文章编号:1674-7070(2010)06-0489-06

δ算子不确定系统的无抖振滑模控制

刘云龙[1] 高存臣[1,2] 相南[2]

摘要

研究了一类δ算子不确定系统滑模变结构控制综合问题.给出了δ算子系统的理想趋近律,分析了采用理想趋近律与指数趋近律设计滑模控制器的异同.所设计的滑模控制将连续时间系统和离散时间系统统一到δ算子系统,有限时间内可达切换面,有效地削弱了抖振.仿真实例验证了该方法的可行性和有效性.

关键词

δ算子;滑模控制;趋近律;抖振

中图分类号 TP273

文献标志码 A

收稿日期 2010-09-12

资助项目 国家自然科学基金(60974025)

作者简介

刘云龙,男,博士生,研究方向为变结构控制、智能控制等. fhylren@163.com

1 中国海洋大学 信息科学与工程学院,青岛,266100

2 中国海洋大学 数学科学学院,青岛,266100

0 引言

Introduction

δ算子系统是连续时间系统和离散时间系统的统一描述形式[1-2].δ算子是一种离散化方法,在高速采样时,δ算子离散化系统趋近于原连续系统,既有效避免了传统移位算子方法在高速采样时引起病态条件的问题[3],又使得连续系统的各类设计方法可直接应用于离散系统设计.在高速信号处理、数字采样控制和宽带通信等领域取得了许多成果[4-5].

变结构控制是一种先进的非线性反馈控制,其非线性表现为控制的不连续性.滑模控制是变结构控制常用的控制设计模式,物理容易实现,在一定条件下对系统内部参数摄动和外部干扰具有不变性.随着计算机技术的迅速革新和工业自动化的发展需要,滑模变结构控制理论在离散系统[6]、随机系统[7]、滞后系统[8]、混沌系统[9]等众多领域取得了很大进展.趋近律方法是设计滑模变结构控制的常用方法.文献[6]给出了设计离散滑模控制的指数趋近律方法,物理实现简单,但有一定的抖振,稳态性较差;文献[10]给出了比例—等速—变速控制的离散趋近律,理论分析系统最终稳定于原点,但进入切换带之前抖振幅度较大;文献[11]提出了两个改进的离散趋近律;文献[12]给出了时变衰减幂次趋近律;文献[13]分析了不同类型趋近律的滑模控制设计方法和不变性保障机理.

基于δ算子的控制理论和滑模变结构控制研究已经取得了一些成果.文献[14]研究了单输入δ算子系统变结构控制;文献[15]给出了有关δ算子系统的控制理论和H_∞控制;文献[16]设计了δ算子系统的全程滑模变结构控制;文献[17]研究了基于δ算子的时滞系统的变结构控制;文献[18]研究了δ算子系统滑模变结构控制的状态观测器设计问题.

本文针对一类含有系统内部参数摄动和外部干扰的δ算子不确定系统的滑模变结构控制问题,根据文献[6,13],采用指数趋近律和理想趋近律方法进行研究.所设计的滑模控制将连续系统和离散系统统一到δ算子系统,有限时间内可达切换面,有效地削弱了抖振,提高了系统动态品质.仿真实例验证了该方法的可行性与有效性.

1 δ算子系统描述

Delta operator system description

δ算子也称增量差分算子,定义如下:

$$\delta \boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t), & T = 0, \\ \dfrac{\boldsymbol{x}(t+T) - \boldsymbol{x}(t)}{T}, & T \neq 0. \end{cases}$$

其中:T 为采样周期. $T=0$ 时为连续系统;$T\neq 0$ 时为离散系统.δ 算子把连续系统和离散系统统一起来.

在控制理论中,δ 算子又称 Euler 算子,定义如下:

$$\delta \boldsymbol{x}(k) = \frac{q-1}{T}\boldsymbol{x}(k).$$

其中:q 为前向移位算子,即 $q\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(k+1)$.

考虑如下 δ 算子描述的不确定系统:

$$\delta \boldsymbol{x}(k) = (\bar{\boldsymbol{A}} + \Delta\bar{\boldsymbol{A}}(k))\boldsymbol{x}(k) + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(k) + \bar{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{d}}(k). \quad (1)$$

其中:$\boldsymbol{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量;$\boldsymbol{u}(k) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入;$\tilde{\boldsymbol{d}}(k) \in \mathbf{R}^l$ 为外部干扰且 $\tilde{\boldsymbol{d}}(k) \in L_2(0, +\infty)$;$\bar{\boldsymbol{A}} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \bar{\boldsymbol{B}} \in \mathbf{R}^{n\times m}, \bar{\boldsymbol{D}} \in \mathbf{R}^{n\times l}$ 为常值矩阵;$\Delta\bar{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 表示非匹配的系统内部参数摄动.

规定 $\boldsymbol{P} \geqslant \boldsymbol{Q}$,其中 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{m\times n}$,表示 $p_{ij} \geqslant q_{ij}, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n$.

假设 1 $(\bar{\boldsymbol{A}}\ \bar{\boldsymbol{B}})$ 可控;$\mathrm{rank}(\bar{\boldsymbol{B}}) = m < n$.

假设 2 $\tilde{\boldsymbol{d}}(k)$ 有界,即存在 $\tilde{M} > 0$,使得 $\|\tilde{\boldsymbol{d}}(k)\| \leqslant \tilde{M}; \bar{\boldsymbol{D}} \in \mathrm{Im}(\bar{\boldsymbol{B}})$. 其中,$\mathrm{Im}(*)$ 表示 $*$ 的象空间.

假设 3 非匹配项 $\Delta\bar{\boldsymbol{A}}(k)$ 有界,满足 $\Delta\bar{\boldsymbol{A}}(k) = \bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}(k)\bar{\boldsymbol{G}}$. 其中:$\boldsymbol{F}(k) \in \boldsymbol{\Gamma} = \{\boldsymbol{F}(k) \mid \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{F}(k) \leqslant \boldsymbol{I}\}; k = 0,1,2,\cdots; \boldsymbol{I}$ 为 $n\times n$ 维单位矩阵;$\bar{\boldsymbol{E}}, \bar{\boldsymbol{G}}$ 为具有相容维数的常值矩阵.

假定所有元素 Lebesgue 可测,且矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 满秩.

由假设 2 知,存在矩阵 $\tilde{\boldsymbol{D}} \in \mathbf{R}^{m\times l}$,使得 $\bar{\boldsymbol{D}} = \bar{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{D}}$. 令 $\boldsymbol{d}(k) \triangleq \tilde{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{d}}(k)$,则 $\|\boldsymbol{d}(k)\| \leqslant \|\tilde{\boldsymbol{D}}\|\tilde{M} \triangleq M$.

由假设 1 知,存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{H}$,使得 $\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{0}_{(n-m)\times m}\ \boldsymbol{B}_m]^{\mathrm{T}}$,其中:$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}_m) = m$. 利用非奇异变换 $\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(k)$,则系统(1)可化为

$$\delta \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{g}(k). \quad (2)$$

其中:$\boldsymbol{g}(k) = \Delta\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k)$ 为不确定项.

$$\delta \boldsymbol{y}(k) = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{y}_1(k) \\ \delta \boldsymbol{y}_2(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1(k) \\ \boldsymbol{y}_2(k) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{(n-m)\times m} \\ \boldsymbol{B}_m \end{bmatrix},$$

$$\Delta\boldsymbol{A}(k) = \boldsymbol{H}\Delta\bar{\boldsymbol{A}}(k)\boldsymbol{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{A}_{11}(k) & \Delta\boldsymbol{A}_{12}(k) \\ \Delta\boldsymbol{A}_{21}(k) & \Delta\boldsymbol{A}_{22}(k) \end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{G} = \bar{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{H}^{-1}$,则

$$\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{F}(k)\boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{F}(k) \leqslant \boldsymbol{I}.$$

系统(2)的理想系统如下:

$$\delta \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k). \quad (3)$$

引理 1 PBH 判据[3]. 系统(3)可控的充分必要条件是,$\forall s \in \mathbf{C}$,且 s 为有限数,$\mathbf{C}$ 为复数域,有

$$\mathrm{rank}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = n.$$

引理 2 Lyapunov 间接法[3]. δ 算子线性时不变系统 $\delta\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)$ 渐近稳定的充分必要条件是,所有极点在以 $\left(-\frac{1}{T}, j0\right)$ 为圆心,以 $\frac{1}{T}$ 为半径的左复平面的稳定圆 D_δ 内.

引理 3 Lyapunov 直接法[15]. δ 算子非线性系统 $\delta\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))$,其中,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. 若存在正定函数 $V(\boldsymbol{x}(k))$,对任意 $\boldsymbol{x}(k)$ 满足:

$$\delta V(\boldsymbol{x}(k)) = \frac{V(\boldsymbol{x}(k+1)) - V(\boldsymbol{x}(k))}{T} < 0,$$

则系统平衡态渐近稳定. 若还满足:当 $\|\boldsymbol{x}(k)\| \to \infty$ 时,$V(\boldsymbol{x}(k)) \to \infty$,则系统平衡态大范围渐近稳定.

2 理想趋近律设计
Design of ideal reaching law

趋近律是一种期望的滑模动态轨线,趋近律自身不应有抖振. 由于系统中存在着不确定性以及各种滞后因素的影响,这种理想滑动模态无法实现,总会产生以抖振为主要特征的滑动模态. 趋近律的设计应该满足变结构控制系统的到达条件,因此它必须满足:1) 有限时间可达切换面; 2) 趋近切换面. 文献[6]给出了离散时间系统的指数趋近律形式:

$$\boldsymbol{s}(k+1) = (1 - \alpha T)\boldsymbol{s}(k) - \varepsilon T\mathrm{sgn}\boldsymbol{s}(k).$$

其中:$\varepsilon > 0, 0 < \alpha T < 1$. 采用指数趋近律设计的变结构控制系统具有严格数学模型,控制易实现,但稳态性较差,有一定抖振. δ 算子系统的指数趋近律为

$$\delta \boldsymbol{s}(k) = -\alpha\boldsymbol{s}(k) - \varepsilon\mathrm{sgn}\boldsymbol{s}(k). \quad (4)$$

根据实际问题选取合适系数. 据引理 3 可证,趋近律(4)是 δ 算子系统变结构控制的等式到达条件.

作为一种设计目标,理想滑模动态应该不出现抖振且有限时间内到达并稳定于切换面[13]. 下面给出 δ 算子系统的理想趋近律定义.

定义 1 理想趋近律是一种人为预先设定的无抖振(实际为微弱抖振),有限时间内可达切换面,并稳定于切换面的理想滑模动态轨线.

对于 δ 算子系统,据理想趋近律定义,可设计为

$$\delta \boldsymbol{s}(k) = \boldsymbol{I}(\gamma).$$

其中:$\boldsymbol{I}(\gamma) = [I_1(\gamma), I_2(\gamma), \cdots, I_m(\gamma)]; \boldsymbol{s}(k) = [s_1(k),$

$s_2(k),\cdots,s_m(k)]$. $I_i(\gamma)=\begin{cases}-\beta_i(\gamma), & \|s_i(k)\|>\Delta,\\ 0, & \|s_i(k)\|\leqslant\Delta;\end{cases}$

$\beta_i(\gamma)>0,i=1,2,\cdots,m.\ \Delta>0$ 为切换面内包含原点的小邻域.

为简单化,令 $\beta_i(\gamma)=\gamma\in(0,+\infty)$,得

$$\delta\boldsymbol{s}(k)=\boldsymbol{I}(\gamma),\quad \boldsymbol{I}(\gamma)=\begin{cases}-\gamma, & \|\boldsymbol{s}(k)\|>\Delta,\\ \boldsymbol{0}, & \|\boldsymbol{s}(k)\|\leqslant\Delta.\end{cases}\tag{5}$$

根据实际问题选取参量 γ,趋近律(5)也是 δ 算子系统变结构控制的等式到达条件.

3 滑模变结构控制综合问题

Synthesis problem of sliding mode VSC

δ 算子系统的滑模变结构控制设计可分为两步:1) 选取切换函数 $\boldsymbol{s}(k)$,使系统在切换带内的滑动模态渐近稳定;2) 设计合适的滑模变结构控制律 $\boldsymbol{u}(k)$,保证从任意初始状态出发的系统运动轨线均能在有限时间内到达切换带内.

3.1 切换函数选取

考虑系统(2)的滑模变结构控制,选取切换函数

$$\boldsymbol{s}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{y}_1(k)+\boldsymbol{y}_2(k).\tag{6}$$

其中:$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{I}_{(m\times m)}]$,$\boldsymbol{C}_m\in\mathbf{R}^{m\times(n-m)}$. 切换面共有 m 个,下面给出准滑动模态数学表示.

设切换面:$S=\{\boldsymbol{y}(k)\,|\,\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{y}_1(k)+\boldsymbol{y}_2(k)=\boldsymbol{0}\}$.

切换带:$S_\Delta=\{\boldsymbol{y}(k)\,\|\,|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{y}_1(k)+\boldsymbol{y}_2(k)\|<\Delta\}$.

定义 2 从任意初态出发的系统运动轨线,或者于有限时间内到达切换面,并在其上滑动,称之为理想准滑动模态;或者于有限时间内到达切换带,并在其内运动,来回穿越切换面,称之为非理想准滑动模态. 其数学表示:存在正整数 N,当 $k>N$ 时,有

$$\begin{cases}\|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{y}_1(k)+\boldsymbol{y}_2(k)\|<\Delta,\\ \operatorname{sgn}\delta\boldsymbol{s}(k)=-\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k).\end{cases}$$

3.2 滑模控制器设计

引理 4 若$(\bar{\boldsymbol{A}}\ \bar{\boldsymbol{B}})$可控,则$(\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})$可控.

证明 由引理 1 知,$\forall\lambda\in\mathbf{C}$,且 λ 有限,只需证明 $\operatorname{rank}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})=n-m$.

由$(\bar{\boldsymbol{A}}\ \bar{\boldsymbol{B}})$可控知,$\operatorname{rank}(\lambda I-\bar{\boldsymbol{A}}\ \bar{\boldsymbol{B}})=n$,而

$$\operatorname{rank}(\lambda I-\bar{\boldsymbol{A}}\ \bar{\boldsymbol{B}})=$$

$$\operatorname{rank}(\lambda I-\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{H}^{-1}\ \boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{B}})=$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_{n-m}-\boldsymbol{A}_{11} & -\boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{A}_{21} & \lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{B}_m\end{bmatrix}=$$

$$\operatorname{rank}(\lambda\boldsymbol{I}_{n-m}-\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})+m.$$

所以,$\operatorname{rank}(\lambda I-\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})=n-m$.

定理 1 对于系统(3),若$(\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})$可控,则存在控制 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}_1(k)+\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{y}_2(k)$,使得系统(3)渐近稳定.

证明 对于系统(3),由$(\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})$可控知,存在矩阵 $\boldsymbol{K}_1\in\mathbf{R}^{m\times(n-m)}$,使得

$$\sigma(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{K}_1)\subset D_\delta.\tag{7}$$

其中:$\sigma(*)$表示矩阵 $*$ 的特征值集合. 令 $\boldsymbol{z}(k)=\boldsymbol{y}_2(k)-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{y}_1(k)$,则系统(3)可化为

$$\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{y}_1(k)\\ \delta\boldsymbol{z}(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}K_1 & \boldsymbol{A}_{12}\\ \mathring{\boldsymbol{A}}_{21} & \mathring{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1(k)\\ \boldsymbol{z}(k)\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{u}(k).\tag{8}$$

其中:

$$\mathring{\boldsymbol{A}}_{21}=\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{K}_1-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{K}_1,$$

$$\mathring{\boldsymbol{A}}_{22}=\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12}.$$

设矩阵 $\boldsymbol{K}_2$ 的所有特征值均落入 D_δ 内. 取控制

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(k)&=-\boldsymbol{B}_m^{-1}[\mathring{\boldsymbol{A}}_{21}\boldsymbol{y}_1(k)+(\mathring{\boldsymbol{A}}_{22}-\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{z}(k)]=\\ &-\boldsymbol{B}_m^{-1}(\boldsymbol{A}_{21}-\boldsymbol{K}_1A_{11}+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{y}_1(k)-\\ &\boldsymbol{B}_m^{-1}(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{y}_2(k).\end{aligned}\tag{9}$$

式(9)代入式(8),得

$$\delta\boldsymbol{z}(k)=\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{z}(k).\tag{10}$$

由式(7),(10)知,则 $k\to+\infty$ 时,

$$\boldsymbol{y}_1(k)\to\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}(k)\to\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{y}_2(k)=\boldsymbol{z}(k)+\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{y}_1(k)\to\boldsymbol{0}.$$

令

$$\boldsymbol{L}_1=\boldsymbol{A}_{21}-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1,$$

$$\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{K}_2,$$

则在控制 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}_1(k)+\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{y}_2(k)$ 作用下,系统(3)渐近稳定.

定理 2 对于系统(2),若$(\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})$可控,选取切换函数(6),则在切换面 S 上,系统(2)渐近稳定.

证明 在切换面 S 上,$\delta\boldsymbol{s}(k)=\boldsymbol{0}$,则

$$\boldsymbol{CAy}(k)+\boldsymbol{CBu}(k)+\boldsymbol{Cg}(k)=0.$$

考虑式(2),得等效控制 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}=&-\boldsymbol{B}_m^{-1}[(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{y}_1(k)+\\ &(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{y}_2(k)+\boldsymbol{Cg}(k)].\end{aligned}\tag{11}$$

由$(\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})$可控知,存在矩阵 $\boldsymbol{K}_1$,使得式(7)成立. 令 $\boldsymbol{z}(k)=\boldsymbol{y}_2(k)-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{y}_1(k)$. 由 $\delta\boldsymbol{s}(k)=\boldsymbol{0}$ 知,

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{z}(k)&=-\boldsymbol{C}_m\delta\boldsymbol{y}_1(k)-\boldsymbol{K}_1\delta\boldsymbol{y}_1(k)=\\ &-(\boldsymbol{C}_m+\boldsymbol{K}_1)(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_m)\boldsymbol{y}_1(k).\end{aligned}\tag{12}$$

因$(\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12})$可控,选取合适的 $\boldsymbol{C}_m$,使得

$$\sigma(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_m)\subset D_\delta.\tag{13}$$

令 $\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_m$,代入式(12),得 $\delta\boldsymbol{z}(k)=\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{z}(k)$. 于是得理想准滑动模态方程:

$$\begin{cases}\delta \boldsymbol{y}_1(k)=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{y}_1(k)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}_2(k),\\ \delta \boldsymbol{z}(k)=\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{z}(k),\\ \boldsymbol{z}(k)=\boldsymbol{y}_2(k)-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{y}_1(k),\\ \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{y}_1(k)+\boldsymbol{y}_2(k)=\boldsymbol{0}.\end{cases} \tag{14}$$

由定理1证明知,理想准滑动模态渐近稳定.

对于系统(2),选取切换函数(6),利用指数趋近律(4),得滑模变结构控制律:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}=&-\boldsymbol{B}_m^{-1}[(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{y}_1(k)+\\ &(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{y}_2(k)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(k)+\\ &\alpha\boldsymbol{s}(k)+\varepsilon\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)].\end{aligned} \tag{15}$$

式(15)含有不确定项,控制律不能实现. 为使控制律(15)能够实现,由假设2和假设3知,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{g}(k)\|\leqslant&\|\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{F}(k)\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k)\|\leqslant\\ &\|\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\|\boldsymbol{B}\|M.\end{aligned} \tag{16}$$

设计校正控制为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_c=&-\boldsymbol{B}_m^{-1}(\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\\ &\|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{B}_m\|M)\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k).\end{aligned} \tag{17}$$

将控制中的不确定项$-\boldsymbol{B}_m^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(k)$替换为$\boldsymbol{u}_c$,得滑模变结构控制律的确定性表达式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}=&-\boldsymbol{B}_m^{-1}[(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{y}_1(k)+\\ &(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{y}_2(k)+(\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\\ &\|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{B}_m\|M)\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)+\alpha\boldsymbol{s}(k)+\varepsilon\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)].\end{aligned} \tag{18}$$

定理3 对于系统(2),在定理2条件下,满足假设1—3,则存在滑模变结构控制律(18),使得系统(2)在有限时间内到达切换带内实现滑模运动.

证明 选取正定函数$V(\boldsymbol{y}(k))=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{s}(k)$,将滑模变结构控制律(18)代入系统(2),得

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{s}(k)=&-\alpha\boldsymbol{s}(k)-\varepsilon\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)-(\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\\ &\|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{B}_m\|M)\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(k).\end{aligned} \tag{19}$$

由式(16)知,当$\boldsymbol{s}(k)>\boldsymbol{0}$时,

$$-(\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{B}_m\|M)\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(k)\leqslant\boldsymbol{0}.$$

则有

$$\delta\boldsymbol{s}(k)-\alpha\boldsymbol{s}(k)-\varepsilon\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k). \tag{20}$$

当$\boldsymbol{s}(k)<0$时,

$$-(\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{B}_m\|M)\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(k)\geqslant 0.$$

则有

$$\delta\boldsymbol{s}(k)\geqslant-\alpha\boldsymbol{s}(k)-\varepsilon\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k). \tag{21}$$

这表明控制律取式(18)时,到达条件成立,系统(2)在有限时间内到达切换带内实现滑模运动.

基于理想趋近律设计δ算子系统滑模变结构控制与指数趋近律的情形是不同的. 理想趋近律自身并不考虑鲁棒性等问题,它对δ算子不确定系统的全局动态过程,用等效控制方法,求取含有不确定项的控制律,然后增加抑制不确定项的补偿项,保证系统对内部参数摄动与外部干扰具有不变性.

采用理想趋近律(5),考虑式(11),增加抑制不确定因素的补偿项$\boldsymbol{R}(k)$,得滑模变结构控制律

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}=&-\boldsymbol{B}_m^{-1}[(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{y}_1(k)+\\ &(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{y}_2(k)+\boldsymbol{I}(\gamma)+\boldsymbol{R}(k)].\end{aligned} \tag{22}$$

若$\boldsymbol{R}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(k)$,此时增加的补偿项$\boldsymbol{R}(k)$完全补偿不确定项,在切换面上,$\boldsymbol{I}(\gamma)=0$,得到理想准滑动模态渐近稳定. 但此时补偿项$\boldsymbol{R}(k)$未知,控制律无法实现. 根据式(22),利用校正控制$\boldsymbol{u}_c$替换补偿项$\boldsymbol{R}(k)$,得滑模变结构控制律确定性表达式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}=&-\boldsymbol{B}_m^{-1}[(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{y}_1(k)+\\ &(\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{y}_2(k)+(\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\\ &\|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{B}_m\|M)\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{I}(\gamma)].\end{aligned} \tag{23}$$

定理4 对于系统(2),在定理2条件下,满足假设1—3,则存在滑模变结构控制律(23),使得系统(2)在有限时间内到达切换带内实现滑模运动.

证明 选取正定函数$V(\boldsymbol{y}(k))=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{s}(k)$,将滑模变结构控制律(23)代入系统(2),得

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{s}(k)=&\boldsymbol{I}(\gamma)-(\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)\|+\\ &\|\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{B}_m\|M)\operatorname{sgn}\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}(k).\end{aligned} \tag{24}$$

由式(5),(16),仿定理3过程可证结论成立.

4 仿真实例
Simulation example

考虑δ算子不确定系统(2),仿真参数如下:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}183.3 & 115.5\\ 0 & -510.8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1277\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{g}(k)=[0\ \ 0.1+0.1\sin(2\pi k/50)]^{\mathrm{T}}$,取采样周期$T=0.001$,取切换函数系数$c_m=5$,初值$\boldsymbol{y}(0)=[0.6\quad -0.5]$,趋近律系数$\varepsilon=50$,$q=80$,$\gamma=20$.

利用Matlab作出的仿真曲线如图1—6所示.

仿真图中对比了采用两种趋近律设计的滑模控制. 结果表明:采用理想趋近律设计的滑模控制系统抖振较小,原点稳定性好,系统较平稳,但趋近切换面时间相对较长;采用指数趋近律设计的情形抖振幅度较大,原点稳定性差,但趋近时间较短. 对于采样周期极小的δ算子系统而言,保证系统的平稳性,有效地削弱抖振才是最重要的. 改变仿真实例中的不确定参数,系统滑动模态过程几乎完全一样,仅趋近过程有一定的偏差. 总之,采用该方法设计的δ算子系统滑模控制能够得到理想的仿真结果.

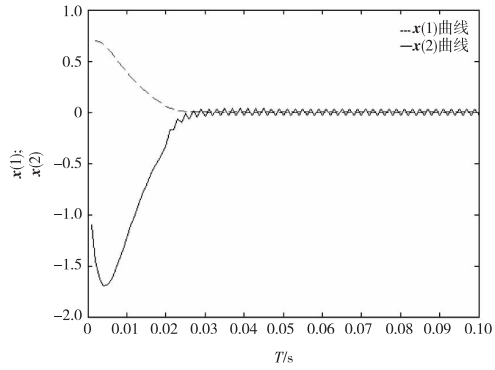


图1　理想趋近律(5)情形的系统状态

Fig. 1　System states of ideal reaching law(5)

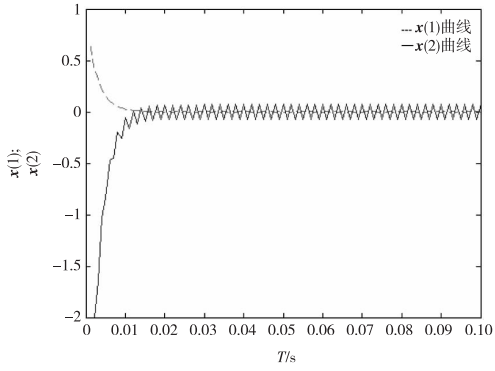


图2　指数趋近律(4)情形的系统状态

Fig. 2　System states of exponential reaching law(4)

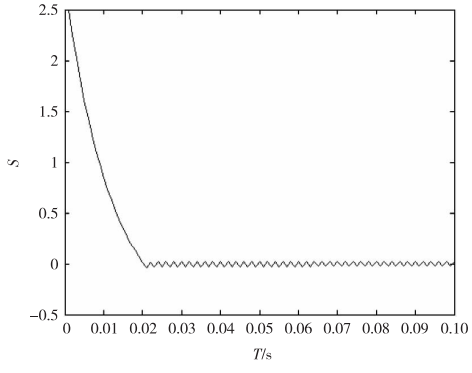


图3　理想趋近律(5)情形的切换函数

Fig. 3　Switching function of ideal reaching law(5)

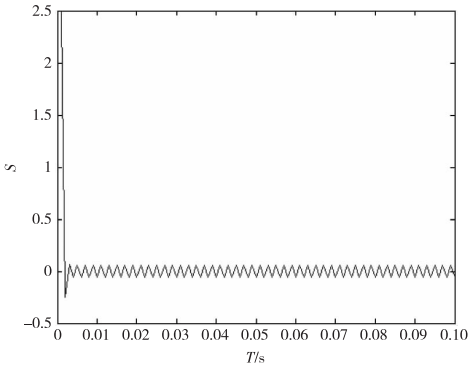


图4　指数趋近律(4)情形的切换函数

Fig. 4　Switching function of exponential reaching law(4)

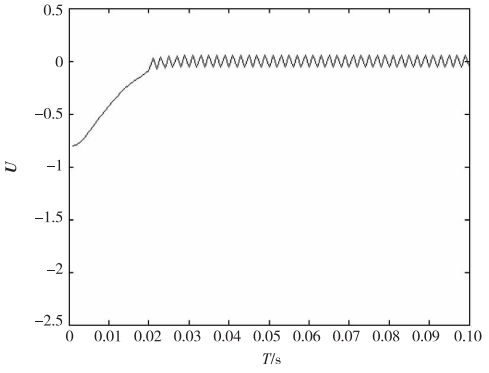


图5　理想趋近律(5)情形的控制输入

Fig. 5　Control input of ideal reaching law(5)

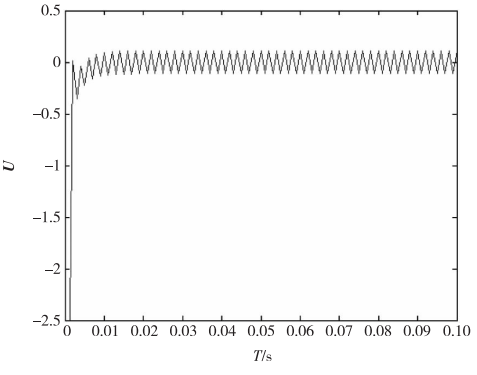


图6　指数趋近律(4)情形的控制输入

Fig. 6　Control input of exponential reaching law(4)

4　结论
Conclusions

本文研究了一类 δ 算子不确定系统的滑模变结构控制综合问题,采用理想趋近律和指数趋近律方法设计滑模控制器. 它将连续系统和离散系统统一到 δ 算子系统中,所设计的变结构控制有限时间内可达切换面,有效地削弱了抖振,提高了系统动态品质. 仿真实例验证了该方法的有效性. 另外,具滞后等情形下的 δ 算子系统变结构控制有待于进一步研究.

参考文献
References

[1] Goodwin G C,Leal R L,Middleton R H. Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control[J]. Automatica,1986,22(2):199-207
[2] Middleton R H,Goodwin G C. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1986,31(11):1015-1021
[3] Goodwin G C,Middleton R H,Poor H V. High-speed digital signal processing and control[J]. Proc of the IEEE,1992,80(2):240-259
[4] 张端金,王忠勇,吴捷. 系统控制和信号处理中的 Delta 算子方法[J]. 控制与决策,2003,18(4):385-391
ZHANG Duanjin,WANG Zhongyong,WU Jie. Survey on system control and signal processing using the Delta operator[J]. Control and Decision,2003,18(4):385-391
[5] Anderson S R,Kadirkamanathan V. Modelling and identification of non-linear deterministic systems in the Delta-domain[J]. Automatica,2007,43(11):1859-1868
[6] Gao W B,Wang Y F,Homaifa A. Discrete-time vari-able structure control systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics,1995,42(2):117-122
[7] 邓飞其,冯昭庶,刘永清. 随机系统的变结构控制[J]. 自动化学报,1997,23(02):267-270
DENG Feiqi,FENG Zhaoshu,LIU Yongqing. Variable structure control of stochastic systems[J]. Acta Automatica Sinica,1997,23(2):267-270
[8] 高存臣,袁付顺,肖会敏. 时滞变结构控制系统[M]. 北京:科学出版社,2004
GAO Cunchen,YUAN Fushun,XIAO Huimin. Variable structure control system with time-delay[M]. Beijing:Science Press,2004
[9] Hassan S,Seyyed M M K,Gholamfreza V,et al. Stabilizing unstable fixed points of discrete chaotic systems via quasi-sliding mode method[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2009,14(3):839-849
[10] 姚琼荟,宋立忠,温洪. 离散变结构控制系统的比例-等速-变速控制[J]. 控制与决策,2000,15(3):329-332
YAO Qionghui,SONG Lizhong,WEN Hong. Propor-tional-constant-variable rate control for discrete-time vari-able structure systems[J]. Control and Decision,2000,15(3):329-332
[11] Zheng Y,Jing Y W. Approximation law for discrete-time variable structure control systems[J]. Journal of Control Theory & Applications,2006,23(3):291-296
[12] 任启峰,高存臣,王品. 基于衰减控制的离散时间系统的变结构控制[J]. 系统仿真学报,2008,20(4):1056-1059
REN Qifeng,GAO Cunchen,WANG Pin. Variable struc-ture control for discrete time systems based on attenuating control[J]. Journal of System Simulation,2008,20(4):1056-1059
[13] 宋立忠,李槐树,姚琼荟. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制[J]. 控制理论与应用,2008,25(3):525-528
SONG Lizhong,LI Huaishu,YAO Qionghui. Discrete-time variable-structure control based on reaching-law approach[J]. Control Theory & Applications,2008,25(3):525-528
[14] 翟长连,刘晓琰,吴智铭. δ-算子描述离散的滑模变结构控制[J]. 上海交通大学,1998,32(8):69-72
ZHAI Changlian,LIU Xiaoyan,WU Zhiming. Variable structure control discrete-time systems in Delta operator systems description[J]. Journal of Shanghai Jiaotong Uinversity,1998,32(8):69-72
[15] 李惠光,武波,李国友,等. Delta 算子控制及其鲁棒控制理论基础[M]. 北京:国防工业出版社,2005
LI Huiguang,WU Bo,LI Guoyou,et al. Global theory of Delta operator control and its robustness control[M]. Beijing:National Defense Industry Press,2005
[16] 徐勇,陈增强,袁著祉. Delta 算子系统的全程滑模变结构控制[J]. 控制与决策,2005,20(6):686-693
XU Yong,CHEN Zengqiang,YUAN Zhuzhi. Global sliding-mode variable structure control for Delta operator formulated systems[J]. Control and Decision,2005,20(6):686-693
[17] Xia Y,Fu M,Yang H,et al. Robustness sliding mode control for uncertain time-delay systems based on Delta operator[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics,2009,56(9):3646-3655
[18] Yang H J,Xia Y Q,Shi P. Observer-based sliding mode control for a class of discrete systems via delta operator approach[J]. Journal of the Franklin Institute,2010,347(7):1199-1213

Chattering-free sliding mode control for uncertain Delta operator system

LIU Yunlong[1] GAO Cunchen[1,2] XIANG Nan[2]
1 College of Information Science andEngineering,Ocean University of China,Qingdao 266100
2 School of Mathematical Science,Ocean University of China,Qingdao 266100

Abstract The synthesis problem of sliding mode variable structure control is investigated for a class ofuncertain Delta operator system with internal parameter perturbation and external disturbance. The differences and similarities of designing sliding mode controller based on two types of idealreaching law and exponential reaching law. The proposed methodsbring previous related conclusions of continuous time system and discrete-time system into unified delta operator system. Slidingmode control system designed by employing two types of reaching lawsnot only can reach the region of the switching surface in finite time,but also decrease the system chattering effectively. The simulation results illustrate the the feasibility and validity ofthe proposed approaches.

Key words Delta operator;sliding mode;reaching law;chattering