文章编号:1674-7070(2010)05-0392-04

一类非线性时变时滞随机大系统的稳定性

崔红艳[1]　高存臣[1]

摘要

讨论了线性时滞随机系统平凡解的几乎必然渐近稳定性,并推广到非线性多时滞随机大系统的几乎必然渐近稳定性.提出了非线性多时滞随机大系统几乎必然渐近稳定性的代数判据.最后,用仿真例子说明了主要结果的可行性与有效性.

关键词

随机大系统;几乎必然渐近稳定;Lyapunov 函数

中图分类号 TH71;TG803

文献标志码 A

0　引言

Introduction

自然界中的现象、实际工程技术和社会经济中许多问题存在随机时间滞后(简称时滞)现象,如测定地球上的点 A 与土星的点 B 的距离随时间的变化情况,由于光速的问题,得到的距离读数是 2.308 $(2\times125\ 000\div30\div3\ 600)$ h 前的距离,而且测量点具有随机性.所以其动态规律存在随机时滞,表现在数学模型上就是一个时滞随机系统或时滞随机大系统,这就需要人们对时滞随机大系统进行研究.与确定性系统的稳定性研究相比,随机系统的稳定性理论还远未完善,特别是关于非线性多时滞的稳定性的研究文献很少[1-8].本文将讨论非线性多时滞随机系统的渐近行为,将 Lassel(拉萨尔)不变原理应用到随机大系统中[9],给出非线性多时滞随机大系统的几乎必然渐近稳定的代数判据.

1　预备知识及问题描述

Preliminaries and problem formulation

考虑如下随机微分方程[3]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=f(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}t+g(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t),t\geqslant0.\quad(1)$$

其初始条件为 $\{\boldsymbol{x}(\alpha)=\boldsymbol{\xi}\mid\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{C}^b_{F_0}([-\tau,0];\mathbf{R}^n),-\tau\leqslant\alpha\leqslant0,\tau=\mathrm{const}>0\}$,$\mathbf{C}^b_{F_0}$ 表示连续映射 f,g 的全体,其中 $f:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,$g:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}$ 均为连续映射,且假设关于 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件,以保证式(1)的解在给定的区域上存在唯一解,$\boldsymbol{w}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^m$ 是系统的外力项.

定义 1[6]　随机系统的平凡解 $\boldsymbol{x}=0$ 称为是几乎必然渐近稳定的,如果

$$p\left\{\lim_{|\boldsymbol{x}_0|\to0,\ t\geqslant0}\sup|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|=0\right\}=1,$$

且存在正数 $\delta>0$,使得当 $|\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 时,对于任意 $\varepsilon>0$,成立

$$\lim_{x\to\infty}p\left\{\sup_{t\geqslant T}|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|>\varepsilon\right\}=0.$$

引理 1[2]　若存在函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^+)$,$\eta\in L^1(\boldsymbol{R}^+;\mathbf{R}^+)$ 及 $\phi_1,\phi_2\in(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^+)$,使得任意 $(t,\boldsymbol{x},y)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$,有

收稿日期 2010-09-01

资助项目 国家自然科学基金(60974025);山东省自然科学重点基金(Z2006G11)

作者简介

崔红艳,女,硕士生,研究方向为控制理论与应用.403160221@163.com

高存臣(通信作者),男,教授,博士生导师,研究方向为控制理论与应用,海洋控制技术.ccgao@ouc.edu.cn

1　中国海洋大学　数学科学学院,青岛,266100

$$LV(t,\boldsymbol{x},y)\leqslant\eta(t)-\phi_1(t,\boldsymbol{x})+\phi_2(t,y),$$
$$\phi_1(t,\boldsymbol{x})\geqslant\phi_2(t+\tau,\boldsymbol{x}),$$

且 $\lim\limits_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}[\inf\limits_{t\geqslant0}V(t,\boldsymbol{x})]=+\infty$,则对任意 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{C}^b_{F_0}([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,若存在 $p>2$,使得 $\sup\limits_{-\tau\leqslant t<\infty}E|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})|^p<+\infty$,则式(1)的解满足 $\lim\limits_{t\to\infty}d(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\xi}),D_\phi)=0$ 几乎必然成立,其中 $D_\phi=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\phi(t,\boldsymbol{x})=\phi_1(t,\boldsymbol{x})=\phi_2(t+\tau,\boldsymbol{x})=0\}$.

现考虑下面的时滞线性随机系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_j\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{W}_j(t).\quad(2)$$

其中,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}_j,\boldsymbol{D}_j\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$j=1,2,\cdots,m$. 时变时滞 $\tau(t)>0$ 为可导函数,且满足 $\dot{\tau}(t)<1$.

引理 2[1] 若存在 $V\in\mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^+)$ 及 3 个正数 $k_1,k_2,\lambda_1>\lambda_2,\lambda_2\in\mathbf{R}$,使任意 $(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n$,有 $k_1|\boldsymbol{x}|^2\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant k_2|\boldsymbol{x}|^2$,$LV(t,\boldsymbol{x},y)\leqslant-\lambda_1|\boldsymbol{x}|^2+\lambda_2|y|^2$,则对任意 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{C}^b_{F_0}([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,方程(2)的解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ 是几乎必然渐近稳定的.

2 主要结果
Main results

考虑下面的非线性多时变时滞随机大系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i(t)=(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}_i(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{r_i}(\boldsymbol{C}_{ij}\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{x}_i(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{W}_{ij}(t)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}f_{ik}(\boldsymbol{x}_k(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\cdots,N.\quad(3)$$

其中 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$,$\boldsymbol{C}_{ij},\boldsymbol{D}_{ij}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$,$f_{ik}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_k}$. 时变时滞 $\tau_i(t)>0$ 为可导函数,且满足 $\dot{\tau}_i(t)<1$,且 f_{ik} 满足适当的条件,以保证其解过程几乎必然地存在唯一.

随机大系统(3)可以看作下面 N 个孤立子系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i(t)=(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}_i(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{r_i}(\boldsymbol{C}_{ij}\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{x}_i(t-\tau_i(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{W}_{ij}(t),\quad i=1,2,\cdots,N\quad(4)$$

通过非线性互联项 $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}f_{ik}(\boldsymbol{x}_k(t-\tau_{ik}))\mathrm{d}t$ 互联的一个非线性互联大系统.

定理 1 对时滞非线性随机大系统(3),若存在正数 a_i,d_i 和正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$,$i=1,2,\cdots,N$ 满足

1) $-\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i+d_i\boldsymbol{I}_i+\sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{C}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{C}_{ij}$,$i=1,2,\cdots,N$,$\boldsymbol{I}_i$ 为单位矩阵;

2) $\lambda_{i1}=\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_i)>\lambda_{i2}=\lambda_{\max}\left(\frac{1}{d_i}\boldsymbol{N}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i+\sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{D}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{D}_{ij}\right)$,

其中 $\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{B}_i-\sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{C}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{D}_{ij}$,$i=1,2,\cdots,N$;

3) $a_0>\sum\limits_{i=1}^{N}a_i$,其中 $f_{ii}=0$,$a_0=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\left\{\frac{\lambda_{i1}a_i}{2}\right\}$,

$a_i=a_i\max\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\left\{\frac{2(N-1)\|\boldsymbol{Q}_if_{ik}\|^2}{\lambda_{i1}}\right\},\lambda_{i2},k\neq i\right\}$,

$i=1,2,\cdots,N$.

则非线性多时滞随机大系统(3)的平凡解几乎渐近稳定.

证明 对每个孤立系统(4)构造如下的 Lyapunov 函数

$$V_i(t,\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}_i,\quad i=1,2,\cdots,N.\quad(5)$$

其中,$\boldsymbol{x}_i(t)\in\mathbf{R}^{n_i}$,正定矩阵 $\boldsymbol{Q}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$,$i=1,2,\cdots,N$. 对 V_i,显然有

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}_i)|\boldsymbol{x}_i|^2\leqslant V_i(t,\boldsymbol{x}_i)\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_i)|\boldsymbol{x}_i|^2,\quad i=1,2,\cdots,N.\quad(6)$$

记 L_i 为孤立子系统的微分算子,则由条件 1)和 2)易证

$$L_iV_i(t,\boldsymbol{x}_i)\leqslant-\lambda_{i1}|\boldsymbol{x}_i|^2+\lambda_{i2}|y_i|^2.$$

由引理 2 知 N 个孤立子系统的平衡点 $\boldsymbol{x}_i=0$ 是几乎必然渐近稳定.

对整个多时滞线性随机系统,选取 Lyapunov 函数为

$$V(t,\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}a_iV_i(t,\boldsymbol{x}_i).$$

式中,$a_i>0$,V_i 由式(5)确定. 由式(6)可得

$$k_1|\boldsymbol{x}|^2\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant k_2|\boldsymbol{x}|^2.$$

式中 $k_1=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{a_i\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}_i)\}$,$k_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{a_i\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_i)\}$. 记 L 为非线性多时滞随机大系统的微分算子,则

$$LV(t,\boldsymbol{x},y)=\sum_{i=1}^{N}a_i\left(V_i(t,\boldsymbol{x},y_i)+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}2\boldsymbol{Q}_if_{ik}y_k\right)\leqslant-a_0|\boldsymbol{x}|^2+\sum_{i=1}^{N}a_i|y|.$$

式中,$a_0,a_i(i=1,2,\cdots,N)$ 由条件 3)给出.

所以由条件 3)及引理 2 知非线性多时滞随机大系统(3)的平凡解几乎必然渐近稳定.

3 数值例子
Numerical example

为说明非线性多时滞随机大系统(3)的平凡解几乎必然渐近稳定性,通过如下的例子说明本文主要结果的可行性与有效性.

例 考虑系统(3),其中,$i=1,2$.

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}-0.45 & 0\\ 0 & -0.4\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{D}_{11},\boldsymbol{D}_{12}$为零矩阵;

$$\boldsymbol{C}_{11}=\begin{pmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{C}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.01\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0.01\\ 2 & -5 & 0\\ 0.001 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}-0.35 & 0 & 0\\ 0 & -0.25 & 0\\ 0 & 0 & 0.1\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{D}_{21},\boldsymbol{D}_{22},\boldsymbol{D}_{23}$为零矩阵;

$$\boldsymbol{C}_{21}=\begin{pmatrix}-0.01 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0.015 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{23}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.018\end{pmatrix};$$

互联矩阵

$$\boldsymbol{f}_{12}=\begin{pmatrix}0.1 & -0.3 & 0.1\\ -0.2 & 0.1 & -0.3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_{21}=\begin{pmatrix}-0.05 & 0\\ 0 & -0.3\\ -0.2 & -0.3\end{pmatrix};$$

取 $d_1=d_2=\boldsymbol{I},\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{I}$(二阶单位矩阵),$\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{I}$(三阶单位矩阵),$\tau(t)=0.002$.

经计算可得

1) $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}4.9999 & -4.0000\\ -4.0000 & 6.9999\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}6.9999 & -4.0000 & -0.0110\\ -4.0000 & 8.9998 & 0\\ -0.0110 & 0 & 0.9997\end{pmatrix};$$

2) $\lambda_{11}=1.8768,\lambda_{12}=0.2025,\lambda_{21}=0.9996,\lambda_{22}=0.1225$;

3) $a_0=0.4998,a_1=0.2025,a_2=0.2026$.

显然满足定理 1 中的所有的条件,所以大系统(3)的平凡解是几乎必然渐近稳定的.

4 结论
Conclusion

本文讨论了线性时滞随机系统平凡解的几乎必然渐近稳定性,并推广到了非线性多时滞随机大系统的几乎必然渐近稳定性;提出了非线性多时滞随机大系统几乎必然渐近稳定性的代数判据;最后,用仿真例子说明了本文主要结果的可行性与有效性.

参考文献
References

[1] Hale J K. Theory of functional differential equation [M]. New York: Springer-Verlag, 1987

[2] 江明辉,蹇继贵,张明望. 时滞中立型线性随机大系统的渐近稳定性[J]. 三峡大学学报,2005,27(2):158-151
JIANG Minghui, JIAN Jigui, ZHANG Mingwang. Asymptotic stability of neutral linear stochastic large-scale system with time-delay [J]. Journal of China Three Gorges University, 2005, 27(2): 158-151

[3] Mao X R. Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations[J]. Stochastics, 2000, 68(3/4): 273-295

[4] 邓飞其,冯昭枢,刘永清. 时滞线性随机系统的均方稳定性与反馈镇定[J]. 控制理论与应用,1996,13(4):441-447
DENG Feiqi, FENG Zhaoshu, LIU Yongqing. Mean-square system and feedback stabilization of linear delay stochastic systems [J]. Control Theory & Applications, 1996, 13(4): 441-447

[5] Fu Y S, Tian Z H, Shi S J. State feedback stabilization for a class of stochastic time-delay nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(2): 282-286

[6] 刘永清,唐功友. 大型动力系统的理论与应用[M]. 广州:华南理工大学出版社,1992
LIU Yongqing, TANG Gongyou. Theory and application of large-scale dynamic systems[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1992

[7] Tai Z X, Wang X C. Lie algebraic criteria for stability of linear neutral systems with multiple delays [J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(21): 30-32

[8] 巫宇霞,陈东彦,张军安. 具有控制约束的连续线性系统的渐近稳定性[J]. 哈尔滨理工大学学报,2007,12(4):113-116
WU Yuxia, CHEN Dongyan, ZHANG Junan. On asymptotic stability of continuous linear system with control constrain [J]. Journal Harbin University of Science and Techenology, 2007, 12(4): 113-116

[9] 孙卫东,高存臣,考永贵. 自治系统渐近稳定的等价条件和新的充分条件[J]. 中国海洋大学学报,2006,36(5):723-725
SUN Weidong, GAO Cunchen, KAO Yonggui. Equivalent condition and new sufficient conditions for asymptotic stability of autonomous system[J]. Periodical of Ocean University of China, 2006, 36(5): 723-725

南京信息工程大学学报:自然科学版,2010,2(5):392-395
Journal of Nanjing University of Information Science and Technology:Natural Science Edition,2010,2(5):392-395

Stability of a class of nonlinear stochastic large-scale system with time-varying delays

CUI Hongyan[1] GAO Cunchen[1]
1 School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100

Abstract Almost surely asymptotic stability of the trivial solution of linear stochastic system with time-varying delays is discussed, and is extended to the nonlinear stochastic large-scale system with time-varying delays. Then, an algebraic criterion of the almost surely asymptotic stability is established for the nonlinear stochastic large-scale system with time-varying delays. The feasibility and effectiveness of the main results are illustrated in this paper by a numerical example.

Key words stochastic large-scale system; almost surely asymptotic stability; Lyapunov function