5):481-489
[57] 费为银,朱涛涛,费晨.奈特不确定下带高水印的对冲基金最优投资组合[J].工程数学学报,2015,32(6):823-834
FEI Weiyin,ZHU Taotao,FEI Chen.Optimal portfolio of hedge fund with high water mark under Knightian uncertainty[J].Chinese Journal of Engineering Mathematics,2015,32(6):823-834
[58] Das S R,Uppal R.Systemic risk and international portfolio choice[J].The Journal of Finance,2004,59(6):2809-2834
[59] Liu J.Portfolio selection in stochastic environments[J].The Review of Financial Studies,2007,20(1):1-39
[60] Liu J,Longstaff F,Pan J.Dynamic asset allocation with event risk[J].The Journal of Finance,2003,58(1):231-259
[61] Duffie D,Pan J,Singleton K.Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions[J].Econometrica,2000,68(6):1343-1376
[62] Wu L R.Jump and dynamic asset allocation[J].Review of Quantitative Finance and Accounting,2003,20(3):207-243
[63] 费为银,蔡振球,夏登峰.跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置[J].管理科学学报,2015,18(8):83-93
FEI Weiyin,CAI Zhenqiu,XIA Dengfeng.Dynamic asset allocation with inflation under jump-diffusion environment[J].Journal of Management Sciences in China,2015,18(8):83-93
[64] 费为银,刘鹏,夏登峰.极端事件冲击下含糊厌恶投资者的最优投资组合选择问题[J].中国科学技术大学学报,2014,44(9):724-731
FEI Weiyin,LIU Peng,XIA Dengfeng.Ambiguity aversion investor's optimal portfolio with rare events[J].Journal of University of Science and Technology of China,2014,44(9):724-731

Research advances on the valuation issue of private equity investment

ZHU Qiming[1] FEI Weiyin[1] FEI Chen[2]
1 School of Mathematics and Physics,Anhui Polytechnic University,Wuhu 241000
2 The Glorious Sun School of Business and Management,Donghua University,Shanghai 200051

Abstract In this paper,we explain the valuation issue of private equity investment.First,we briefly introduce the development history and research results of the portfolio problem.Then we discuss the research situation of the valuation issue of private equity investment in detail,including the portfolio selection of limited partners,as well as the research on the value evaluation system and evaluation methods of investment enterprises.And we give the model to be studied,namely the private equity model with unspanned risk.Finally,we give the expansion of the framework of the model under inflation,Knightian uncertainty and jump diffusion environment.

Key words portfolio;private equity investment;stochastic calculus;inflation;Knightian uncertainty;jump risk